Introducción al Control Industrial

Solución Práctico 1

Modelado de sistemas y linealización

2024

1) Modelado: Escriba las ecuaciones diferenciales que modelan los siguientes sistemas:

a)

Dado el circuito se deducen las siguientes ecuaciones:

Por ley de nodos: $\frac{vi-vo}{R1} = i_L + C \cdot vo' + \frac{vo}{R2}$ (1)

Ecuación de una inductancia es: $vo = L \cdot i_L'$ (2)

Derivando (1) y sustituyendo (2): $\frac{vi'-vo'}{R1} = \frac{vo}{L} + C \cdot vo'' + \frac{vo'}{R2}$ (3)

b)

Dada la sección del tanque 'S', el caudal de entrada 'u' y el caudal de salida 'y' se deduce la variación de volumen en el tanque como:

$$V' = (Sh)' = S \cdot h' \quad (1)$$
$$S \cdot h' = u - y = u - k\sqrt{h}$$

Lo que da: $$S \cdot h' = u - k\sqrt{h} \quad (2)$$

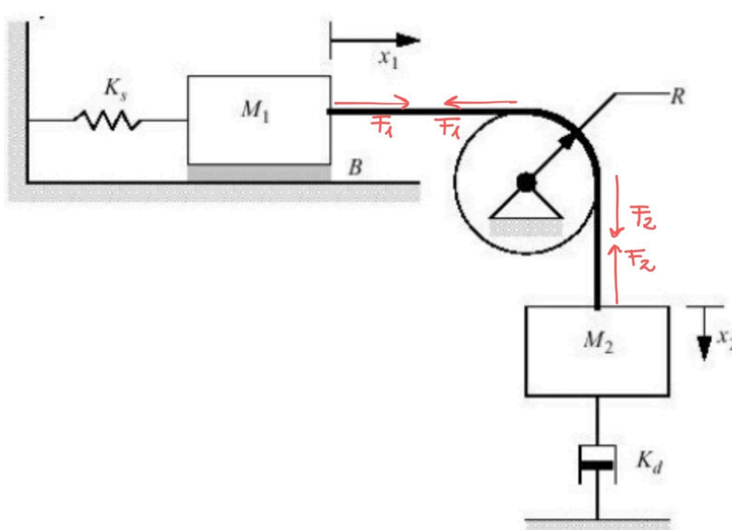
$$h' = \frac{1}{S}u - \frac{k}{S}\sqrt{h} \quad (3)$$

c)

Fuerza de elastica:
$F_s = K_s \cdot x_1$

Fuerza de rozamiento:
$f_B = B \cdot N_1 = B \cdot M_1 g$

Fuerza del amortiguador:
$F_d = K_d \cdot x_2'$



Peso masa 2: $P_2 = M_2 g$

Vínculo de vel. en la polea: $x_1' = x_2' = R\theta'$

2da cardinal en polea: $RF_2 - RF_1 = -J\theta''$ (1)

1er cardinal en M1: $F_1 - K_s x_1 + BM_1 g = M_1 x_1''$ (2)

1er cardinal en M2: $M_2 g - K_d x_2' - F_2 = M_2 x_2''$ (3)

Derivando el vínculo: $x_1'' = x_2'' = R\theta''$ (4)

(4) en (1): $(F_2 - F_1)R^2 = -Jx_1''$ (5)

(4) en (2)+(3): $F_1 - K_s x_1 + BM_1 g + M_2 g - K_d x_2' - F_2 = x_1''(M_1 + M_2)$ (6)

(5) en (6): $g(M_2 + BM_1) - K_s x_1 - K_d x_1' = x_1''(M_1 + M_2 + J/R^2)$

2)

a)

Ecuaciones de motor ideal:
$$T = k_\tau \cdot i_r(t)$$
$$\varepsilon = k_\varepsilon \cdot \omega(t)$$

Por Kirchhoff: $E - Ri_r - Li_r' - k_\varepsilon \cdot \omega(t) = 0$ (1)

Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:
$$J \cdot \theta'' = k_\tau \cdot i_r(t) - b\theta' - Cm(t) \quad (2)$$

b)

Para el modelo de variables se toma:
$$x(t) = \begin{pmatrix} i_r & \theta' \end{pmatrix} \qquad x'(t) = \begin{pmatrix} i_r' & \theta'' \end{pmatrix} \qquad u(t) = (E \ \ Cm(t))$$

Dado (2) $\theta'' = \frac{k_\tau}{J} i_r - \frac{b}{J}\theta' - \frac{Cm(t)}{J}$

Dado (1) $i' = -\frac{R}{L} i_r - \frac{k_\varepsilon}{L}\theta' + \frac{E}{L}$

Donde se deducen las matrices: $x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

3)

a)

Ecuaciones de motores ideales:

$$T_a = k_a \cdot i_a(t)$$
$$\varepsilon_a = k_a \cdot \omega(t)$$
$$T_b = k_b \cdot i_b(t)$$
$$\varepsilon_b = k_b \cdot \omega(t)$$

Dado que los ejes están unidos, la velocidad angular $\omega(t)$ es la misma para ambos motores M1 y M2.

Planteando Kirchhoff en las mallas de los motores:

$$V_a = R_a i_a + L_a i'_a + k_a \omega \qquad (1)$$
$$V_b = R_b i_b + L_b i'_b + k_b \omega \qquad (2)$$

Aplicando la 2da cardinal al eje del motor:

$$J \cdot \theta'' = k_a \cdot i_a + k_b \cdot i_b - b\theta' - C(t) \qquad (3)$$

b)

Para el modelo de variables se toma:

$$x(t) = \left(i_a \ i_b \ \theta'\right) \qquad x'(t) = \left(i_a' \ i_b' \ \theta''\right) \quad u(t) = \left(V_a \ V_b \ C(t)\right)$$

Dado (1) $\qquad i_a' = -\frac{R_a}{L_a} i_a - \frac{k_a}{L_a}\theta' + \frac{V_a}{L}$

Dado (2) $\qquad i_b' = -\frac{R_b}{L_b} i_b - \frac{k_b}{L_b}\theta' + \frac{V_b}{L_b}$

Dado (3) $\qquad \theta'' = \frac{k_a}{J} i_a + \frac{k_b}{J} i_b - \frac{b}{J}\theta' - \frac{C(t)}{J}$

Donde se deducen las matrices: $\quad x'(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)$

4)

a)

Para calcular los puntos de operación se anulan las derivadas y se sustituyen las variables por su punto de operación. En este caso:

$$h' = \frac{1}{S}u - \frac{k}{S}\sqrt{h} \rightarrow 0 = \frac{1}{s}u_0 - \frac{k}{s}\sqrt{h_0} \qquad , y_0 = k\sqrt{h_0}$$

Despejando:

$h_0 = \left(\frac{u_0}{k}\right)^2, \ y_0 = u_0$

Este resultado se interpreta como que en el punto de equilibrio el caudal que sale es el mismo que el que entra, lo cual tiene sentido en un punto de equilibrio, donde se mantiene el nivel del agua.

b)

Para la linealización, identificamos primero las funciones f y g que representan el sistema de la siguiente manera:

$$x'(t) = f[x(t), u(t)]$$
$$y(t) = g[x(t), u(t)]$$

En nuestro caso:

$$x = [h], \ y = [y], \ u = [u]$$
$$\Rightarrow f[x(t), u(t)] = \frac{1}{S}u - \frac{k}{S}\sqrt{h} \ , \ g[x(t), u(t)] = k\sqrt{h}$$

Para la linealización se define: $\hat{h} = h - h_0 = h - \left(\frac{u_0}{k}\right)^2$ (1)

$\hat{u} = u - u_0$

Linealizando: $\frac{\delta f}{dh}(u_0) = \frac{-k^2}{2Su_0}$ $\frac{\delta f}{du}(u_0) = \frac{1}{S}$

$\frac{\delta g}{dh}(u_0) = \frac{k^2}{2u_0}$

Se obtiene el modelo linealizado para pequeñas aportaciones respecto de u_0:

$$\hat{h}' = \frac{-k^2}{2Su_0} \cdot \hat{h} + \frac{1}{S} \cdot \hat{u}$$
$$\hat{y} = \frac{k^2}{2u_0} \cdot \hat{h}$$

c)

El punto de operación al que trabaja el sistema es: $h = h_0$ (1)

Derivando (3) se tiene que: $h' = 0$

Dado que u se mantiene constante: $u' = 0$ (4)

Por (1) y (4) se tiene que el punto de operación al que trabaja $u_0 = k\sqrt{h_0}$

De donde se obtiene a su vez el punto de operación de la salida $y_0 = k\sqrt{h_0}$

Para la linealización se define: $\hat{h} = h - h_0$

$$\hat{u} = u - k\sqrt{h_0}$$

Tomando: $f[x(t), u(t)] = \frac{1}{S}u - \frac{k}{S}\sqrt{h}$

$$g[x(t), u(t)] = k\sqrt{h}$$

Linealizando: $\frac{\delta f}{dh}(h_0) = \frac{-k}{2S\sqrt{h_0}}$ $\qquad$ $\frac{\delta f}{du}(h_0) = \frac{1}{S}$

$$\frac{\delta g}{dh}(h_0) = \frac{k}{2\sqrt{h_0}}$$

Se obtiene el modelo linealizado para pequeñas aportaciones respecto de u_0:

$$\hat{h}' = \frac{-k}{2S\sqrt{h_0}} \cdot \hat{h} + \frac{1}{S} \cdot \hat{u}$$

$$\hat{y} = \frac{k}{2\sqrt{h_0}} \cdot \hat{h}$$

5)

a)

$my'' = -k(y - u - l) - b(y' - u') - mg = - k(y - u) - b(y' - u') + kl - mg$

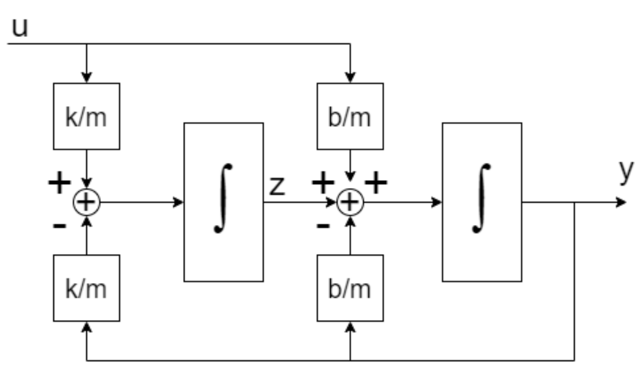
$\Rightarrow my'' = -k(y - u) - b(y' - u')$

$\Rightarrow my'' + by' + ky = ku + bu'$

Se puede verificar los signos haciendo el ejercicio mental de pensar hacia qué dirección sería la fuerza elástica (o del amortiguador) en caso de que ocurriera alguna variación en u o y.

b) Para realizar el diagrama de bloques, como solo podemos utilizar integradores, multiplicadores por constantes y sumadores, nos sirve expresar la ecuación diferencial de la siguiente manera:

$$my'' = -k(y - u) - b(y' - u') \Rightarrow y = -\frac{k}{m}\int\int(y - u) - \frac{b}{m}\int(y - u)$$



Se puede verificar mediante la linealidad de las integrales que dicho diagrama de bloques representa la ecuación del sistema.

c) La representación por variables de estado de este sistema, principalmente la elección de las variables de estado, no es trivial. La principal dificultad se debe a que en la ecuación diferencial del sistema aparece la derivada de la entrada, la cual no puede ser elegida como una entrada independiente. Por lo tanto, se define la salida del primer integrador como la variable z. Esta variable es útil ya que podemos hallar fácilmente su derivada, la cual es lo que está en la entrada del primer integrador.
Por lo tanto, se tienen las siguientes ecuaciones:

$z' = -\frac{k}{m}(u - y)$ (La salida del sumador es la entrada del integrador)

$y' = -\frac{b}{m}(u - y) + z$ (Análogo pero viendo el segundo integrador)

Finalmente:

x = [z, y], u = [u], y = [y]

$$\begin{bmatrix} z' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{k}{m} \\ 1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{k}{m} \\ \frac{b}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u$$