# Una incursión a la confiabilidad uniforme

Coloquio mensual del IMERL.
Facultad de Ingeniería. Universidad de la República.

Pablo Romero

Martes 27 de agosto de 2024. Montevideo, Uruguay.

# Contexto Histórico

## Publicaciones

- 1954: Tutte [12] da nacimiento al polinomio que lleva su nombre en el artículo titulado "*A contribution to the theory of chromatic polynomials*".
- 1956: Moore y Shannon [8] publican el artículo titulado "*Reliable Circuits using Less reliable relays*".
- 1986: Boesch [3] publica el artículo titulado "*On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis*".
- 2023: Kahl y Luttrell [7] publican el artículo titulado "*On maximum graphs in Tutte polynomial posets*".

# Confiabilidad de un grafo

Dados dos enteros positivos $n$ y $m$ tales que $n-1 \leq m \leq \binom{n}{2}$, denotaremos mediante $\mathcal{C}_{n,m}$ a la clase de grafos simples y conexos con $n$ vértices y $m$ aristas.

**Definición 1.**

*Para cada número real $p$ en $[0,1]$ y cada grafo $G$ en $\mathcal{C}_{n,m}$,* ***la confiabilidad de G evaluada en p*** *es la probabilidad de que el subgrafo aleatorio resultante de eliminar a cada una de las aristas de $G$ en forma independiente y con probabilidad $1-p$ sea conexo.*

Si denotamos $R_G(p)$ a la confiabilidad de $G$ evaluada en $p$ y para cada $i \in \{0,1,\ldots,m\}$ denotamos $N_i(G)$ la cantidad de subgrafos recubridores conexos de $G$ con exactamente $i$ aristas, entonces:

$$R_G(p) = \sum_{i=n-1}^{m} N_i(G)p^i(1-p)^{m-i}.$$

# Confiabilidad uniforme

**Definición 2 (Grafo uniformemente más confiable [3]).**

*Sea $G$ un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$. Diremos que **$G$ es un grafo uniformemente más confiable** si para cada grafo $H$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ y cada número real $p$ en $[0,1]$ se cumple que $R_G(p) \geq R_H(p)$.*

**Definición 3 (Grafo fuerte).**

*Sea $G$ en $\mathcal{C}_{n,m}$. Diremos que **el grafo $G$ es fuerte** si para cada entero $i$ en $\{n-1, n, \ldots, m\}$ y cada grafo $H$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ se tiene que $N_i(G) \geq N_i(H)$.*

**Observación:**

Todo grafo fuerte en $\mathcal{C}_{n,m}$ es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{n,m}$.

# Ejemplo: estudio de existencia en la clase $\mathcal{C}_{4,4}$

La clase $\mathcal{C}_{4,4}$ consiste únicamente en los grafos $C_4$ y $H$. Observemos que $N_3(C_4) = 4$ y $N_4(C_4) = 1$, mientras que $N_3(H) = 3$ y $N_4(H) = 4$, por lo que

$$R_{C_4}(p) = 4p^3(1-p) + p^4.$$

$$R_H(p) = 3p^3(1-p) + p^4.$$

Como $R_{C_4}(p) \geq R_H(p)$ para todo $p$ en $[0,1]$, $C_4$ es uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{4,4}$. En este caso tenemos además que $C_4$ es fuerte en $\mathcal{C}_{4,4}$.

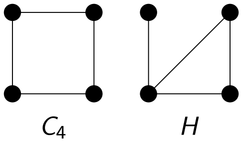


**Figura:** Grafos $C_4$ y $H$.

# Lema de comparación

**Definición 4 (Comparación en entornos de 0 y 1).**

*Sean $G$ y $H$ en $\mathcal{C}_{n,m}$. Decimos que* ***el grafo G es más confiable que el grafo H en un entorno de $p = 0$ (resp. $p = 1$)*** *si existe algún número real positivo $\delta$ tal que para todo $p \in (0, \delta)$ (resp. $p \in (1 - \delta, 1)$) se cumple que $R_G(p) > R_H(p)$.*

