Introducción al Control Industrial

Solución Práctico 2

Transformada de Laplace y Transferencias

2025

1) Calcular la Transformada de Laplace:

Por tabla de Transformada de Laplace se obtienen los siguientes resultados

a) $L(\delta(t)) = 1$

b) $L(7,8) = \frac{7,8}{s}$

c) $L\left(16e^{-8t}\right) = \frac{16}{s+8}$

d) $L\left(18t^{2}\right) = \frac{18\cdot 6}{s^{3}} = \frac{108}{s^{3}}$

e) $L(120\ sen(25t)) = \frac{120\omega}{s^{2}+(25\omega)^{2}}$

f) $L(3.2\ cos(100t)) = \frac{3.2s}{s^{2}+(100\omega)^{2}}$

2) Calcular *f(t)* siendo *F(s)* su Transformada de Laplace:

Aplicando fracciones simples y/o tabla de Transformadas se obtienen los siguientes resultados

a) $L^{-1}\left(\frac{s+2}{2\left(s^{2}-1\right)}\right) = \frac{1}{4}\left(-\ e^{-t} + 3e^{t}\right)$

b) $L^{-1}\left(\frac{8}{s^{2}}\right) = 8t$

c) $L^{-1}\left(\frac{1}{s\left(s^{2}+1\right)}\right) = 1 - cos(t)$

d) $L^{-1}\left(\frac{25\omega}{\left(s^{2}+\omega^{2}\right)}\right) = 25\ sin(\omega t)$

e) $L^{-1}\left(\frac{250\omega}{\left((s+4)^{2}+\omega^{2}\right)}\right) = 250e^{-4t}sin(\omega t)$

f) $L^{-1}\left(\frac{e^{-4s}}{s^{3}}\right) = \frac{Y(t-4)\cdot(t-4)^{2}}{2}$

g) $L^{-1}\left(\frac{82}{s\cdot(5s+1)}\right) = 82\left(1 - e^{-t/5}\right)$

h) $L^{-1}\left(\frac{4\cdot(s+5)(s+7)}{s(s+3)(s+6)}\right) = \frac{1}{9}\left(70 - 32e^{-3t} - 2e^{-6t}\right)$

3) Resolver la siguientes ecuaciones diferenciales

a)Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$\left(s^{2}X(s) - sx(0) - x'(0)\right) + 5(sX(s) - x(0)) + 4X(s) = \frac{1}{s}$$
$$X(s)\left(s^{2} + 5s + 4\right) = \frac{1}{s} + x'(0) + x(0)(s + 5)$$

Despejando X, se obtiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s\left(s^2+5s+4\right)} + \frac{x'(0)+x(0)(s+5)}{s^2+5s+4} = \frac{1}{s\left(s^2+5s+4\right)} + \frac{3s+16}{s^2+5s+4}$$

Dado que todas las raíces del polinomio son reales, se procede a realizar fracciones simples. Hallando las raíces se obtiene: $\lambda_1 =- 1, \lambda_1 =- 4$

Volviendo a la ecuación: $X(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+4)} + \frac{3s+16}{(s+1)(s+4)}$

Realizando método fracciones simples en cada término:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1/3}{(s+1)} + \frac{-1/12}{(s+4)} + \frac{13/3}{(s+1)} + \frac{-4/3}{(s+4)}$$

Antitranformando: $x(t) = 1 + 4e^{-t} - \frac{17}{12}e^{-4t}$

b) $0.5x''(t) + 0.6x'(t) + 2.1x(t) = 5,$ con $x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$0.5\left(s^2X(s)\right) + 0.6(sX(s)) + 2.1X(s) = \frac{5}{s}$$

$$X(s)\left(0.5s^2 + 0.6s + 2.1\right) = \frac{5}{s}$$

Despejando X, se obtiene que:

$$X(s) = \frac{5}{s\left(0.5s^2+0.6s+2.1\right)} = \frac{10}{s\left(s^2+10s+4.2\right)}$$

Dado que todas las raíces del polinomio son reales, se procede a realizar fracciones simples. Hallando las raíces se obtiene: $\lambda_i = \frac{-25\pm\sqrt{130}}{5}$

Volviendo a la ecuación: $X(s) = \frac{10}{s\left(s+\lambda_1\right)\left(s+\lambda_2\right)}$

Realizando método fracciones simples en cada término:

$$X(s) = 10\left(\frac{\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}}{s} + \frac{\frac{-1}{\lambda_1\left(-\lambda_1+\lambda_2\right)}}{\left(s+\lambda_1\right)} + \frac{\frac{-1}{\lambda_2\left(\lambda_1-\lambda_2\right)}}{\left(s+\lambda_2\right)}\right)$$

Antitranformando: $x(t) = \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1(-\lambda_1+\lambda_2)}e^{-\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_2(\lambda_1-\lambda_2)}e^{-\lambda_2 t}$

c) Se tiene que: $x'(t) + ax(t) = u(t),$ con $x(0) = x_0,\ \ a > 0$

i) $u(t) = 0$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$sX(s) - x_o + aX(s) = 0$$
$$X(s)(s + a) = x_o$$

Despejando X, se obtiene que:

$X(s) = \frac{x_o}{(s+a)}$ Antitransformando $\rightarrow$ $L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = x_o e^{-at}$

ii) $u(t) = 1$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$sX(s) - x_o + aX(s) = \frac{1}{s}$$
$$X(s)(s + a) = \frac{1}{s} + x_o$$

Despejando X, se obtiene que:

$$X(s) = \frac{1}{s(s+a)} + \frac{x_o}{(s+a)} = \frac{1/a}{s} + \frac{-1/a}{s+a} + \frac{x_o}{s+a} = \frac{1/a}{s} + \frac{x_o-1/a}{s+a}$$

Antitransformando $\rightarrow$ $L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{a} + \left(x_0 - \frac{1}{a}\right)e^{-at}$

iii) $u(t) = cos(\omega_o t)$

Se procede a transformar la ecuación diferencial:

$$sX(s) - x_o + aX(s) = \frac{s}{s^2+\omega_o^2}$$
$$X(s)(s + a) = \frac{s}{s^2+\omega_o^2} + x_o$$

Despejando X, se obtiene que:

$$X(s) = \frac{x_o}{(s+a)} + \frac{s}{\left(s^2+\omega_o^2\right)(s+a)} = \frac{x_o}{s+a} + \frac{As+B}{s^2+\omega_o^2} + \frac{C}{s+a}$$

(Sugerencia: Al tener ecuaciones de 2do grado en el denominador se recomienda colocar polinomios generales de 1er grado, ya que el método de la 'tapadita' no es efectivo en estos casos)

$$A = \frac{a}{a^2+\omega_o^2} \qquad B = \frac{\omega_o^2}{a^2+\omega_o^2} \qquad C = \frac{-a}{a^2+\omega_o^2}$$

$$X(s) = \frac{x_o - \frac{a}{a^2+\omega_o^2}}{s+a} + \frac{a}{a^2+\omega_o^2}\cdot\frac{s+\frac{\omega_o^2}{a}}{s^2+\omega_o^2} = \frac{x_o - \frac{a}{a^2+\omega_o^2}}{s+a} + \frac{a}{a^2+\omega_o^2}\cdot\left[\frac{s}{s^2+\omega_o^2} + \frac{\omega_o}{a}\frac{\omega_o}{s^2+\omega_o^2}\right]$$

Antitransformando

$$\rightarrow \quad L^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \left(x_o - \frac{a}{a^2+\omega_o^2}\right)e^{-at} + \frac{a}{a^2+\omega_o^2}\left(cos(\omega_o t) + \frac{\omega_o}{a}sin\left(\omega_o t\right)\right)$$

4) Se transforma la ecuación y se despeja:

$$ms^2X(s) + bsX(s) + kX(s) = F(s)$$

$$X(s)(ms^2 + bs + k) = F(s)$$

$$\Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2+bs+k}$$

5) Se plantean las ecuaciones que rigen el sistema:

Malla:

$$v_i(t) = L\frac{di}{dt}(t) + Ri(t)$$

Ecuación resistencia:

$$v_o(t) = Ri(t)$$

Utilizando Laplace se resuelve la ecuación diferencial que surge de plantear la malla para obtener $i(t)$ y luego se obtiene $v_o(t)$ utilizando la segunda ecuación.

$$V_i(s) = Ls.I(s) + R.I(s)$$

$$\Rightarrow I(s) = V_i(s)\frac{1}{Ls+R}$$

Como v_i(t) es un escalón de amplitud E, $V_i(s) = \frac{E}{s}$

$\Rightarrow I(s) = \frac{E}{s(Ls+R)} = \frac{E}{L}\frac{1}{s(s+R/L)}$

Por fracciones simples:

