Conteo - Combinatoria

Básicamente, tenemos un conjunto finito y queremos saber cuántos elementos tiene

El conjunto puede ser de cualquier cosa. A veces, en vez de "la cantidad de elementos del conjunto" lo que contamos es "la cantidad de formas en las que podemos elegir un elemento cualquiera de ese conjunto"

Ejemplos

1) Ensaladas: Formas de elegir los ingredientes

2) Ropa (outfit): Formas de elegir
qué ropa me pongo.

3) Alineación de un cuadro de fútbol: Formas de elegir qué jugadores las pongo

A su vez, algunas elecciones me pueden parecer "la misma"

1) Si una ensalada tiene tomates perita o tomates cherry, capaz para mí son la misma

2) Si tengo tres buzos rojos, capaz que me da lo mismo a la hora de cómo me veo

3) A lo mejor, no sólo tengo que elegir a quién pongo en la cancha sino también en qué posición.

Tenemos que fijar qué cosas son distinguibles (me importa la diferencia) y qué cosas son indistinguibles (no me importa la diferencia)

En cada problema, tiene que quedar claro, considerar más cosas distinguibles va a dar más posibilidades

Regla de la suma

2) Tengo 3 camisas y 2 remeras ¿De cuántas formas puedo elegir la parte de arriba de mi outfit?

Aclaremos: en este problema, me pongo sólo una cosa

Tengo 3 opciones de camisas y 2 opciones de remeras: en total $3+2=5$ opciones

Usamos la regla de la suma cuando separamos en casos

1) Como base de la ensalada, puedo usar 2 tipos de arroz o 4 tipos de fideos, o quínoa (1 tipo)

Si vamos a poner un tipo de base y sólo uno, tengo 2+4+1 formas de elegirlo

3) Voy a elegir capitán/a de mi equipo entre 16 cuadros. Me fijo en la alineación titular del último partido. Cada cuadro tiene 11 jugadores

Por cada cuadro hay 11 jugadores, entonces tengo

$$\underbrace{11+11+11+\cdots+11}_{16 \text{ veces}} = 11 \cdot 16 = 176 \text{ opciones}$$

En este caso, como todos los cuadros tienen misma cantidad de jugadores, sumo el mismo número muchas veces. Esto se puede ver como aplicación de la regla de la suma, pero también lo podemos interpretar de otra forma:

Regla del producto

Si para elegir cantidad de formas, primero tomo una opción entre m posibles, y para cada opción de esas después tengo n posibilidades, la cantidad total de formas de elegir es m.n.

(camisa o remera) y pantalón

2) Tengo 5 formas de elegir la parte de arriba (camisa o remera), y además quiero elegir pantalón entre los 3 que tengo, me puedo vestir de $5 \cdot 3 = 15$ formas distintas

2b) Si ahora quiero ponerme una remera, una camisa y un pantalón, todo junto

camisa y remera, y pantalón

tengo 2 remeras
3 camisas
3 pantalones

$2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ formas

4) Cuántas combinaciones de caja fuerte tengo si son tres números, y cada uno puede tener 10 valores (y vale repetir)

- Las posiciones son distinguibles

• Puedo repetir o no

1er lugar 10

2° lugar 10

3er lugar 10

En total $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$

4b) Si no quiero repetir (porque me parece poco seguro repetir), entonces

1er lugar 10

2° lugar 9 (tiene que ser distinto del 1er lugar)

3er lugar 8 (tiene que ser distinto de los dos anteriores)

En total tengo $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ combinaciones donde ningún número se repite.

Esto se llama

Arreglos

Cuando quiero elegir ordenadamente k elementos (los lugares son distinguibles) de un conjunto de n elementos distinguibles, la cantidad de formas de hacerlo se llama arreglos de n tomando de a k, arreglos de n en k

Se escribe A^n_k, $A(n,k)$, ...

Para calcularlo, enumeramos los pasos (son k)

k lugares
n elementos (dígitos)

1^{er} lugar $\quad n$

2^{o} lugar $\quad n-1$

3^{er} lugar $\quad n-2$

$\vdots \qquad \vdots$

i-ésimo lugar $\quad n-(i-1)$

$\vdots \qquad \vdots$

k-ésimo lugar $\quad n-(k-1)$

Usando la regla del producto, obtenemos que

$A(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))$

Fórmula corta: puedo multiplicar y dividir por $(n-k)(n-k-1)(n-k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$

$$A(n,k) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1))\frac{(n-k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Caso particular: si $k=n$, simplemente tengo que dar un orden entre los n elementos posibles

$$A(n,n) = n(n-1)(n-2)\cdots\underbrace{(n-(n-1))}_{=1} = n!$$

A este número lo llamamos Permutaciones de n elementos

Ejemplo: Tapa de disco Abbey Road

John, Paul, George, Ringo

Cruzan la calle en fila.

- son distinguibles
- Los lugares son distinguibles (importa el orden) $GPRJ \neq JPRG$

Hay $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ opciones de ordenarlos

2) Tengo que elegir outfit para toda la semana L, M, X, J, V, S, D

pero no quiero repetir

Para empezar, tengo que tener al menos 7.

Supongamos el caso en el que tengo 15

Entonces la cantidad de formas que tengo es

$$\frac{15!}{(15-7)!} = \frac{15!}{8!} = \overset{L}{15} \cdot \overset{M}{14} \cdot \overset{X}{13} \cdot \overset{J}{12} \cdot \overset{V}{11} \cdot \overset{S}{10} \cdot \overset{D}{9}$$

$$= 32.432.400$$

Observación que surgió en clase:

$$A(n, n-1) = A(n,n)$$

Porque al elegir $n-1$ cosas diferentes, para la última te queda una sola opción

<u>Ejemplo</u>: $A(3,2) = A(3,3)$

$A(3,2) = \#\{$palabras de 2 letras con A, B, C sin repetir$\}$

$A(3,3) = \#\{$palabras de 3 letras con A, B, C sin repetir$\}$