**Lema 1 (Brown y Cox [4]).**

*Sean $G$ y $H$ dos grafos en $\mathcal{C}_{n,m}$.*

1. *Si existe $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ tal que $N_k(G) = N_k(H)$ para todo $k \in \{i+1, i+2, \ldots, m\}$ y $N_i(G) > N_i(H)$, entonces $G$ es más confiable que $H$ en un entorno de $p = 1$.*
2. *Si existe $j \in \{0, 1, \ldots, m\}$ tal que $N_k(G) = N_k(H)$ para todo $k \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$ y $N_j(G) > N_j(H)$, entonces $G$ es más confiable que $H$ en un entorno de $p = 0$.*

# Número de árboles recubridores

Sea $G$ un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$. Observemos que $N_{n-1}(G)$ es la cantidad de árboles recubridores de $G$. Denotemos $t(G) = N_{n-1}(G)$.

**Definición 5.**

*Sea $G$ un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$. Diremos que **el grafo** $G$ **es** $t$**-óptimo** si para todo grafo $H$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ se cumple que $t(G) \geq t(H)$.*

**Observación:**

Todo grafo uniformemente más confiable es $t$-óptimo.

# Conjeturas de Boesch

## Conjeturas de Boesch [3]

1. En cada clase no vacía $\mathcal{C}_{n,m}$ existe algún grafo uniformemente más confiable.
2. Todo grafo $t$-óptimo tiene diámetro mínimo.
3. Todo grafo $t$-óptimo tiene cintura máxima.
4. Todo grafo multipartito completo casi-regular es $t$-óptimo.
5. Todo grafo uniformemente más confiable es fuerte.

# Conjetura 1: Falsa [9]

En $\mathcal{C}_{6,11}$ hay exactamente 12 grafos. El único que maximiza $N_6(G)$ en $\mathcal{C}_{6,11}$ es $G_1$, por lo que $G_1$ es $t$-óptimo. Por el Lema 1, $G_1$ es el grafo más confiable en $\mathcal{C}_{6,11}$ en un entorno de $p = 0$. Sin embargo, el grafo $H_1$ cumple que $N_8(G_1) = N_8(H_1) = \binom{11}{8} - 2$ mientras que $N_7(H_1) = N_7(G_1) + 1 > N_7(G_1)$. Por el Lema 1, $H_1$ es más confiable que $G_1$ en un entorno de $p = 1$. Luego no existe grafo uniformemente más confiable en $\mathcal{C}_{6,11}$.

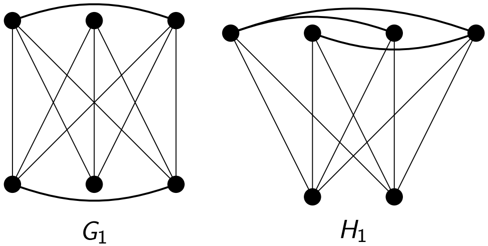


**Figura:** Grafos $G_1$ y $H_1$.

# Conjetura 2: Falsa [1]

El grafo uniformemente más confiable dentro de la clase $\mathcal{C}_{6,8}$ es $G_2$ que tiene diámetro 3. Por lo tanto, $G_2$ es $t$-óptimo. Sin embargo, el grafo $H_2$ pertenece a la clase $\mathcal{C}_{6,8}$ y tiene diámetro 2.

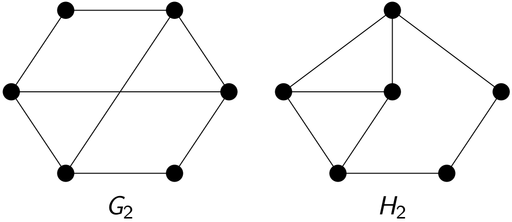


**Figura:** Grafos $G_2$ y $H_2$.

# Conjetura 3: Falsa [11, 7]

El grafo uniformemente más confiable dentro de la clase $\mathcal{C}_{7,11}$ es $G_3$ que tiene cintura 3, mientras que el grafo $H_3$ no es uniformemente más confiable y tiene cintura 4.

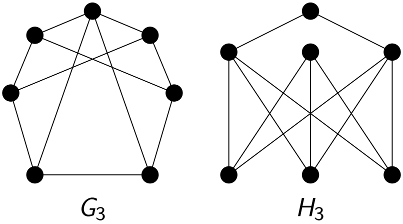


**Figura:** Grafos $G_3$ y $H_3$.

# Conjetura 4 - Paso 1: Cálculo de $tr(L(G)^k)$

Sea $L(G)$ la matriz de Laplace asociada a un grafo simple $G$ y $L_G(x)$ su polinomio característico.

**Lema 2 (Biggs [2]).**

*Si $G$ es un grafo simple con $n$ vértices entonces $t(\overline{G}) = n^{-2} L_G(n)$.*

Sea $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ la secuencia de grados de $G$. Entonces:

$$tr(L(G)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} d_i(1+d_i)^0,$$

$$tr(L(G)^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} d_i(1+d_i)^1$$

$$tr(L(G)^3) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^3 = \sum_{i=1}^{n} d_i(1+d_i)^2 + 2\nu(G),$$

donde $\nu(G)$ es la cantidad de subgrafos $P_3$ inducidos en $G$.

# Conjetura 4 - Paso 2: Acotación de $tr(L(G)^k)$

**Lema 3.**

*Un grafo simple $G$ verifica $\nu(G) = 0$ si y sólo si es unión de grafos completos.*

**Prueba.** Es claro que si $G$ es unión de grafo completos entonces $\nu(G) = 0$. Si $G$ no es unión de completos entonces existen dos vértices $v$ y $w$ dentro de una misma componente conexa de $G$ tales que $d(v, w) = k \geq 2$. Tomemos un camino de longitud mínima $v, v_1, v_2, \ldots, v_k = w$. Como $v$ no es adyacente a $v_2$, la terna de vértices $\{v, v_1, v_2\}$ induce un subgrafo $P_3$ y $\nu(G) > 0$. ■

**Lema 4 (Petingi y Rodríguez [10]).**

*Para todo grafo simple $G$ con secuencia de grados $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ y todo $k \in \mathbb{Z}^+$ se cumple que $tr(L(G)^k) \geq \sum_{i=1}^{n} d_i(1 + d_i)^{k-1}$. La igualdad ocurre si y sólo si $G$ es unión de grafos completos.*

# Conjetura 4 - Paso 3: Acotación de $L_G(x)$

**Teorema 1.**

*En todo grafo simple $G$ con secuencia de grados $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ tal que $\overline{G}$ es conexo se cumple para todo $x \geq n$ que*

$$L_G(x) \leq x^n e^{-2\nu(G)/(3x^3)} \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1+d_i}{x}\right)^{d_i/(1+d_i)} .$$

*Además, la igualdad ocurre si y sólo si $G$ es unión de grafos completos.*

# Conjetura 4 - Paso 3: Acotación de $L_G(x)$

**Prueba.**

$$-\ln\left(\frac{L_G(x)}{x^n}\right) = -\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{\lambda_i}{x})\right) = \sum_{i=1}^{n} -\ln\left(1-\frac{\lambda_i}{x}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda_i^k}{kx^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{tr(L(G)^k)}{kx^k} \geq \frac{2\nu(G)}{3x^3} + \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{d_i(1+d_i)^{k-1}}{kx^k}$$

$$= \frac{2\nu(G)}{3x^3} + \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{1+d_i}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1+d_i)^k}{kx^k}$$

$$= \frac{2\nu(G)}{3x^3} - \sum_{i=1}^{n}\frac{d_i}{1+d_i}\ln\left(1-\frac{d_i+1}{x}\right)$$

$$= \frac{2\nu(G)}{3x^3} - \ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-\frac{1+d_i}{x})^{d_i/(1+d_i)}\right),$$

donde se utiliza el Lema 4 en la primera desigualdad. ∎

# Conjetura 4 - Paso 4: Dominación en casi-regulares

**Definición 6.**

*Decimos que una tupla de enteros* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *es justa si todo par de entradas* $x_i$ *y* $x_j$ *cumplen que* $|x_i - x_j| \leq 1$.

**Lema 5 (Petingi y Rodríguez [10]).**

*La función* $f(d_1, d_2, \ldots, d_n, x) = \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1+d_i}{x}\right)^{d_i/(1+d_i)}$ *sujeta a que* $d_1 + d_2 + \ldots + d_n = 2m$ *se maximiza para todo* $x \geq n$ *precisamente cuando* $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *es justa.*

# Conjetura 4 - Paso 5: Demostración

**Teorema 2 (Petingi y Rodríguez [10]).**

*Todo grafo multipartito completo casi-regular es t-óptimo.*

**Prueba.** Sean $a$, $r$ y $s$ enteros no negativos tales que $a \geq 1$ y sea $G = rK_a \cup sK_{a+1}$. Probemos que $\overline{G}$ es $t$-óptimo. Sea $H$ otro grafo con la misma cantidad de vértices y aristas que $G$. Sean $\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$ las secuencias de grados de $G$ y $H$. Aplicando el Lema 2 seguido del Teorema 1, tenemos que:

$$t(\overline{H}) = n^{-2}L_H(n) \leq n^{n-2}e^{-2\nu(H)/(3n^3)}f(\mathbf{d}', n) \leq n^{n-2}f(\mathbf{d}, n) = t(\overline{G}),$$

por lo que $t(\overline{H}) \leq t(\overline{G})$. Por los Lemas 3 y 5, la igualdad ocurre si y sólo si $\nu(H) = 0$ y $\mathbf{d}'$ es justa, es decir, $H$ es un grafo casi-regular que es unión de completos. Esto es que $H \simeq G$. ∎

# Polinomio de Tutte

## Definición 7 (Tutte [12]).

*Sea $G$ un pseudografo y $\mathcal{S}(G)$ el conjunto que consiste en todos los subgrafos recubridores de $G$. El polinomio de Tutte de $G$ se denota $T_G(x, y)$ y se define de la siguiente manera:*

$$T_G(x, y) = \sum_{H \in \mathcal{S}(G)} (x-1)^{\kappa(H)-\kappa(G)}(y-1)^{c(H)},$$

*donde $\kappa(H)$ denota la cantidad de componentes conexas de $H$ y $c(H)$ es el corango de $H$ que vale $|E(H)| - |V(H)| + \kappa(H)$.*

# Invariante de Tutte-Grothendieck (T-G)

## Definición 8.

*Dados dos pseudografos $G$ y $H$ tales que $v \in V(G)$ y $w \in V(H)$, denotamos $G_v \cdot H_w$ el grafo que se obtiene de $G \cup H$ tras identificar a los vértices $v$ y $w$.*

## Definición 9 ( [6]).

*Sea $\mathcal{G}$ una clase de pseudografos cerrada bajo contracciones y sustracciones de aristas tal que $K_1 \in \mathcal{G}$ y sea $R$ un anillo conmutativo con unidad. Un invariante de grafos $f : \mathcal{G} \to R$ es de T-G si $f(K_1) = 1$, existen elementos $a, b \in R$ tales que para cada grafo $G$ de $\mathcal{G}$ y cada arista ordinaria $e$ de $G$ se tiene que $f(G) = af(G - e) + bf(G * e)$ y además para cada $G, H \in \mathcal{G}$ tal que $G \cup H \in \mathcal{G}$ (o $G_v \cdot H_w \in \mathcal{G}$) se cumple que $f(G \cup H) = f(G)f(H)$ (respectivamente, $f(G_v \cdot H_w) = f(G)f(H)$).*

# Teorema Receta

Sea $L$ el pseudografo que consiste en un único vértice con un lazo y $P_n$ el camino simple de $n$ vértices.

**Teorema 3 ( [5]).**

*Si $\mathcal{G}$ es un conjunto de pseudografos cerrado bajo contracciones y sustracciones de aristas que incluye $P_2$ y $L$, $R$ es un anillo conmutativo con unidad y $a, b, x_0, y_0 \in R$ tales que tanto $a$ como $b$ tienen inversa, entonces existe un único invariante de T-G $f : \mathcal{G} \to R$ tal que $f(P_2) = x_0$ y $f(L) = y_0$. Además,*

$$f(G) = a^{c(G)} b^{r(G)} T_G(b^{-1}x_0, a^{-1}y_0),$$

*siendo $r(G) = |V(G)| - \kappa(G)$ el rango de $G$ y $c(H) = |E(G)| - |V(G)| + \kappa(G)$ el corango de $G$.*

# Ejemplos: confiabilidad y número de árboles

## Ejemplo 1.

*El número de árboles satisface que* $t(K_1) = 1$, $t(L) = t(P_2) = 1$ *y* $t(G) = t(G - e) + t(G * e)$. *Aplicando el Teorema receta con* $x_0 = y_0 = a = b = 1$ *obtenemos que* $t(G) = T_G(1, 1)$.

## Ejemplo 2.

*La confiabilidad satisface que* $R_{K_1}(p) = 1$, $R_L(p) = 1$, $R_{P_2}(p) = p$ *y* $R_G(p) = (1 - p)R_{G-e}(p) + pR_{G*e}(p)$. *Sea* $G$ *un grafo cualquiera en* $\mathcal{C}_{n,m}$. *Aplicando el Teorema Receta al grafo* $G$ *con* $x_0 = p$, $y_0 = 1$, $a = 1 - p$ *y* $b = p$ *obtenemos que*

$$R_G(p) = (1-p)^{n-1} p^{m-n+1} T_G\left(1, \frac{1}{1-p}\right).$$

# Otro ejemplo: polinomio cromático

## Ejemplo 3.

*El polinomio cromático satisface que* $\chi_{K_1}(\lambda) = \lambda$*. Considerando el polinomio auxiliar* $P_G(\lambda) = \chi_G(\lambda)/\lambda^{\kappa(G)}$ *sí tenemos que* $\chi_{K_1}(\lambda) = 1$*. Además el polinomio cromático cumple que* $\chi_G(\lambda) = \chi_{G-e}(\lambda) - \chi_{G*e}(\lambda)$*, y si* $e$ *no es arista puente deducimos que* $P_G(\lambda) = P_{G-e}(\lambda) - P_{G*e}(\lambda)$*. Además,* $P_{P_2}(\lambda) = \lambda - 1$ *y* $P_L(\lambda) = 0$*. Aplicando el Teorema Receta para* $G \in \mathcal{C}_{n,m}$ *con el invariante* $P$ *usando* $x_0 = \lambda - 1$*,* $y_0 = 0$*,* $a = 1$ *y* $b = -1$ *obtenemos que* $P_G(\lambda) = (-1)^{n-1} T_G(1-\lambda, 0)$*, y por lo tanto,*

$$\chi_G(\lambda) = (-1)^{n-1} \lambda T_G(1-\lambda, 0).$$

## Observación

El teorema de los 4 colores se reduce a probar que todo grafo plano $G$ cumple que $T_G(-3, 0) \neq 0$.

# Grafo Tutte-máximo

**Definición 10 (Kahl y Luttrell [7]).**

*Un grafo $G$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ es Tutte-máximo (T-M) si para cada grafo $H$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ existe un polinomio $P_H(x,y)$ con coeficientes no negativos tal que $T_G(x,y) - T_H(x,y) = (x+y-xy)P_H(x,y)$.*

**Proposición 1.**

*Todo grafo Tutte-máximo es uniformemente más confiable.*

**Prueba.** Sea $G$ un grafo T-M en $\mathcal{C}_{n,m}$, $H \in \mathcal{C}_{n,m}$ y $p \in (0,1)$. Como $G$ es T-M, $T_G(x,y) - T_H(x,y) = (x+y-xy)P_H(x,y)$, donde todos los coeficientes de $P_H(x,y)$ son no negativos. Evaluando en $x=1$, $y=1/(1-p)$ y usando el Teorema Receta:

$$T_G(1,1/(1-p)) - T_H(1,1/(1-p))$$
$$= (1-p)^{-n}p^{-m+n-1}P_H(1,1/(1-p)) \geq 0. \quad \square$$

