

Clases 1 y 2 – TIM 71

Maquinas eléctricas

Tecnólogo Industrial Mecánico

5 y 6 de marzo de 2025

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\dots}$$

$$E = mc^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{df}{dt}$$

Plan de clase

1. Detalles administrativos del curso
2. Repaso
 1. Leyes de Maxwell
 2. Campos H y B
3. El campo magnetico (1.4 Ch)
 1. Introduccion
 2. Produccion de un campo magnetico
 3. Circuitos magneticos



1. Repaso de las Leyes de Maxwell

a. Introducción:

- Las leyes de Maxwell describen cómo los campos eléctricos y magnéticos interactúan con cargas y corrientes.
 - Son la base para entender transformadores, motores y generadores.
- 

b. Leyes de Maxwell en forma integral:

1. Ley de Gauss para el campo eléctrico:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} =$$

- **Interpretación:** El flujo de \mathbf{E} a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada.
- **Aplicación en máquinas eléctricas:** Menos relevante, ya que no trabajamos con cargas libres en circuitos magnéticos.

2. Ley de Gauss para el campo magnético:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

- **Interpretación:** No existen monopolos magnéticos; las líneas de \mathbf{B} son cerradas.
- **Aplicación en máquinas eléctricas:** El flujo magnético se conserva en un circuito magnético ($\Phi_{\text{entra}} = \Phi_{\text{sale}}$).

3. Ley de Faraday:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- **Interpretación:** Un campo magnético variable induce un campo eléctrico (y por tanto, un voltaje).
- **Aplicación en máquinas eléctricas:** Base de generadores y transformadores.

3. Ley de Faraday:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- **Interpretación:** Un campo magnético variable induce un campo eléctrico (y por tanto, un voltaje).
- **Aplicación en máquinas eléctricas:** Base de generadores y transformadores.

4. Ley de Ampère-Maxwell:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

- **Interpretación:** Las corrientes y los campos eléctricos variables generan campos magnéticos.
- **Aplicación en máquinas eléctricas:** Simplificamos ignorando el término de desplazamiento ($\frac{d\Phi_E}{dt}$) en bajas frecuencias.

c. Resumen visual:

Se incluye en clase, se discuten muy brevemente

2. Simplificaciones para Máquinas Eléctricas

a. Hipótesis de campos que varían lento:

- **Contexto:** En máquinas eléctricas, los campos varían a frecuencias bajas (50/60 Hz).
- **Simplificaciones:**
 1. **Ignorar el término de desplazamiento en Ampère-Maxwell:**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}}$$

- **Justificación:** $\frac{d\Phi_E}{dt}$ es despreciable a bajas frecuencias.

2. Ley de Faraday se mantiene:

$$V_{\text{inducida}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

- **Importancia:** Es la base de generadores y transformadores.

Campos magnéticos en la materia (B y H)

1. Repaso de \mathbf{B} en el Vacío con Ley de Ampère

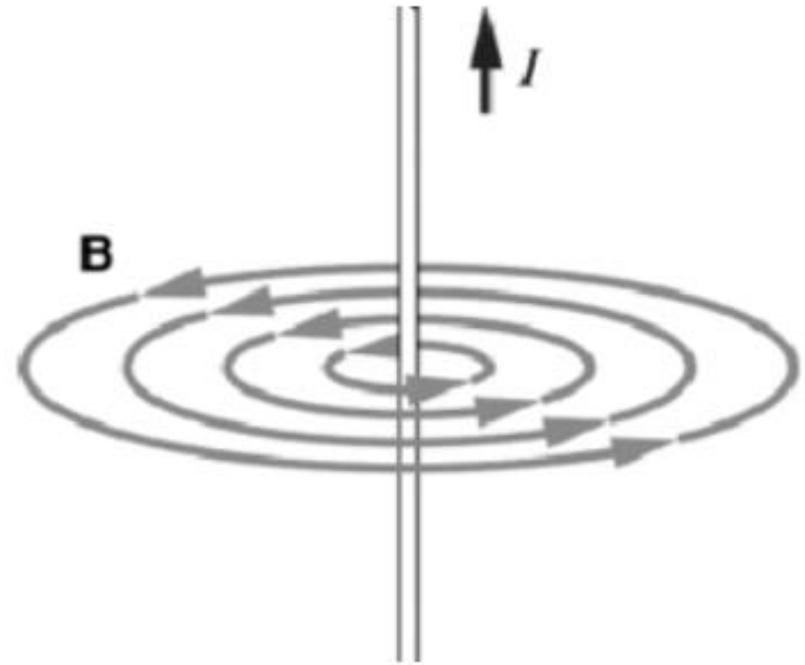
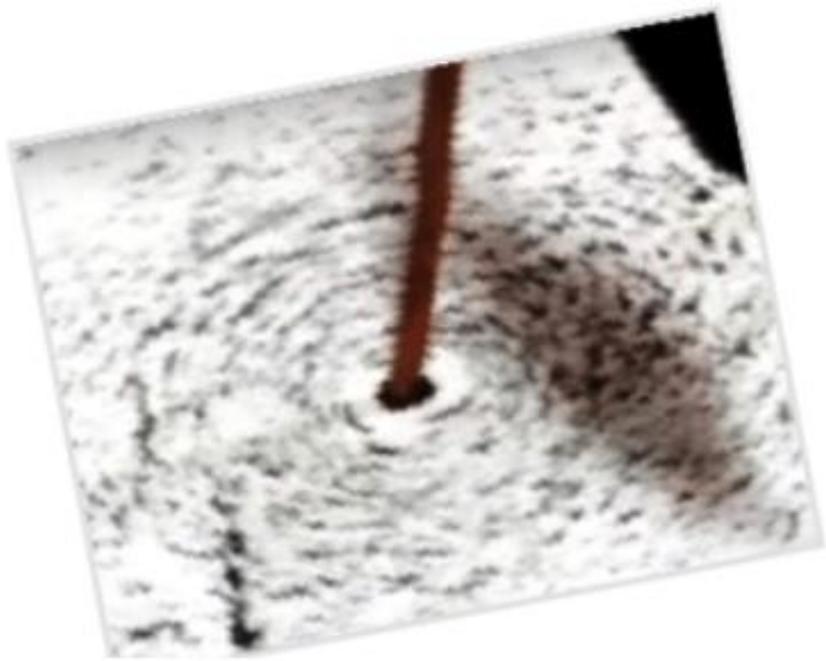
- **Ejemplo:** Cable recto infinito con corriente I .
 - Dibujar las líneas de \mathbf{B} circulares (regla de la mano derecha).
 - **Ley de Ampère en forma integral:**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{libre}}$$

