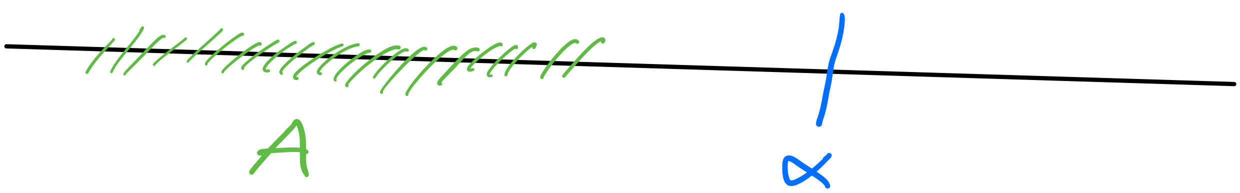
Axioma de completitud

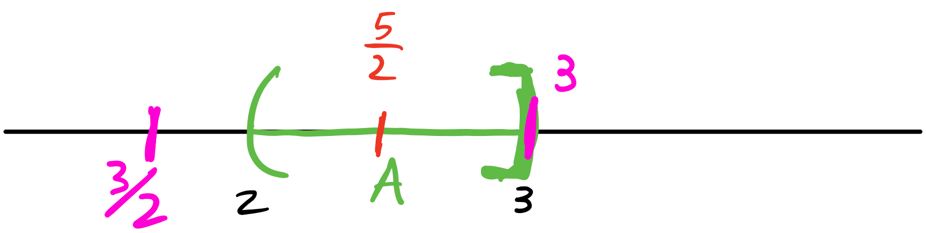
Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.

Definición: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ subconjunto decimos $\alpha \in \mathbb{R}$ es una cota superior (cota inferior) de A si:

$$x \leq \alpha \quad \forall x \in A$$
$$\left(x \geq \alpha \quad \forall x \in A \right)$$



Ej: $A = (2, 3] \subseteq \mathbb{R}$



3 es cota superior de A

$\frac{3}{2}$ es cota inferior de A

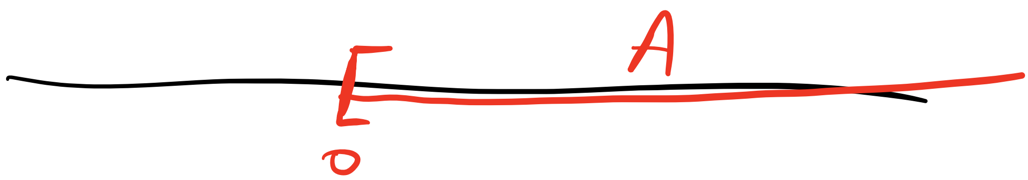
El conjunto de las cotas superiores de A es $\{\alpha \in \mathbb{R} / 3 \leq \alpha\} = [3, +\infty)$

El conjunto de las cotas inferiores de A es $\{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha \leq 2\}$

Def: – Decimos que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ está acotado superiormente (acotado inferiormente) si A tiene alguna cota superior (inferior)

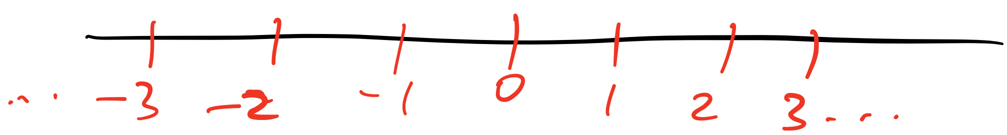
– Si A está acotado inferiormente y superiormente, decimos que A está acotado

Ej: $A = [0, +\infty)$



A está acotado inferiormente pero no superiormente. Entonces, no está acotado.

$\mathbb{Z} \ (\subseteq \mathbb{R})$



$\mathbb{Z}$ no está acotado ni inferiormente ni superiormente

Def: Decimos que $M \in \mathbb{R}$ es un máximo (mínimo) de $A \subseteq \mathbb{R}$ si:

