Combinaciones (como arreglos, pero no importa el orden)

Ejemplo: Tengo 5 camisetas, y me voy para afuera viernes, sábado y domingo. Voy a usar una camiseta distinta cada día. Las camisetas son todas distinguibles

Si considero los días como distinguibles.

Viernes	5
Sábado	4
Domingo	3

Tengo en total
$$A(5,3) = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5!}{2!} = 60$$
formas distintas de elegir la camiseta

¿Qué pasa si considero los días como indistinguibles? A la hora de armar la mochila, sólo me importa qué camisetas llevo, no importa qué día sólo tengo que elegir un subconjunto de 3 elementos, dentro de un conjunto de 5 elementos (camisetas)

La cantidad de subconjuntos distintos se llama combinaciones de 5 tomando 3
$C(5,3)$

Definición: Sean $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$

$$C(n,k) = \#\{\text{subconjuntos de tamaño } k \text{ de un conjunto de tamaño } n\}$$

$$= \#\{S \subseteq \{1,2,\ldots,n\} : \#S = k\}$$

¿Cómo lo calculamos? Podemos pensar el problema para días distinguibles, y dividir entre la cantidad de permutaciones

Si fueran distinguibles los días,

(Viernes Rojo - Sábado Blanco - Domingo Verde)

$\neq$

(Viernes Verde - Sábado Rojo - Domingo Blanco)

pero las dos elecciones me dan
el mismo conjunto {Blanco, Rojo, Verde}

¿cuántas elecciones distintas dan
el mismo conjunto? $P(3) = 3!$

Entonces, $C(5,3) = \dfrac{A(5,3)}{3!} = \dfrac{\frac{5!}{2!}}{3!} = \dfrac{5!}{3!\,2!}$

En general, $C(n,k) = \dfrac{A(n,k)}{k!} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!}$

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Teorema (no definición)

obs: Elegir las que llevo es
lo mismo que elegir las que no llevo

$C(n,k) = C(n, n-k)$

Fórmula de Stiefel

Si $k+1>n$, esto va a valer 0

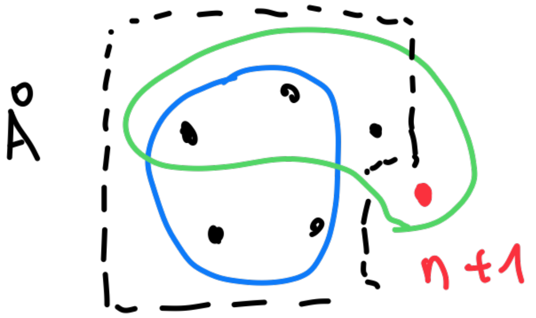
$$C(n+1,k+1) = C(n,k) + \underbrace{C(n,k+1)}$$

Demostración: Los vamos a pensar según la definición como conjuntos.

Sea $A = \{1,2,\ldots,n+1\}$, $\mathring{A} = \{1,2,\ldots,n\}$
$= A \setminus \{n+1\}$

Vamos a usar la regla de la suma

Si voy a elegir un subconjunto de A con $k+1$ elementos, este puede contener al elemento $n+1$ o no



¿Cuántos subconjuntos de A con $k+1$ elementos no contienen al $n+1$? es lo mismo que contar subconjuntos de $\mathring{A}$, que tiene n elementos

En total hay $C(n, k+1)$

¿Cuántos subconjuntos de $k+1$ elementos contienen al $n+1$? Es lo mismo que elegir k en A°, y agregarle el $n+1$ al final.

En total hay $C(n, k)$

En el ejemplo, $C(6,4) = C(5,3) + C(5,4)$

<u>Obs</u>: Si quieren hacerlo con la fórmula, se puede hacer, pero

1) es más largo

2) hay que hacer unas manipulaciones algebraicas que no aportan significado

Teorema del Binomio de Newton

Si x, y son números reales, y $n \in \mathbb{N}$,

$$(x+y)^n = C(n,0)\,x^n + C(n,1)\,x^{n-1}\,y + \dots$$

$$\dots + C(n,n-1)\,x\,y^{n-1} + C(n,n)\,y^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\,x^{n-k}\,y^k$$

Demostración combinatoria: miremos $n=2$

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x\cdot x + \underbrace{x\cdot y + y\cdot x} + yy$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

elegí la x en los dos paréntesis

elegí una x y una y

elegí la y en los dos paréntesis

Ahora con $n=5$: $(x+y)^5 =$

$$= (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$$

$$1\,x^5 + 5\,x^4 y + C(5,2)\,x^3y^2 + C(5,3)\,x^2y^3 + C(5,4)\,xy^4 + C(5,5)\,y^5$$

$1 = C(5,0)$

elijo una y $\Rightarrow 5 = C(5,1)$

elijo dos y

La demostración para un n genérico funciona igual:

- Tenemos n paréntesis distinguibles
- Al multiplicar, las x son indistinguibles entre sí
  las y son indistinguibles entre sí

Al desarrollar las multiplicaciones, el término $x^{n-k}y^k$, va a aparecer tantas veces como conjuntos de k paréntesis podamos elegir para poner la y.

Al juntar esos términos, multiplicamos $x^{n-k}y^k$ por la cantidad de veces que aparece.

Por ejemplo, en $(x+y)^5$, el coeficiente de x^2y^3 es $C(5,3) = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{5!}{2!\,3!}$

(Distinguible - paréntesis - remeras
Indistinguible - variables - días)

¿qué pasa cuando tengo más variables?

Ejemplo, en $(x+y+z)^5$,

¿cuál es el coeficiente de $x^1y^2z^2$?

Tengo 5 paréntesis distinguibles,

y elijo el subconjunto de las que

llevan cada variable

¿cuántas palabras tienen una x, dos y, dos z?

$$(\quad)\ (\quad)\ (\quad)\ (\quad)\ (\quad)$$

(queda determinado)

Usando combinaciones y regla del producto, tenemos $C(5,1)\cdot C(4,2)$

$$\frac{5!}{1!\,4!}\cdot\frac{4!}{2!\,2!} = \frac{5!}{1!\,2!\,2!} = \binom{5}{1\ 2\ 2}$$