- **Resultado en vacío:**

$$B_{\text{vacío}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- **Mensaje clave:** En el vacío, \mathbf{B} depende solo de I y la geometría.



Lineas del campo B producidas por el cable: experimento (izquierda) y teórico (derecha).

2. Introducción al Vector \mathbf{H} : "El Campo Magnético de las Corrientes Libres"

- **Problema:** ¿Qué pasa si hay materiales magnéticos presentes?
 - **Idea física:** Los materiales tienen "corrientes microscópicas" (dominios magnéticos alineados) que contribuyen a \mathbf{B} , pero \mathbf{H} solo depende de la corriente libre \mathbf{I} que nosotros controlamos.

- **Definir \mathbf{H} :**

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{libre}} \quad (\text{Ley de Ampère para } \mathbf{H})$$

- \mathbf{H} es una herramienta matemática que "ignora" el material y se enfoca en la corriente libre.
- **Relación entre \mathbf{B} y \mathbf{H} :**

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$$

- **μ (permeabilidad):** Representa cómo el material "responde" al campo \mathbf{H} para generar \mathbf{B} .
-

3. Interpretación Física: ¿Por qué los Ferromagnéticos Aumentan B?

- **Ejemplo con núcleo ferromagnético:** Mismo cable con corriente **I**, pero envuelto en hierro ($\mu = 1000\mu_0$).

1. **Calcular H:**

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (\text{igual que en vacío, porque solo depende de I libre!})$$

2. **Calcular B:**

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H = 1000 \cdot B_{\text{vacío}}$$

○ **Conclusión:**

- **H es el mismo** en vacío y en el material (solo depende de **I**).
- **B aumenta 1000 veces** porque el hierro "multiplica" **H** mediante μ .

○ **Analogía intuitiva:**

- **H** es como "pedirle" al material que genere campo magnético.
- μ es cuánto "obedece" el material. Los ferromagnéticos son "superobedientes" (μ alta).



4. Discusión: ¿Para qué sirve H?

- **H es útil en ingeniería:**

- Permite diseñar máquinas eléctricas usando solo **I** (corriente libre), sin preocuparse por las corrientes microscópicas del material.
- Ejemplo: Si queremos **B = 1 T** en un núcleo, con **$\mu_r = 1000$** , necesitamos:

$$H = \frac{B}{\mu} = \frac{1}{1000\mu_0} \Rightarrow I = H \cdot L \quad (\text{muy pequeña!})$$

- **Resumen visual:**

Caso	H	B
Vacío (μ_0)	$H = I/(2\pi r)$	$B = \mu_0 H$
Hierro ($\mu = 1000\mu_0$)	$H = I/(2\pi r)$	$B = 1000\mu_0 H$ (¡Mayor!)

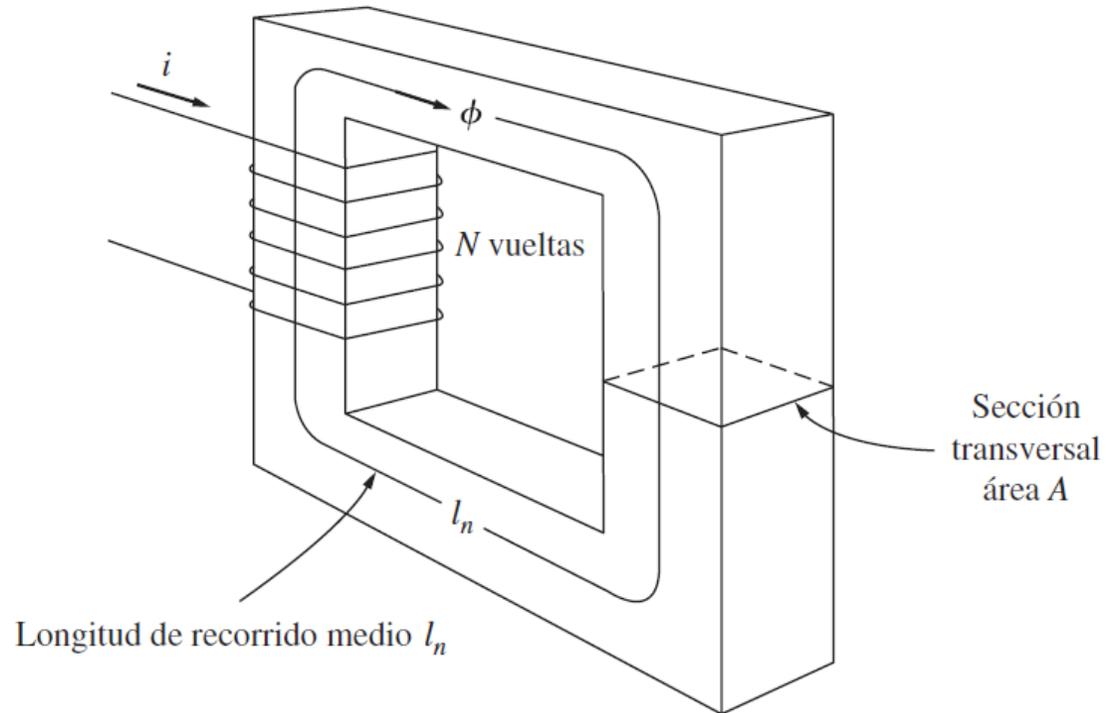
Ejemplo numérico:

- $I = 1 \text{ A}$, $r = 0.1 \text{ m} \rightarrow H = 1/(2\pi \cdot 0.1) \approx 1.59 \text{ A/m}$.
- B en vacío: $\mu_0 H \approx 2 \times 10^{-6} \text{ T}$.
- B en hierro: $1000\mu_0 H \approx 0.002 \text{ T}$ (¡x1000!).

Importante:

- H es una abstracción que separa la corriente libre (nuestra responsabilidad) de la respuesta del material (μ).
- Los materiales ferromagnéticos no crean H, pero sí multiplican B para un mismo H. Esto explica por qué transformadores y motores usan núcleos de hierro: ¡controlan B con corrientes pequeñas!

Circuitos Magnéticos



- **Objetivo:** Entender cómo los circuitos magnéticos permiten modelar el comportamiento del flujo magnético en máquinas eléctricas, usando analogías con circuitos eléctricos.

Fuente de esta sección: Chapman



Ley de Ampère y Campo Magnético

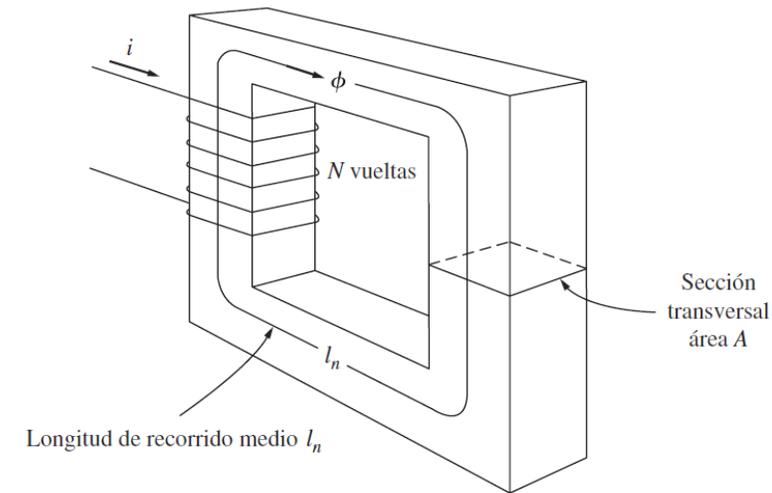
- Ley de Ampère:

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{\text{neta}}$$

- \mathbf{H} : Intensidad del campo magnético (A-vuelta/m).
 - I_{neta} : Corriente neta encerrada por la trayectoria de integración.
- Aplicación en un núcleo ferromagnético:
 - Casi todo el campo magnético se confina dentro del núcleo.
 - Trayectoria de integración: Longitud media del núcleo (l_n).
 - Corriente neta: $I_{\text{neta}} = Ni$ (N vueltas de alambre con corriente i).
 - Expresión simplificada:

$$Hl_n = Ni$$

- H : Magnitud de la intensidad del campo magnético.



Intensidad del Campo Magnético (H)

- **Fórmula:**

$$H = \frac{Ni}{l_n}$$

- H es una medida del "esfuerzo" de la corriente por establecer un campo magnético.

- **Relación con la densidad de flujo (B):**

$$B = \mu H$$

- μ : Permeabilidad magnética del material (H/m).
- B : Densidad de flujo magnético (T).

Permeabilidad Magnética

- **Permeabilidad del espacio libre (μ_0):**

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

- **Permeabilidad relativa (μ_r):**

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

- Compara la capacidad de magnetización de un material con el espacio libre.
- Ejemplo: Aceros usados en máquinas tienen $\mu_r = 2000$ a 6000 .
- **Conclusión:**
 - Los materiales ferromagnéticos (hierro, acero) concentran el flujo magnético.
 - El flujo en el núcleo es miles de veces mayor que en el aire.

Densidad de Flujo (B) y Flujo Magnético (Φ)

- Densidad de flujo en el núcleo:

$$B = \mu H = \frac{\mu N i}{l_n}$$

- Flujo magnético (Φ):

$$\Phi = \int B \cdot dA$$

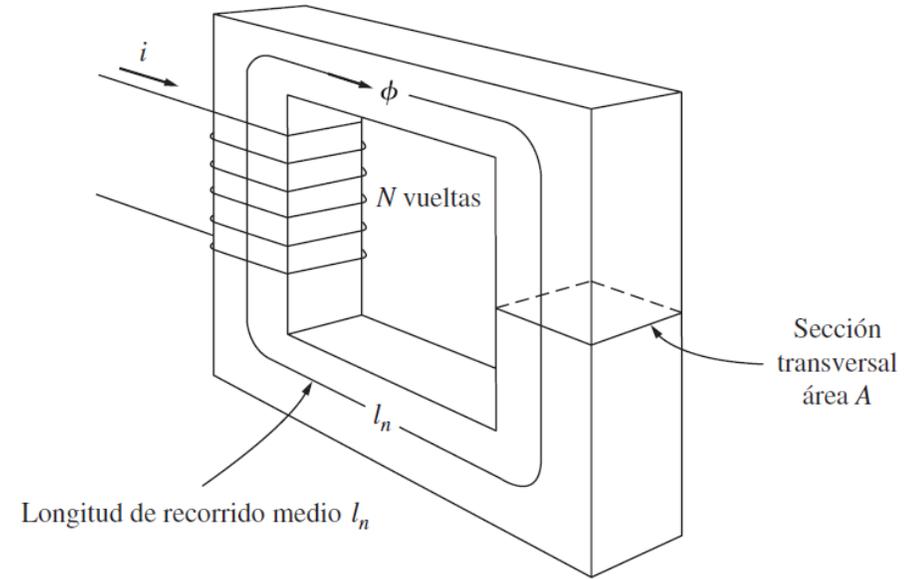
- Si B es constante y perpendicular al área A :