# Maximización de invariantes

**Proposición 2 ( [5]).**

*Si G es un grafo Tutte-maximo entonces maximiza simultáneamente todos los siguientes invariantes:*

- *El número de árboles recubridores* $T_G(1,1)$.
- *El número de bosques recubridores* $T_G(2,1)$.
- *El número de subgrafos conexos recubridores* $T_G(1,2)$.
- *El número de orientaciones acíclicas* $T_G(2,0)$.

**Prueba.** Notar que $x+y-xy = 1-(1-x)(1-y)$. Si $G$ es Tutte-máximo en $\mathcal{C}_{n,m}$ y $H \in \mathcal{C}_{n,m}$ entonces, para cualesquiera $x_0 \geq 0$ e $y_0 \geq 0$ tales que $1-(1-x_0)(1-y_0) \geq 0$ se tiene que $T_G(x_0,y_0) - T_H(x_0,y_0) = (1-(1-x_0)(1-y_0))P_H(x_0,y_0) \geq 0$. ■

# Existencia de grafos Tutte-máximos en $\mathcal{C}_{n,n}$

Definamos $G_1 \sim G_2$ si $T_G(x,y) = T_H(x,y)$. La relación $\sim$ es de equivalencia en $\mathcal{C}_{n,m}$. Tomando el conjunto cociente $\mathcal{C}_{n,m}$ se consigue que $\preceq$ es una relación de orden parcial en $\mathcal{C}_{n,m}$.

**Teorema 4 (Kahl y Luttrell [7]).**

*Sean $H_1$ y $H_2$ dos bloques de $H$ tales que $v$ es un vértice común de $H_1$ y $H_2$, y sean $uv \in E(H_1)$ y $vw \in E(H_2)$. Definamos $G = H - uv + uw$. Entonces $H \preceq G$ y si además $H_1 \neq K_2$ o $H_2 \neq K_2$ entonces $H \prec G$.*

**Teorema 5 (Kahl y Luttrell [7]).**

*En la clase $\mathcal{C}_{n,n}$, la relación $\prec$ es el siguiente orden total: $C_3 \cdot (n-3)K_2 \prec C_4 \cdot (n-4)K_2 \ldots \prec C_{n-1} \cdot K_2 \prec C_n$, por lo que $C_n$ es Tutte-máximo en $\mathcal{C}_{n,n}$.*

# Existencia de grafos Tutte-máximos en $\mathcal{C}_{n,n+1}$

**Lema 6 (Kahl y Luttrell [7]).**

*Si un grafo $H$ tiene dos caminos inducidos $P_a$ y $P_b$ paralelos con los mismos extremos tales que $a > b + 1$, entonces el grafo $G$ que se obtiene de $H$ reemplazando $P_a$ por $P_{a-1}$ y $P_b$ por $P_{b+1}$ cumple que $H \prec G$.*

**Definición 11.**

*El grafo $\theta_{a,b,c}$ consiste en tres caminos internamente disjuntos de largos $a$, $b$ y $c$ que tienen los mismos extremos. Denotamos $\theta_n$ al grafo $\theta_{a,b,c}$ con $a = \lfloor (n+1)/3 \rfloor$, $b = \lceil (n+1)/3 \rceil$ y $c = n + 1 - a - b$.*

**Teorema 6 (Kahl y Luttrell [7]).**

*El único grafo Tutte-máximo en $\mathcal{C}_{n,n+1}$ es $\theta_n$.*

# Generalización de la confiabilidad

## Definición 12.

*Sea $G$ un grafo en $\mathcal{C}_{n,m}$ y sea $s$ un entero positivo. La* ***s-confiabilidad de G en p*** *es la probabilidad de que el subgrafo aleatorio resultante tenga no más que $s$ componentes conexas, donde cada arista de $G$ falla independientemente con idéntica probabilidad $1 - p$.*

