miércoles, 12 de marzo de 2025 21:02

¿Qué estábamos viendo?

- Principio de Inducción completa (P.I.C.)
- Ejemplos

✱ Demostración:

$\boxed{H}$ Hipótesis de P.I.C.:

- $P(n_0)$ es verdadera para algún $n_0 \in \mathbb{Z}$
- Para todos los $k \geq n_0$,

  $\underset{(HI)}{P(k)} \Longrightarrow \underset{(TI)}{P(k+1)}$

$\boxed{T}$ Tesis de P.I.C.:

$P(n)$ es verdadera $\forall n \geq n_0$

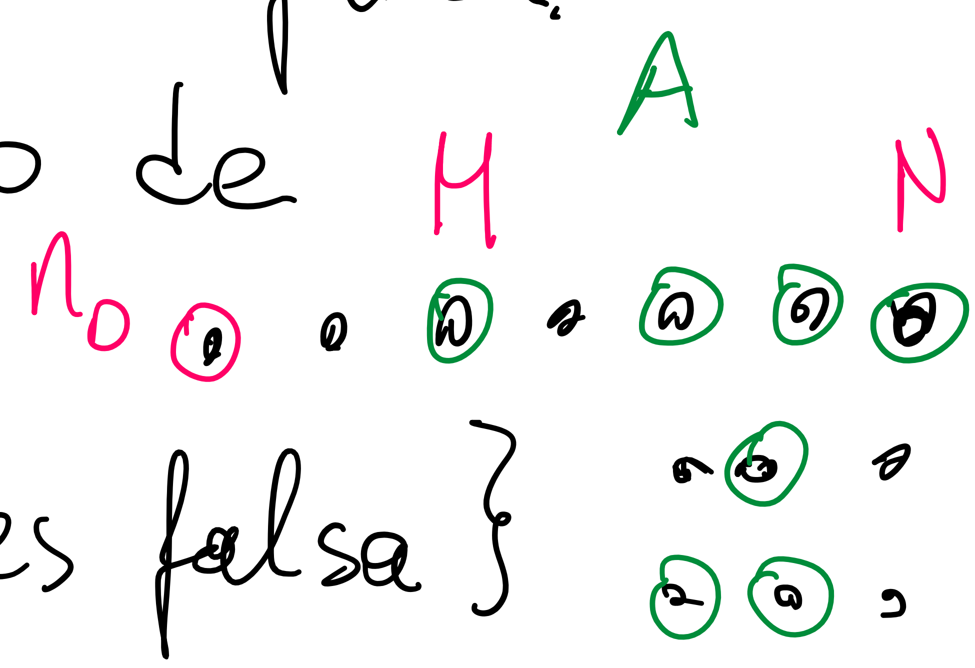
Vamos a demostrarlo por reducción al absurdo:

Nos preguntamos qué pasaría si la $\boxed{T}$ fuera falsa, y de ahí deducimos una contradicción.

En este caso, si fuera falso que vale $P(n)$ para todos los $n \geq n_0$,

Entonces hay un $N \geq n_0$ para el cual $P(N)$ es falsa.

Tomamos un conjunto de números enteros



$A = \{ n \in \mathbb{Z} : n \geq n_0 \text{ y } P(n) \text{ es falsa} \}$

Principio de Buena Ordenación (o del Buen Orden)

Todo conjunto no vacío de enteros, si está acotado inferiormente, tiene mínimo.

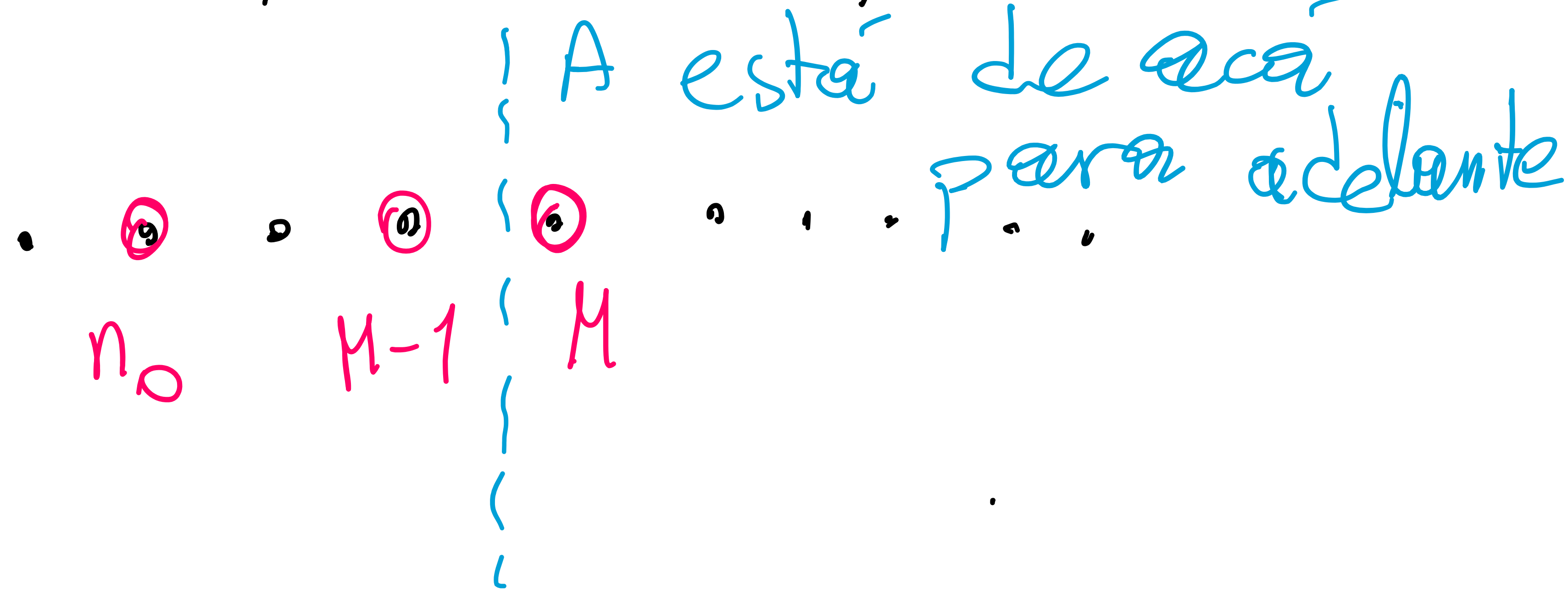
Como $N \in A$, A no es vacío, entonces A tiene un elemento mínimo, M.