$$\Phi = BA$$

- Flujo total en el núcleo:

$$\Phi = \frac{\mu N i A}{l_n}$$

- A : Área transversal del núcleo.



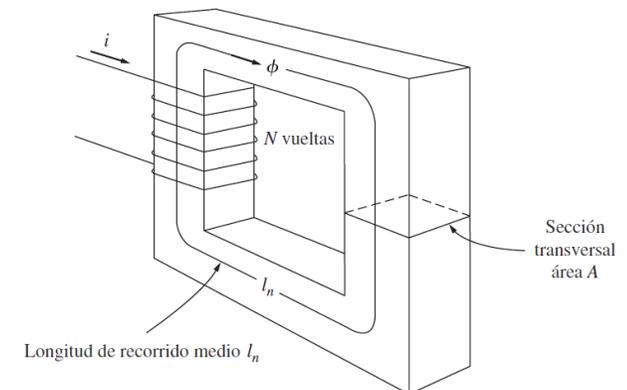
Importancia del Núcleo Ferromagnético

- **Concentración del flujo:**

- La alta permeabilidad del núcleo confina el flujo magnético, evitando que se disperse al aire.
- El flujo disperso es pequeño pero crucial para inductancias y acoplamientos en transformadores y motores.

- **Efecto práctico:**

- Permite diseñar máquinas eficientes con corrientes pequeñas.
- Ejemplo: Transformadores y motores usan núcleos de hierro para maximizar el flujo magnético.



Resumen

1. **Ley de Ampère:** Relaciona la corriente con la intensidad del campo magnético (H).
2. **Permeabilidad (μ):** Determina la capacidad de un material para concentrar el flujo magnético.
3. **Densidad de flujo (B):** Depende de H y μ .
4. **Flujo magnético (Φ):** Es el producto de B y el área transversal (A).
5. **Núcleo ferromagnético:** Aumenta el flujo magnético y lo confina, mejorando la eficiencia de las máquinas eléctricas.

1. Conceptos Básicos

- **Flujo magnético (Φ):**
 - Es la cantidad de campo magnético que atraviesa una superficie.
 - Se mide en Webers (Wb).
 - Fórmula: $\Phi = B \cdot A$, donde B es la densidad de flujo y A es el área transversal.
- **Fuerza magnetomotriz (\mathcal{F}):**
 - Es el "impulso" que genera el flujo magnético.
 - Se define como $\mathcal{F} = NI$, donde N es el número de vueltas de la bobina e I es la corriente.
 - Análoga al voltaje en circuitos eléctricos.
- **Reluctancia (\mathcal{R}):**
 - Es la "oposición" que ofrece un material al flujo magnético.
 - Fórmula: $\mathcal{R} = \frac{L}{\mu A}$, donde L es la longitud del camino magnético, μ es la permeabilidad del material y A es el área transversal.
 - Análoga a la resistencia en circuitos eléctricos.

2. Ley de Ohm Magnética

- **Formulación:**

$$\mathcal{F} = \Phi \cdot \mathcal{R}$$

- **Interpretación:** La fuerza magnetomotriz (\mathcal{F}) es igual al flujo magnético (Φ) multiplicado por la reluctancia (\mathcal{R}).

- **Analogía con circuitos eléctricos:**

Circuito Eléctrico

Voltaje (V)

Corriente (I)

Resistencia ($R = \frac{\rho L}{A}$)

Ley de Ohm ($V = IR$)

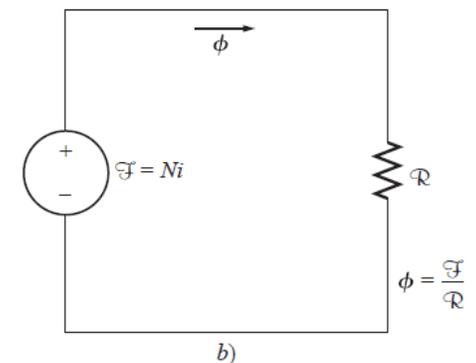
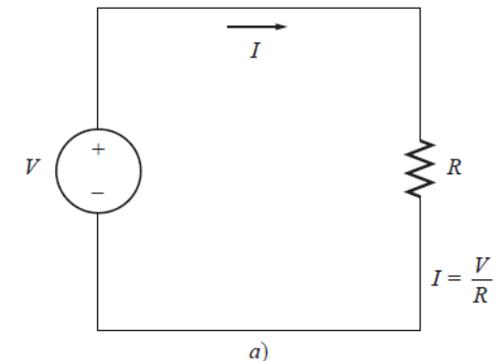
Circuito Magnético

Fuerza magnetomotriz ($\mathcal{F} = NI$)

Flujo magnético ($\Phi = B \cdot A$)

Reluctancia ($\mathcal{R} = \frac{L}{\mu A}$)

Ley de Ohm Magnética ($\mathcal{F} = \Phi \mathcal{R}$)



Reglas de las Reluctancias

Las reluctancias en circuitos magnéticos se comportan de manera análoga a las resistencias en circuitos eléctricos:

- **Reluctancias en serie:**

$$\mathcal{R}_{\text{eq}} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \dots$$

- La reluctancia equivalente es la suma de las reluctancias individuales.

- **Reluctancias en paralelo:**

$$\frac{1}{\mathcal{R}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\mathcal{R}_1} + \frac{1}{\mathcal{R}_2} + \frac{1}{\mathcal{R}_3} + \dots$$

- La reluctancia equivalente se calcula como el inverso de la suma de los inversos.

- **Permeancias:**

- La permeancia (\mathcal{P}) es el inverso de la reluctancia ($\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$).
- Las permeancias en serie y en paralelo siguen las mismas reglas que las conductancias eléctricas.

Flujo Magnético (Φ) en un Núcleo

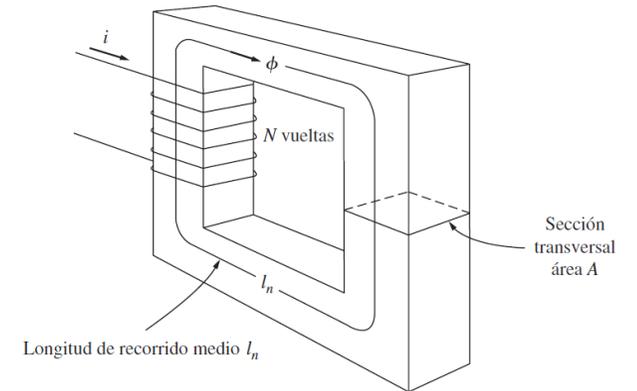
- **Fórmula general:**

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \mathcal{F}\mathcal{P}$$

- **Ejemplo en núcleo ferromagnético:**

$$\Phi = \frac{\mu NiA}{l_n}$$

- μ : Permeabilidad del núcleo.
- Ni : Fuerza magnetomotriz (\mathcal{F}).
- A : Área transversal.
- l_n : Longitud media del núcleo.



Reluctancia en un Núcleo Ferromagnético

- **Cálculo de reluctancia:**

$$\mathcal{R} = \frac{l_n}{\mu A}$$

- **Interpretación:**
 - A mayor longitud (l_n), mayor reluctancia.
 - A mayor permeabilidad (μ) y área (A), menor reluctancia.
- **Ejemplo:**
 - Núcleo de hierro con $\mu_r = 2000$, $l_n = 0.5 \text{ m}$, $A = 0.01 \text{ m}^2$:

$$\mathcal{R} = \frac{0.5}{2000 \cdot 4\pi \times 10^{-7} \cdot 0.01} \approx 19894 \text{ A-v/Wb}$$

Utilidad del Concepto de Circuito Magnético

A pesar de sus limitaciones, el concepto de circuito magnético es la herramienta más práctica para calcular flujos en el diseño de máquinas eléctricas.

- **Ventajas:**
 - Simple y rápido de aplicar.
 - Proporciona resultados suficientemente precisos para diseños prácticos.
- **Alternativa:**
 - Un cálculo exacto usando las ecuaciones de Maxwell es extremadamente complejo y, en la mayoría de los casos, innecesario.

Limitaciones de los Circuitos Magnéticos

Los cálculos de flujo en circuitos magnéticos son aproximaciones, con un margen de error típico de $\pm 5\%$.

Las principales fuentes de error son:

- **Flujo disperso:**

- El flujo no está completamente confinado en el núcleo. Una pequeña fracción escapa al aire circundante, lo que se conoce como **flujo disperso**.
- Este fenómeno es especialmente relevante en el diseño de máquinas eléctricas.

- **Suposiciones geométricas:**

- Los cálculos asumen una longitud media y un área transversal constantes, lo que no es exacto, especialmente en esquinas y uniones del núcleo.

- **No linealidad de los materiales ferromagnéticos:**

- La permeabilidad (μ) de los materiales ferromagnéticos varía con el flujo preexistente en el material.
- Esto introduce errores, ya que la reluctancia depende de μ .

- **Efecto marginal en entrehierros:**

- En entrehierros, la sección transversal efectiva del campo magnético es mayor que la del núcleo debido al "efecto marginal".
 - Esto aumenta la reluctancia efectiva del entrehierro.
-

Correcciones Prácticas

Para reducir estos errores, se utilizan valores "corregidos" o "efectivos" en los cálculos:

- **Longitud media corregida:** Ajustada para considerar las imperfecciones geométricas.
 - **Área transversal efectiva:** Ajustada para incluir el efecto marginal en entrehierros.
-