Para cada entero positivo $s$ definimos $N_i^{(s)}(G)$ como la cantidad de subgrafos recubridores de $G$ con exactamente $i$ aristas que tienen $s$ componentes conexas o menos. Si denotamos $R_G^{(s)}(p)$ a la $s$-confiabilidad de $G$ en $p$, entonces

$$R_G^{(s)}(p) = \sum_{i=0}^{m} N_i^{(s)}(G) p^i (1-p)^{m-i}.$$

# Maximización de la confiabilidad generalizada

**Lema 7.**

*Para cada grafo $G$ en $\mathcal{C}_{n,m}$ y enteros $i$ en $\{0,1,\ldots,m\}$ y $k \in \mathbb{Z}^+$,*

$$N_i^{(s)}(G) = \sum_{j=\max\{1,n-i\}}^{s} \frac{1}{(j-1)!(i-n+j)!} \frac{\partial T_G}{\partial x^{j-1} \partial y^{i-n+j}}(1,1).$$

**Lema 8.**

*Sean $G$ y $H$ dos grafos en $\mathcal{C}_{n,m}$. Si $H \preceq G$ entonces $N_i^{(s)}(H) \leq N_i^{(s)}(G)$ para cada $s \in \mathbb{Z}^+$ y cada $i \in \{0,1,\ldots,m\}$.*

**Teorema 7.**

*Todo grafo Tutte-máximo es uniformemente s-confiable.*

# Algunos problemas abiertos

## Algunos problemas abiertos

1. Probar o refutar: todo grafo uniformemente más confiable es fuerte.
2. Decidir en cada clase no vacía $\mathcal{C}_{n,m}$ si existe o no existe grafo uniformemente más (menos) confiable.
3. Ídem si asumimos fallas en vértices en lugar de aristas.
4. Hallar todos los grafos $t$-óptimos de cada clase $\mathcal{C}_{n,m}$.
5. Probar o refutar: en cada clase no vacía $\mathcal{C}_{n,n+3}$ existe algún grafo que es Tutte-máximo.
6. Probar o refutar: todo grafo multipartito completo regular es Tutte-máximo.

# Referencias I

Y. Ath and M. Sobel.
Counterexamples to conjectures for uniformly optimally reliable networks.
*Probability in the Engineering and Informational Sciences.*, 14(3):173–177, 2000.

N. Biggs.
*Algebraic graph theory*.
Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, 1993.

F. Boesch.
On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis.
*Journal of Graph Theory*, 10(3):339–352, 1986.

# Referencias II

J. I. Brown and D. Cox.
Nonexistence of optimal graphs for all terminal reliability.
*Networks*, 63(2):146–153, 2014.

J. Ellis-Monaghan and I. Moffatt.
*Handbook of the Tutte Polynomial and Related Topics*.
CRC Press, 2022.

J. A. Ellis-Monaghan and C. Merino.
*Graph Polynomials and Their Applications I: The Tutte Polynomial*, pages 219–255.
Birkhäuser Boston, Boston, 2011.

N. Kahl and K. Luttrell.
On maximum graphs in Tutte polynomial posets.
*Discrete Applied Mathematics*, 339:78–88, 2023.

# Referencias III

E. Moore and C. Shannon.
Reliable circuits using less reliable relays.
*Journal of the Franklin Institute*, 262(3):191–208, 1956.

W. Myrvold, K. H. Cheung, L. B. Page, and J. E. Perry.
Uniformly-most reliable networks do not always exist.
*Networks*, 21(4):417–419, 1991.

L. Petingi and J. Rodríguez.
A new technique for the characterization of graphs with a maximum number of spanning trees.
*Discrete Mathematics*, 244(1):351 – 373, 2002.

N. Rosenstock and E. A. Canale.
Counterexample to a Boesch's Conjecture, 2022.

# Referencias IV

W. T. Tutte.
A contribution to the theory of chromatic polynomials.
*Canadian Journal of Mathematics*, 6:80–91, 1954.