$I(s) = \frac{E}{L}\frac{L}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right) = \frac{E}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+R/L}\right)$

Antitransformando:

$i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T}\right)$

Finalmente:

$v_o(t) = Ri(t) = E\left(1 - e^{-\frac{R}{L}T}\right)$

6)

a) $v_i = Ri + L\frac{di}{dt} + k_\varepsilon \omega \rightarrow$ Malla del circuito

$J\frac{d\omega}{dt} = k_\tau i - b\omega \rightarrow$ Segunda cardinal en el eje de los motores

$v_0 = K\omega \rightarrow$ Generador proporcional a la velocidad angular

b) Transformamos las ecuaciones y despejamos $\frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

$V_i(s) = RI(s) + LsI(s) + k_\varepsilon \omega(s)$

$Js\omega(s) = k_\tau I(s) - b\omega(s)$

$V_o(s) = K\omega(s)$

$\Rightarrow I(s) = \omega(s)(\frac{Js-b}{k_\tau})$

$\Rightarrow V_i(s) = (R + Ls)\omega(s)(\frac{Js-b}{k_\tau}) + k_\varepsilon \omega(s)$

$\Rightarrow \omega(s)\frac{1}{k_\tau}((R + Ls)(Js - b) + k_\varepsilon . k_\tau) = V_i(s)$

$\Rightarrow \omega(s) = V_i(s)\frac{k_\tau}{LJs^2 + (RJ - Lb)s - Rb + k_\varepsilon . k_\tau}$

$\Rightarrow V_o(s) = V_i(s)\frac{K.k_\tau}{LJs^2 + (RJ - Lb)s - Rb + k_\varepsilon . k_\tau}$

$\Rightarrow \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K.k_\tau}{LJs^2 + (RJ - Lb)s - Rb + k_\varepsilon . k_\tau}$

7)

Tanque: $\frac{dVol}{dt} = \frac{d(Ah)}{dt} = Ah' = q_{in} - q_{out} \rightarrow Ash(s) = q_{in}(s) - q_{out}(s)$

Circuito: $V_c(s) = V_{in}(s).\frac{1/Cs}{R+1/Cs} = V_{in}(s)\frac{1}{1+RCs}$

Válvula: $q_{out}(s) = V_{in}(s)K_V\frac{1}{1+RCs}$

$\Rightarrow Ash(s) = q_{in}(s) - V_{in}(s)\frac{K_V}{1+RCs} \Rightarrow h(s) = \frac{1}{As}q_{in}(s) - V_{in}(s)\frac{K_V}{As(1+RCs)}$

$\Rightarrow h(s) = [\frac{1}{As} \quad \frac{K_V}{As(1+RCs)}] . \; [q_{in}(s) \quad V_{in}(s)]$

Finalmente, la matriz de transferencia es:

$H(s) = [\frac{1}{As} \quad \frac{K_V}{As(1+RCs)}]$

8)

a) Asumiendo que x1 y x2 se miden desde el punto de equilibrio del sistema y que el mismo se da cuando los resortes están en su longitud natural, las ecuaciones de los carros son:

Carro 1: $M_2\ddot{x}_2 = k_2x_2 + k(x_1 - x_2) + b(\dot{x_1} - \dot{x_2})$

Carro 2: $M_1\ddot{x}_1 = k_1x_1 - k(x_1 - x_2) - b(\dot{x_1} - \dot{x_2})$

Finalmente, si pasamos dividiendo las masas, el modelo queda de la siguiente forma:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} & \frac{b}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{m_2} \end{bmatrix} f$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} f$$

b) Transformamos las ecuaciones de Newton y despejamos las transferencias:

$$\frac{X_2(s)}{F(s)} = \frac{1}{M_2s^2+bs+k_2+k-\frac{(bs+k)^2}{M_1s^2+bs+k_1+k}}$$

$$\frac{X_1(s)}{F(s)} = \frac{M_1s^2+bs+k_1+k}{bs+k}\frac{X_2(s)}{F(s)}$$

Finalmente, la matriz de transferencia queda:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} \frac{X_1(s)}{F(s)} & \frac{X_2(s)}{F(s)} \end{bmatrix} F(s)$$