Universidad de la República - Facultad de Ingenieria. -Tecnólogo Mecánico
Matemática 1 - Práctico1- Matrices.

1. Dadas las matrices
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,
$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.
Calcular cuando sea posible: $A.B$; $B.A$; $B.C$; $C.A$; $(A.D).E$; $A(D.E)$; $A.E+B$; $E.A+B$; C^2+B; $E.A+B$.

2. Escribir una matriz: $A \in M_{3x3}$ simétrica, $B \in M_{3x3}$ antisimétrica, $C \in M_{3x3}$ triangular superior, $D \in M_{3x3}$ triangullar inferior, $E \in M_{3x3}$ diagonal.

3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} a & a^2+2 & 5 \\ -3a^2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinar α para que la matriz A sea simétrica. Continuar trabajando con el valor de α hallado.
   (b) Calcular B^t, $A.B$, $(A.B)^t$, $B^t.A^t$.
   (c) Determinar $A^t.B^t$.
   (d) Determinar a para que la matriz C sea simétrica.

4. Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ escribir A^t y B^t.
   (a) Una matriz A se dice simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$. Probar que $B = A + A^t$es simétrica para toda $A \in Mnxn$.
   (b) Una matriz A se dice antisimétrica $\Leftrightarrow A^t = -A$. Probar que $C = A - A^t$es antisimétrica para toda $A \in Mnxn$.
   (c) ¿Hay alguna matriz simétrica y antisimétrica a la vez?
   (d) Probar que toda matriz A se puede escribir como la suma de una matriz simétrica más una antisimétrica.

5. Investigar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
   Demostrar en caso de que sea verdadera y proponer un contraejemplo en caso de ser falsa.
   (a) $(A+B)^2 = A.A + 2A.B + B.B$.
   (b) $(A+B)(A-B) = A.A - BB$.

5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ encontrar una matriz B_{2x2} no nula tal que el producto de $A.B$ resulte la matriz nula.

6. Una matriz cuadrada A se dice idempotente si $A.A = A$.

   (a) Probar que $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ es idempotente.

   (b) Probar que si $A.B = A$ y $BA = B$ entonces A y B son idempotentes.

   (c) Probar que si A es idempotente entonces $A^n = A$ para todo $n > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular la matriz inversa de A y resolver $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calcular la matriz inversa de A y resolver $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Calcular la matriz inversa de A.

   (b) Resolver $AX - 2I = B$.

9. Si A y B son dos matrices invertibles de $n \times n$ entonces $A.B$ e invertible y se cumple que $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

10. Investigar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta(en caso verdadera demostrar y en caso falsa dar un contraejemplo).

    (a) Si A es invertible $(A^{-1})^{-1} = A$.

    (b) Si A es invertible y $k \neq 0$ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$.

    (c) Si A es invertible entonces A^t es invertible y $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

    (d) Si A y B son dos matrices de $n \times n$ invertibles entonces $(A + B)$ es invertible.

    (e) Si $A^2 = 0$ entonces $I_n - A$ es invertible.