Ejemplos de Aplicación

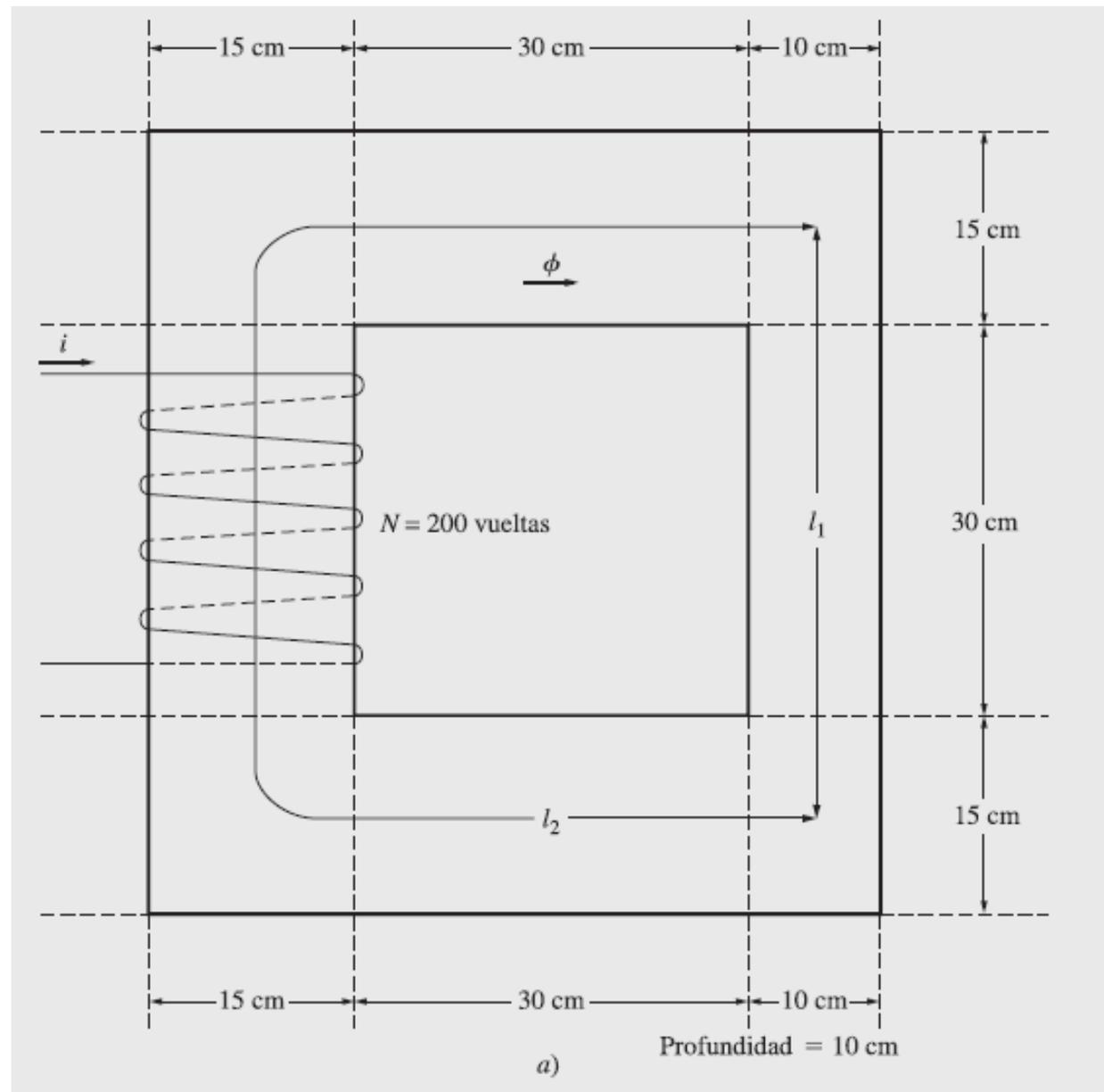
Los ejemplos prácticos de circuitos magnéticos suelen incluir:

- Cálculo de flujo en núcleos con y sin entrehierros.
- Determinación de la fuerza magnetomotriz (\mathcal{F}) necesaria para alcanzar un flujo deseado.
- Uso de valores corregidos para longitudes y áreas efectivas.

Trabajaremos en clase con los ejemplos del Chapman

EJEMPLO 1-1

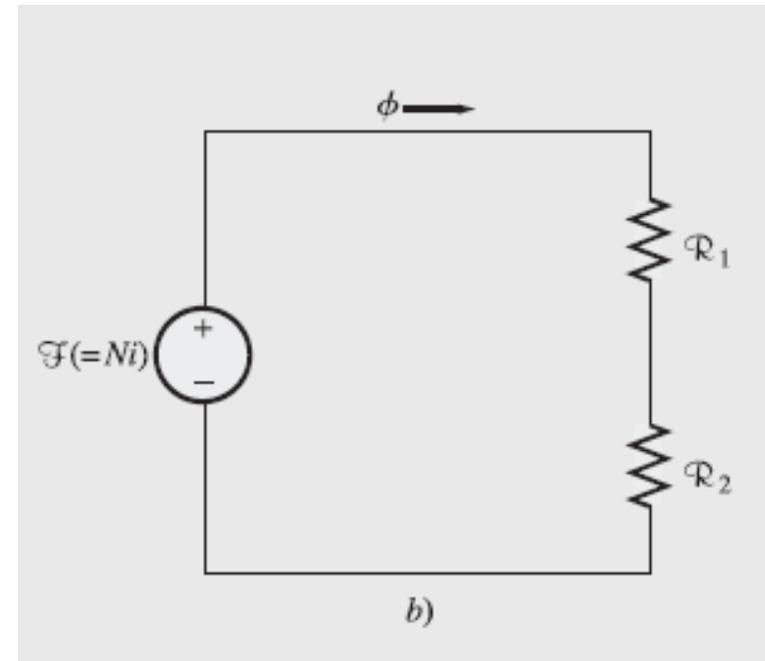
En la figura 1-7a) se observa un núcleo ferromagnético. Tres lados de este núcleo tienen una anchura uniforme, mientras que el cuarto es un poco más delgado. La profundidad del núcleo visto es de 10 cm (hacia dentro de la página), mientras que las demás dimensiones se muestran en la figura. Hay una bobina de 200 vueltas enrollada sobre el lado izquierdo del núcleo. Si la permeabilidad relativa μ_r es de 2 500, ¿qué cantidad de flujo producirá una corriente de 1 A en la bobina?



