FACULTAD DE INGENIERÍA

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY

El problema de Fekete

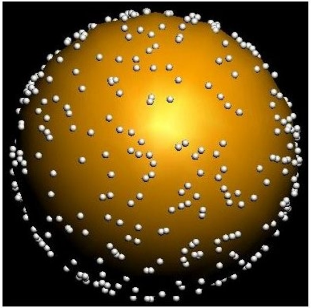
(o de cómo distribuir puntos en la esfera)

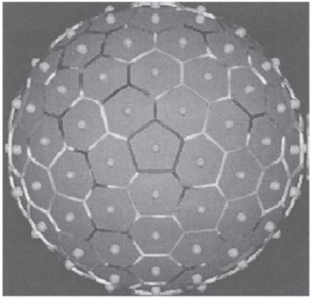
Marcelo Fiori

Coloquio del IMERL
25 de junio, 2024

Introducción

¿Cómo distribuir muchos puntos de manera "uniforme" sobre la superficie de la esfera?



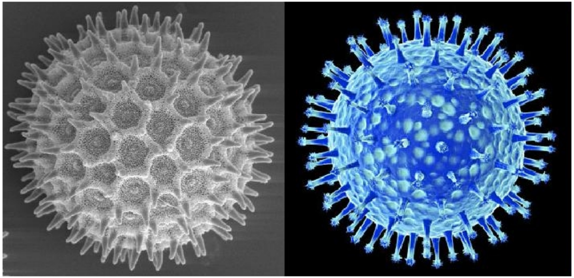


Distintas variantes de problemas en este marco

Biología

Problema: [Tammes (1930)]

Maximizar la distancia mínima entre N puntos sobre la esfera.



Ipomoea purpurea - Virus de la gripe

Tammes (botánico) observa esta propiedad en los poros de un grano de polen.

Problema de Tammes [best-packing problem]

Problema:

¿Cuál es el mayor diámetro de N círculos iguales que se pueden colocar sin solaparse?

Problema de Tammes [best-packing problem]

Si llamamos $d_{sep}(\omega_N) = \min_{i \neq j} ||x_i - x_j||$

Problema: (Tammes)

$$\underset{\omega_N}{\operatorname{argmax}}\, d_{sep}(\omega_N)$$

Física

Problema: (Thomson (1904))

¿Cómo se distribuyen sobre la esfera N electrones bajo la acción de fuerzas de Coulomb?

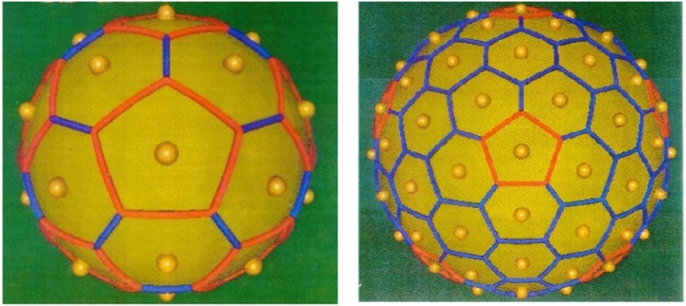


Figura: 32 y 122 electrones en equilibrio

Problema de Thomson

El potencial electrostático es

$$E_1(\omega_N) = \sum_{i<j} \frac{1}{||x_i - x_j||}$$

Problema: (Thomson)

$$\operatorname*{argmin}_{\omega_N} E_1(\omega_N)$$

Química

Busqueda de moleculas de Carbono (buckminsterfullerene)

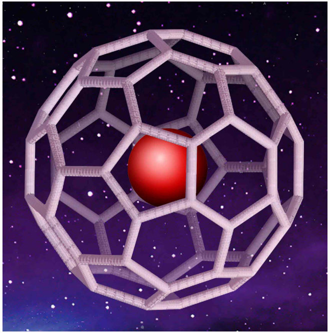


Figura: molécula de carbono estable C_{60} [Curl, Kroto, Smalley 1985]

Química

Buckminsterfullerene o futboleno. Forlan y Kroto.

Figura: Mejor jugador del mundial (2010) y Premio Nobel (1996)

Dados $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{S}^2$, definimos

$$\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N) = \log \left(\prod_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|} \right) = -\sum_{i<j} \log \|w_i - w_j\|$$

como la **energia logaritmica** de la N-upla $w_1, \ldots, w_N$.