- M es una cota superior (inferior) de A
- $M \in A$

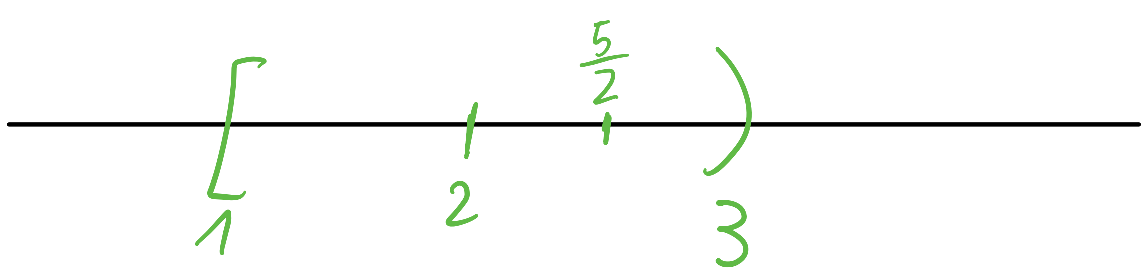
Ej: $A = [-1, 3]$ $\quad$ 3 es el máximo de A

porque
- $3 \in A$, y
- 3 es cota superior de A

Ej: $B = [1, 3) \subseteq \mathbb{R}$ en este caso B

no tiene máximo, pero sí

tiene mínimo y es igual a -1.



El máximo y el mínimo no

tienen porqué existir, mismo si el conjunto está acotado.

Proposición: Si $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene máximo tiene a lo sumo un máximo.

Dem: Supongamos que tenemos M_1, M_2 máximos de A. Veremos que $M_1 = M_2$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Como } M_1 \in A \\ M_2 \text{ es cota superior de } A\end{array}\right\} \Rightarrow M_1 \leq M_2 \\ \\ \left.\begin{array}{l}\text{Como } M_2 \in A \\ M_1 \text{ es cota superior de } A\end{array}\right\} \Rightarrow M_2 \leq M_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{M_1 = M_2}$$

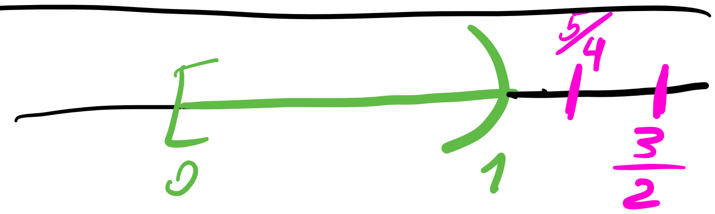
Al máximo (mínimo) de A lo notaremos $\max(A)$ ($\min(A)$)

Def: Decimos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un supremo (ínfimo) de $A \subseteq \mathbb{R}$ si:

- α es una cota superior (inferior) de A
- $\alpha \leq \beta$ $(\geq)$ $\quad \forall \beta$ cota superior (inferior) de A

"α es la menor de las cotas superiores"

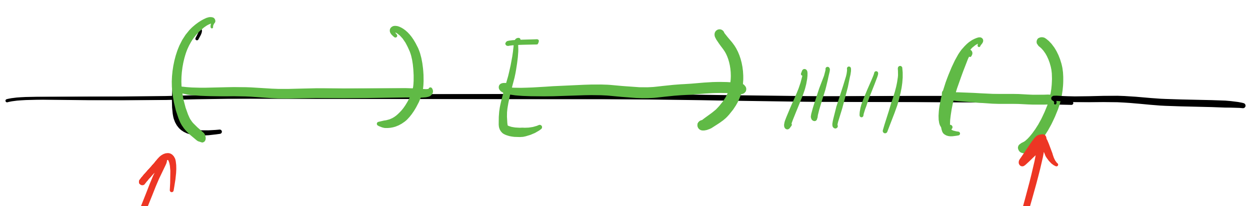
Ej: $A = [0, 1)$



En este caso, $\frac{3}{2}$ es una cota superior de A pero $5/4$ es una cota superior de A menor que $3/2$. Es decir $3/2$ **no** es la menor cota superior de A. Entonces $3/2$ **no** es supremo de A.