Solución del libro:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \frac{l_1}{\mu A_1} = \frac{l_1}{\mu_r \mu_0 A_1} \\ &= \frac{0.45 \text{ m}}{(2\,500)(4\pi \times 10^{-7})(0.01 \text{ m}^2)} \\ &= 14\,300 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 &= \frac{l_2}{\mu A_2} = \frac{l_2}{\mu_r \mu_0 A_2} \\ &= \frac{1.3 \text{ m}}{(2\,500)(4\pi \times 10^{-7})(0.015 \text{ m}^2)} \\ &= 27\,600 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$



Analice las longitudes y secciones usadas para cada tramo.

Por lo tanto, la reluctancia total del núcleo es

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\text{eq}} &= \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \\ &= 14\,300 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb} + 27\,600 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb} \\ &= 41\,900 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

La fuerza magnetomotriz total es

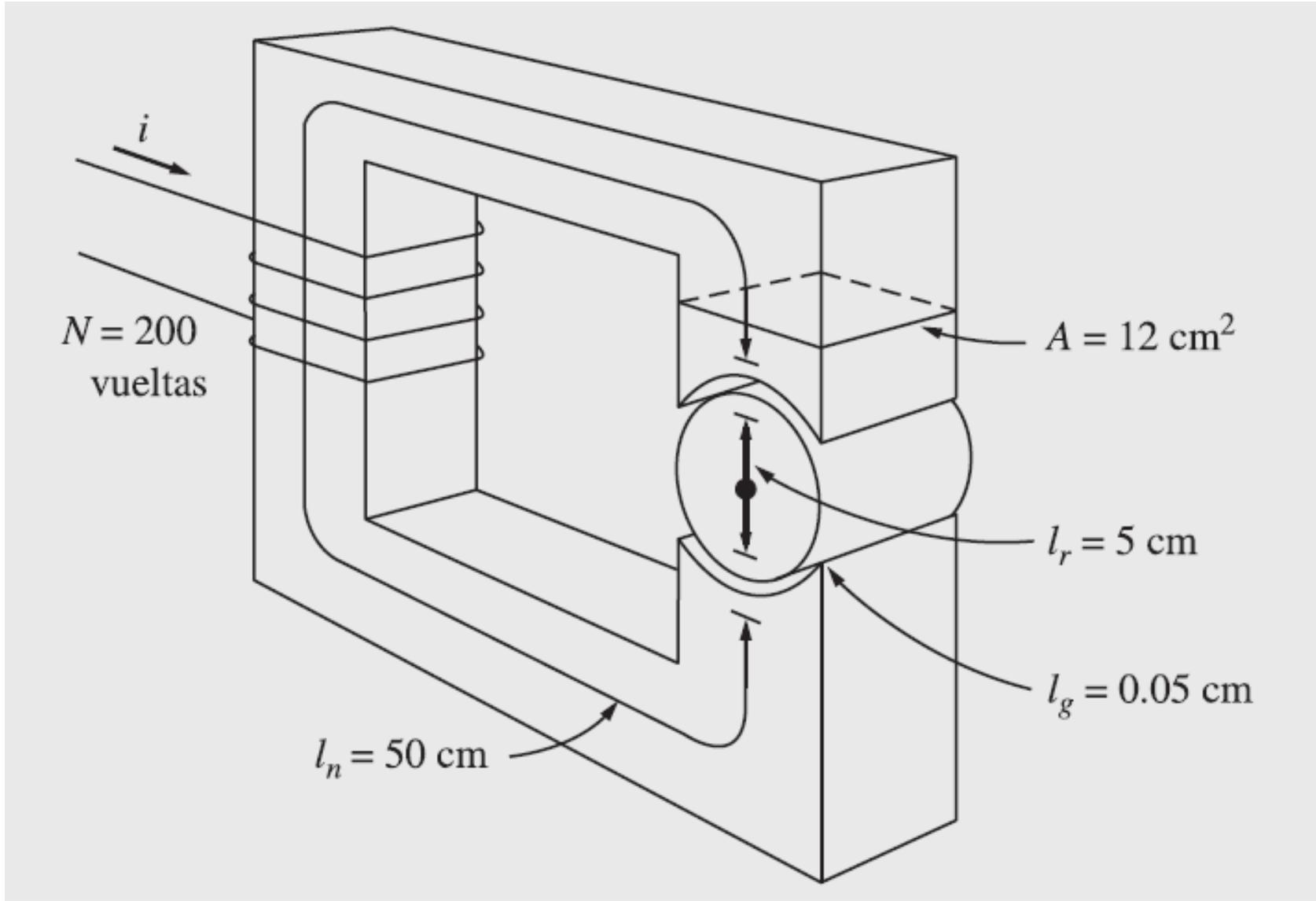
$$\mathcal{F} = Ni = (200 \text{ espiras})(1.0 \text{ A}) = 200 \text{ A} \cdot \text{espiras}$$

El flujo total en el núcleo está dado por

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{200 \text{ A} \cdot \text{espiras}}{41\,900 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}} \\ &= 0.0048 \text{ Wb}\end{aligned}$$

EJEMPLO 1-3

La figura 1-9a) muestra un rotor y un estator sencillos de un motor de cd. La longitud media del recorrido del flujo en el estator es de 50 cm, y el área de su sección transversal es de 12 cm^2 . La longitud media correspondiente al rotor es de 5 cm y el área de su sección transversal también es de 12 cm^2 . Cada entrehierro entre el rotor y el estator tiene un ancho de 0.05 cm y el área de su sección transversal (incluyendo el efecto marginal) es de 14 cm^2 . El hierro del núcleo tiene una permeabilidad relativa de 2 000, y hay 200 vueltas alrededor del núcleo. Si la corriente en el alambre se ajusta a 1 A, ¿cuál será la densidad de flujo resultante en el entrehierro?