Formalización del problema

Minimizando la Energia

Dados $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{S}^2$, definimos

$$\mathcal{E}(w_1, \dots, w_N) = \log \left(\prod_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|} \right) = -\sum_{i<j} \log \|w_i - w_j\|$$

como la **energia logaritmica** de la N-upla $w_1, \dots, w_N$.

Problema

Hallar N-uplas $w_1^*, \dots, w_N^* \in \mathbb{S}^2$ tal que

$$\mathcal{E}(w_1^*, \dots, w_N^*) = \min_{w_1, \dots, w_N \in \mathbb{S}^2} \mathcal{E}(w_1, \dots, w_N) = \mathcal{E}_N.$$

Formulación general

Riesz s-energy

$$\mathcal{E}_s(w_1, \ldots, w_N) = \sum_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|^s}$$

Formulación general

Riesz s-energy

$$\mathcal{E}_s(w_1, \ldots, w_N) = \sum_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|^s}$$

- El caso $s = 1$ es el potencial de Coulomb (el problema de Thomson).

Formulación general

Riesz s-energy

$$\mathcal{E}_s(w_1, \ldots, w_N) = \sum_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|^s}$$

- El caso $s = 1$ es el potencial de Coulomb (el problema de Thomson).
- Se puede pensar la energía logartímica como el caso límite con $s \to 0$.

Formulación general

Riesz s-energy

$$\mathcal{E}_s(w_1, \ldots, w_N) = \sum_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|^s}$$

- El caso $s = 1$ es el potencial de Coulomb (el problema de Thomson).
- Se puede pensar la energía logartímica como el caso límite con $s \to 0$.
- El problema de Tammes aparece con $s \to \infty$.

Volvamos a la energía logarítmica

$$\mathcal{E}(w_1, \dots, w_N) = \log\left(\prod_{i<j} \frac{1}{\|w_i - w_j\|}\right) = -\sum_{i<j} \log \|w_i - w_j\|$$

¿Cómo son las configuraciones que minimizan esta energía?

Soluciones parciales

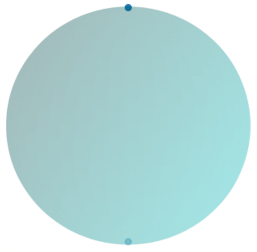
Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

- $N = 2$

Soluciones parciales

Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

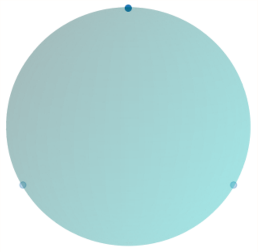
- $N = 2$, dos puntos **antipodales**.
- $N = 3$



Soluciones parciales

Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

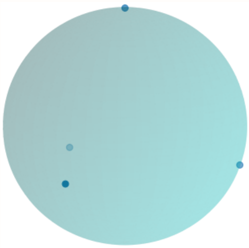
- $N = 2$, dos puntos **antipodales**.
- $N = 3$, vértices de cualquier **triángulo equilátero**.
- $N = 4$



Soluciones parciales

Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

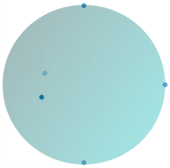
- $N = 2$, dos puntos **antipodales**.
- $N = 3$, vértices de cualquier **triángulo equilátero**.
- $N = 4$, vértices de un **tetraedro** regular

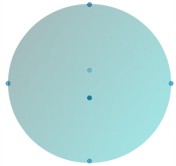


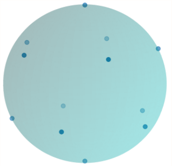
Soluciones parciales

Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

- $N = 2$, dos puntos **antipodales**.
- $N = 3$, vértices de cualquier **triángulo equilátero**.
- $N = 4$, vértices de un **tetraedro** regular
- $N = 5$ **antipodales** + **triángulo equilátero**
- $N = 6$, vértices de un **octaedro** regular
- $N = 12$, vértices de un **icosaedro** regular







Soluciones parciales

Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

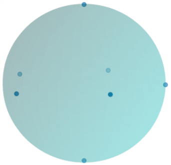
- $N = 2$, dos puntos **antipodales**.
- $N = 3$, vértices de cualquier **triángulo equilátero**.
- $N = 4$, vértices de un **tetraedro** regular
- $N = 5$ **antipodales** + **triángulo equilátero**
- $N = 6$, vértices de un **octaedro** regular
- $N = 12$, vértices de un **icosaedro** regular

$\mathbf{N = 7}$ ¡no se sabe!