$P(M)$ es falsa porque $M \in A$

$M > n_0$, no puede ser $M = n_0$ porque $P(n_0)$ es verdadera

miércoles, 12 de marzo de 2025 21:27

$M > n_0$, $M \geq n_0 + 1$, $M - 1 \geq n_0$



Como M es el mínimo de A, $M-1$ no está en $A \Rightarrow P(M-1)$ es verdadera

Entonces, aplicando el paso inductivo, con $k = M-1$ tenemos $P(M-1) \Rightarrow P(M)$

entonces $P(M)$ es verdadera $\nexists$

Las dos frases $\nexists$ se contradicen

Llegamos a un absurdo, que vino de suponer que para algún N, $P(N)$ era falso. Entonces para todos los $n \geq n_0$, $P(n)$ es verdadero

Principio de Inducción Completa Fuerte (P.I.F.)

Quiero demostrar que todo número natural $n \geq 1$ puede escribirse como suma de algunas potencias de 2, todas distintas

(en esto se basa la representación binaria)

Ejemplos:

	$2^2\ 2^1\ 2^0$
$1 = 2^0$	1
$2 = 2^1$	10
$3 = 2^0 + 2^1$	11
$4 = 2^2$	100
$5 = 2^0 + 2^2$	101
$6 = 2^1 + 2^2$	

Si yo quisiera demostrar esto por P.I.C., en PI ($P(k) \Rightarrow P(k+1)$) Tendría que obtener una suma de potencias de 2 que dé como resultado $k+1$, a partir de una suma de potencias de 2 que dé k

Capaz que para probar $P(k+1)$, es mejor usar P de algún otro número menor, no necesariamente k.

Para probar esto, vamos a usar el Principio de Inducción Fuerte:

Sea $P(n)$ una proposición abierta en una variable $n \geq n_0$

Si PB $P(n_0)$ es verdadera

y PI $\forall k \geq n_0$

$P(n_0)$ y $P(n_0+1)$, y ... y $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

$\Rightarrow$ $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq n_0$

La demostración es muy similar a la del P.I.C

miércoles, 12 de marzo de 2025 22:05

Demostración del Teorema de Representación Binaria por P.I.F:

$P(n)$: n puede expresarse como suma de distintas potencias de 2

Dicho de otra forma: $n = 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_p}$; $i_1, \ldots, i_p$ distintos

<u>PB</u>: $P(1)$ es cierta: $1 = 2^0$

<u>PI</u>: HI: $P(1)$ y $P(2)$ y ... y $P(k)$

Todos los números entre 1 y k pueden escribirse como suma de potencias de 2 distintas entre sí

TI: $P(k+1)$: $k+1$ también puede escribirse como suma de potencias de 2 distintas entre sí

Demostración del P.I.

- si $k+1$ es una potencia de 2, ya está (un sumando solo)
- si no, tomo la mayor potencia de 2 más chica que $k+1$

$$\overbrace{2^j \qquad k+1}^{m} \qquad 2^{j+1}$$

$$2^j < k+1 < 2^{j+1}$$

me fijo en el número m.

$$m = (k+1) - 2^j$$

Si podemos escribir m como suma de potencias de 2, ya está: $k+1 = m + 2^j$

$$2^j < k+1 < 2^{j+1}$$

-2^j

$$0 < k+1-2^j < 2^{j+1} - 2^j$$

$$= 2^j(2-1) = 2^j$$

$$0 < m < 2^j < k+1$$

$$1 \leq m \leq k \quad \text{HI}$$

Entonces $P(m)$ es verdadera

Entonces puedo escribir

$$m = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_p}$$

Entonces $k+1 = m + 2^j = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_p} + 2^j$ ✓

$j \neq i_1, \dots, i_p$

porque $2^j > 2^{i_1}, \dots, 2^{i_p}$