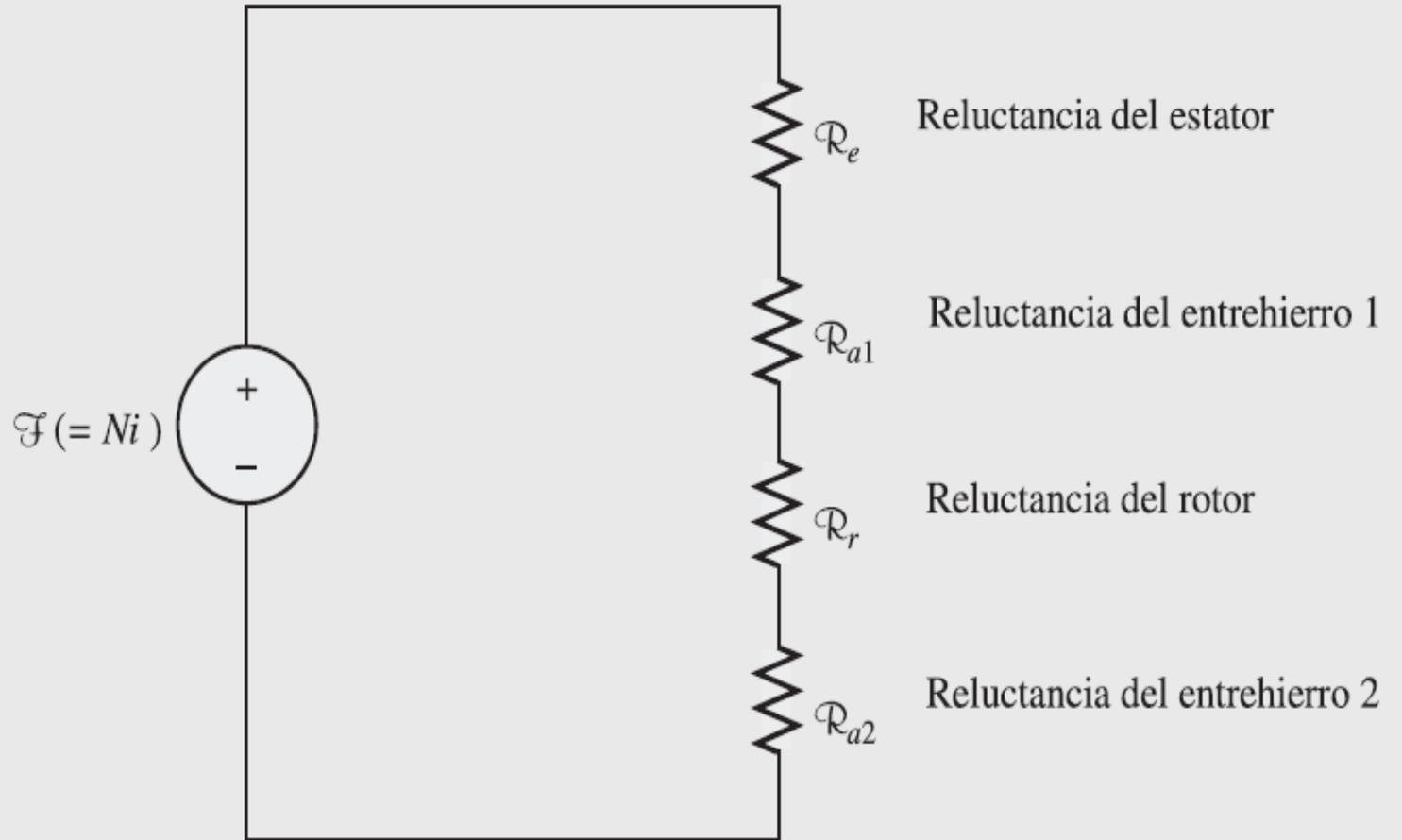


Solución del libro

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_s &= \frac{l_s}{\mu_r \mu_0 A_s} \\ &= \frac{0.5 \text{ m}}{(2\,000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012 \text{ m}^2)} \\ &= 166\,000 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_r &= \frac{l_r}{\mu_r \mu_0 A_r} \\ &= \frac{0.05 \text{ m}}{(2\,000)(4\pi \times 10^{-7})(0.0012 \text{ m}^2)} \\ &= 16\,600 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_a &= \frac{l_a}{\mu_r \mu_0 A_a} \\ &= \frac{0.0005 \text{ m}}{(1)(4\pi \times 10^{-7})(0.0014 \text{ m}^2)} \\ &= 284\,000 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}\end{aligned}$$



Reluctancia del estator

Reluctancia del entrehierro 1

Reluctancia del rotor

Reluctancia del entrehierro 2

b)

Analice las longitudes, permeabilidades y secciones usadas para cada tramo.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{\text{eq}} &= \mathcal{R}_e + \mathcal{R}_{a1} + \mathcal{R}_r + \mathcal{R}_{a2} \\
 &= 166\,000 + 284\,000 + 16\,600 + 284\,000 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb} \\
 &= 751\,000 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}
 \end{aligned}$$

La fuerza magnetomotriz neta aplicada al núcleo es

$$\mathcal{F} = Ni = (200 \text{ espiras})(1.0 \text{ A}) = 200 \text{ A} \cdot \text{espiras}$$

Por lo tanto, el flujo total en el núcleo es

$$\begin{aligned}
 \phi &= \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{200 \text{ A} \cdot \text{espiras}}{751\,000 \text{ A} \cdot \text{espiras/Wb}} \\
 &= 0.00266 \text{ Wb}
 \end{aligned}$$

Por último, la densidad de flujo en el entrehierro del motor es

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{0.000266 \text{ Wb}}{0.0014 \text{ m}^2} = 0.19 \text{ T}$$