Soluciones parciales

Una configuración óptima se le llama **puntos de Fekete**

- $\mathrm{N} = 2$, dos puntos **antipodales**.
- $\mathrm{N} = 3$, vértices de cualquier **triángulo equilátero**.
- $\mathrm{N} = 4$, vértices de un **tetraedro** regular
- $\mathrm{N} = 5$ **antipodales + triángulo equilátero**
- $\mathrm{N} = 6$, vértices de un **octaedro** regular
- $\mathrm{N} = 12$, vértices de un **icosaedro** regular



N = 7 ¡no se sabe!

Conjetura

La única colección de 7 puntos de Fekete son dos polos opuestos y 5 puntos equidistribuidos en el ecuador

El problema 7 de los **Problemas de Smale para el siglo XXI**, dice

El problema 7 de los **Problemas de Smale para el siglo XXI**, dice

Problema

¿Puede uno encontrar $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{S}^2$ *tal que*

$$\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N) - \mathcal{E}_N \leq c \log N, \tag{1}$$

c *una constante universal?*

El problema 7 de los **Problemas de Smale para el siglo XXI**, dice

Problema

¿Puede uno encontrar $w_1, \ldots, w_N \in \mathbb{S}^2$ *tal que*

$$\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N) - \mathcal{E}_N \leq c \log N, \tag{1}$$

c *una constante universal?*

Una de las grandes dificultades

es que el valor $\mathcal{E}_N$ **no es completamente conocido!**

Minimizando la Energia

El resultado más reciente:

Teorema (Bétermin-Sandier, 2018)

$$\mathcal{E}_N = \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln N}{4} + CN + o(N)$$

También conjeturan un valor de la constante C, pero aún no está probado.

Aquí $\kappa = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{x,y \in \mathbb{S}} \log \frac{1}{\|x-y\|} \, d(x,y) = \frac{1}{2} - \log 2$

Minimizando la Energia

Problema de Fekete

El resultado más reciente:

Teorema (Bétermin-Sandier, 2018)

$$\mathcal{E}_N = \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln N}{4} + CN + o(N)$$

También conjeturan un valor de la constante C, pero aún no está probado.

Por lo tanto

$\mathcal{E}_N$ **no es conocido ni con precisión logaritmica**.

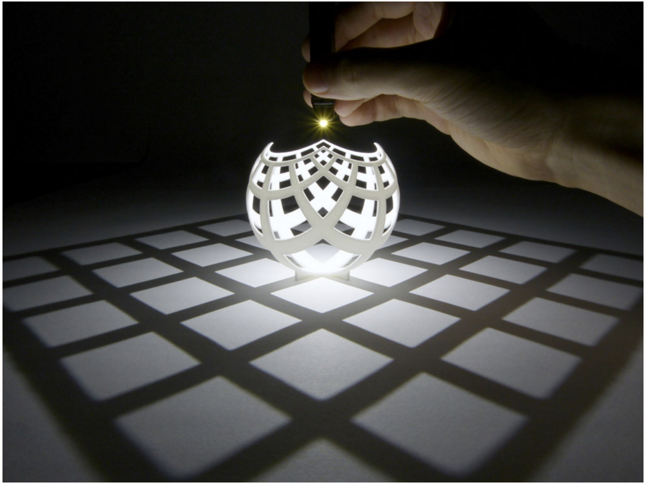
L. Bétermin, E. Sandier, "Renormalized energy and asymptotic expansion of optimal logarithmic energy on the sphere.", Constr. Approx. 47 (2018).

¿De dónde sale entonces el problema de Smale?

Para entender la motivación del problema propuesto por Smale (y también su utilidad), vamos de la esfera al plano.

¿De dónde sale entonces el problema de Smale?

Para entender la motivación del problema propuesto por Smale (y también su utilidad), vamos de la esfera al plano.



De la esfera al plano

y del plano a los polinomios

Número de condición:

$$\mu(p, z_i) = \sqrt{N} \left(\frac{\left(1 + |z_i|^2\right)^{\frac{N}{2}-1}}{|p'(z_i)|} \right) \|p\|$$

Es una noción de cuánto varía la raíz z_i, cuando variamos los coeficientes del polinomio.