En este caso el supremo de A es

$$\sup(A) = 1$$



ínfimo de A supremo de A

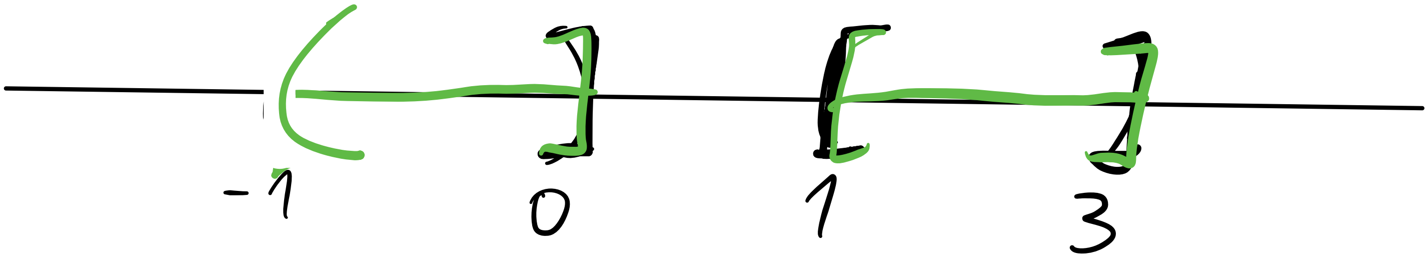
Observación: Si A tiene máximo llamémosle M, entonces $M = \sup(A)$

De hecho, como M máximo

- M es cota superior de A
- si β es otra cota superior de A, como $M \in A$, $\boxed{M \leq \beta}$

"Si el supremo pertenece al conjunto, es el máximo del conjunto"

A

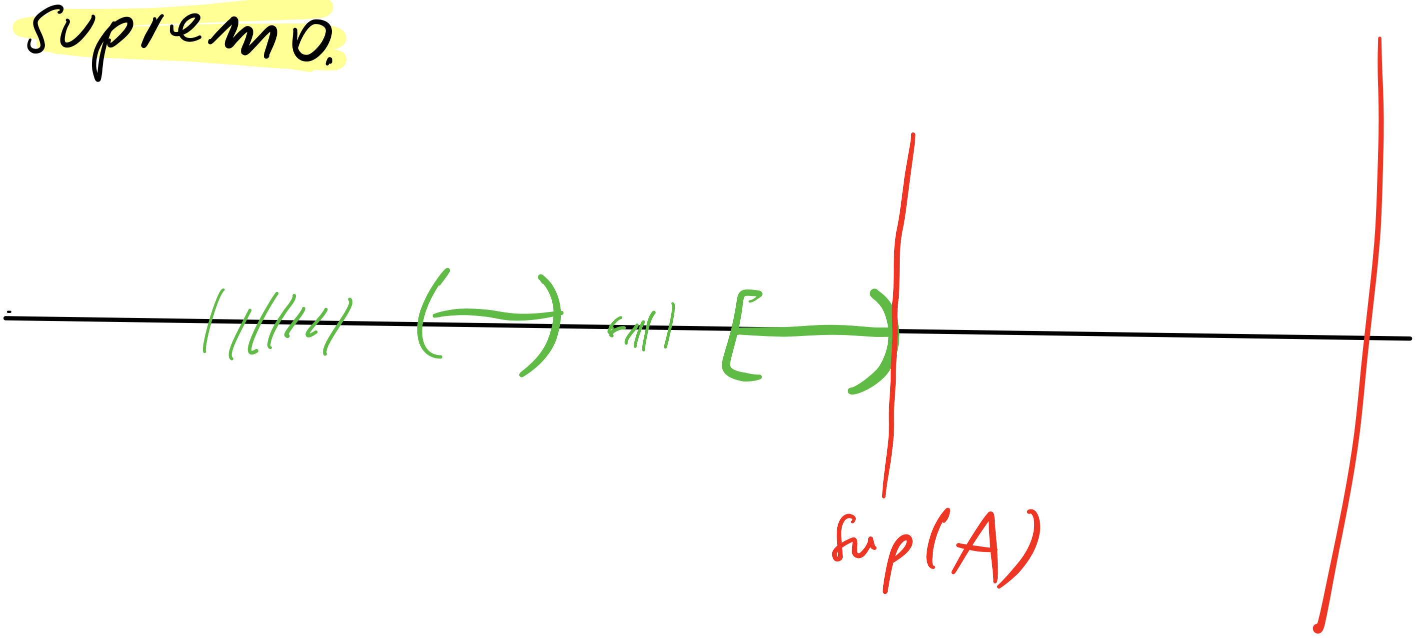


A tiene máximo 3 y supremo 3

Por otro lado A no tiene mínimo, pero tiene ínfimo -1.

Axioma de completitud

Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente tiene supremo.



También se cumple, y

puede deducirse del axioma de completitud, que:

Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo