Principio de Inducción Completa

Recapitulando:

- Proposiciones: Frases que pueden ser ciertas (verdaderas) o falsas.
- A veces dependen de variables, acá vamos a usar proposiciones abiertas en una variable

Ejemplo $P(n)$ = "El número $4^n - 1$ es múltiplo de 3"

Queremos probar que $P(n)$ es verdadera para todos los n enteros mayores o iguales que 1.

Principio de Inducción Completa

Si $P(1)$ es verdadera
y $P(1)$ implica $P(2)$
y $P(2)$ implica $P(3)$
y $P(3)$ implica $P(4)$ ...
y $P(k)$ implica $P(k+1)$ $\forall k \geq 1$
$\Rightarrow P(n)$ es cierta $\forall n \geq 1$

se dice
- $P(k)$ implica $P(k+1)$
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$
- De $P(k)$ se deduce $P(k+1)$

Se puede cambiar $\underline{1}$
por cualquier $n_0 \in \mathbb{Z}$

se llama paso base
(caso base)

¿Por qué se me ocurrió
esta $P(n)$?

Porque estaba mirando
números de la forma $4^n - 1$
y todos los que vi eran
múltiplos de 3:

¿es múltiplo de 3?
es 3 por un entero

$4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$ ✓

$4^2 - 1 = 16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5$

$4^3 - 1 = 64 - 1 = 63 = 3 \cdot 21$

$4^4 - 1 = 256 - 1 = 255 = 3 \cdot 85$

⋮

Estos casos no prueban
nada así solos.
Si me parece que es cierto
para todos los $n \geq 1$ enteros,
Tengo que probarlo
Una forma es por inducción
¿Cómo probamos algo por inducción?

① Definir bien P(n)

② PB: Probar el primer caso para el que se cumple (chequear algo)

③ PI: Probar de forma rigurosa que si vale para un número entonces vale para el siguiente

PI : $P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Hipótesis Inductiva (HI)

Tesis Inductiva (TI)

Tengo que argumentar $P(k+1)$ a partir de $P(k)$

Probamos en el ejemplo

$P(n)$: $4^n - 1$ es múltiplo de 3

PB: $P(1)$: $4^1 - 1$ es múltiplo de 3

Lo chequeamos: $4^1 - 1 = 4 - 1 = 3$ ✓

Entonces $P(1)$ es verdadera

HI: $4^k - 1$ es múltiplo de 3

Puedo decir que $4^k - 1 = 3m$ para algún m entero

TI: $4^{k+1} - 1$ es múltiplo de 3

Tengo que probar que $4^{k+1} - 1 = 3\underbrace{m'}_{\text{otro entero}}$

$$4^k - 1 = 3m \quad \text{HI}$$

$$4^k = 3m+1$$

$$4 \cdot 4^k = 4(3m+1)$$

$$4^{k+1} = 12m+4$$

$$4^{k+1} - 1 = 12m+3 = 3\underbrace{(4m+1)}_{\text{encontramos un } m' \text{ entero}} \quad ■$$

$\Rightarrow 4^{k+1} - 1$ es múltiplo de 3 TI ✓ lqqd

Conclusión

$$\left.\begin{array}{l} P(1) \text{ es cierta} \\ P(k) \Rightarrow P(k+1)\ \forall k \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow P(n) \text{ es cierta } \forall n \geq 1$$

La idea es "hacer aparecer HI cuando quiero probar TI" o "hacer aparecer los ingredientes de la TI trabajando sobre la HI":

$$4^k \xrightarrow[\text{multiplico por } 4]{} 4^{k+1}$$

Otro ejemplo: $P(n)$: $n! \geq 2^n$

Recordar: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$

La relación entre $n!$ y $(n+1)!$

es $(n+1)! = n!\,(n+1)$

Vamos a hacer algunos cálculos

para intuir, conjeturar, adivinar, proponer ...

a partir de qué n_0 vale $P(n)$ es cierta $\forall n \geq n_0$

n	2^n	$n!$	$P(n): 2^n \leq n!$
1	2	1	F
2	4	2	F
3	8	6	F
4	16	24	V
5	32	120	V

Pinta que de ahora en adelante va a ser siempre verdadero

de 2^n a 2^{n+1} siempre multiplico por 2

de $n!$ a $(n+1)!$ siempre multiplico por n (va a ser mayor a 2)

Formalicemos esta idea

Comentado [JM1]:

Comentado [JM2R1]:

P.I.C

$P(n): \; 2^n \leq n!$

PB: $P(4)$

$2^4 = 16 \quad , \quad 4! = 24$

$16 < 24$

$P(4)$ es verdadera

PB: Paso Base

PI: Paso Inductivo

HI: Hipótesis Inductiva

TI: Tesis Inductiva

P.I.C: Principio de Inducción completa

PI: HI $P(k): 2^k \leq k!$ TI $P(k+1): 2^{k+1} \leq (k+1)!$

¿Cómo relacionamos $P(k)$ y $P(k+1)$?

$2^{k+1} = 2^k \cdot 2$

$(k+1)! = k!\,(k+1)$

HI $2^k \leq k!$ $\qquad 2 \leq k+1$ (vale porque $k \geq 4$)

$\cdot 2$

TI $2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \leq 2 \cdot k! \leq (k+1)\,k! = (k+1)!$ ✓

Otra forma de escribir el PI:

Quiero probar TI: $2^{k+1} \leq (k+1)!$

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k \leq 2 \cdot k! \leq (k+1)\,k! = (k+1)!$$

HI

$2^k \leq k!$