El problema de Shub y Smale

(1993)

M. Shub y S. Smale proponen el siguiente problema:

Dar una secuencia explícita de polinomios bien condicionados ($\mu(p) \leq N^a$)

El problema de Shub y Smale

(1993)

M. Shub y S. Smale proponen el siguiente problema:

Dar una secuencia explícita de polinomios bien condicionados ($\mu(p) \leq N^a$)

y prueban el siguiente:

Teorema

Los polinomios de Fekete son bien condicionados.

$$\mu(p) \leq \sqrt{N(N+1)}\frac{e^{\mathcal{E}(x_1,\ldots,x_N)/2}}{e^{\mathcal{E}_N/2}}$$

M. Shub, S. Smale, "Complexity of Bezout's theorem. III. Condition number and packing", J. Complexity (1993).

El problema de Shub y Smale

(1993)

Es decir:

resolver el problema 7 de Smale, implica resolver este problema de polinomios bien condicionados de 1993.

El problema de Shub y Smale

(1993)

Es decir:

resolver el problema 7 de Smale, implica resolver este problema de polinomios bien condicionados de 1993.

Este problema de polinomios bien condicionados fue resuelto en 2020, pero en el problema 7 de Smale estamos lejos todavía.

C. Beltrán, U. Etayo, J. Marzo, J. Ortega-Cerdà, "A sequence of polynomials with optimal condition number", J. Amer. Math. Soc. 34 (2021).

Dos enfoques

- Procesos aleatorios con buena energía logarítmica
- Configuraciones de Fekete para N chico

Estrategia 1

Puntos aleatorios uniformes

Estrategia 1

Puntos aleatorios uniformes

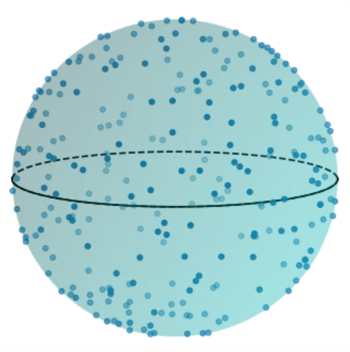


Figura: 260 puntos sorteados uniformes

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1, \dots, w_N)\right) = \frac{\kappa}{2} N(N-1)$$

$$\mathcal{E}_N = \frac{\kappa}{2} N^2 - \frac{N \ln N}{4} + CN + o(N)$$

$$\kappa = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{x,y \in \mathbb{S}} \log \frac{1}{\|x-y\|}\, d(x,y)$$

Estrategia 2

Valores propios de matrices aleatorias (Spherical ensamble)

Si A y B son matrices con entradas complejas gaussianas independientes $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$, entonces los valores propios de $A^{-1}B$ tienden a repelerse entre sí.

Estrategia 2

Valores propios de matrices aleatorias (Spherical ensamble)

[Alishahi & Zamani]

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1,\ldots,w_N)\right) =$$
$$\frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\gamma}{4}\right)N - \frac{1}{8} + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$\mathcal{E}_N = \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} + CN + o(N)$$

Obs: pensar como sols de $det(A - zB)$

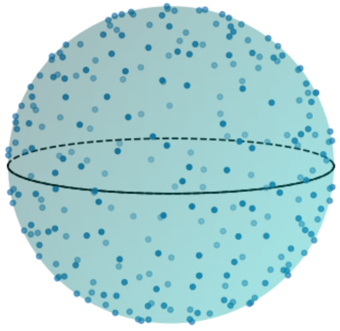


Figura: $N = 260$ valores propios de $A^{-1}B$.

K. Alishahi, M. Zamani, "The spherical ensemble and uniform distribution of points on the sphere", Electron. J. Probab (2015).

Estrategia 3

Raíces de polinomios aleatorios

Tomar raíces de polinomios aleatorios bien condicionados, y proyectarlos a $\mathbb{S}^2$

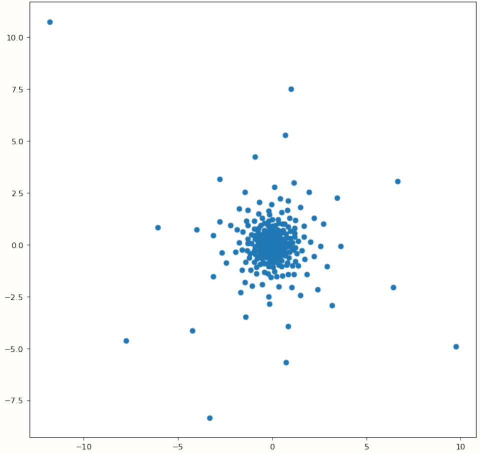


Figura: Las 260 raíces de un polinomio aleatorio.

Estrategia 3

Raíces de polinomios aleatorios

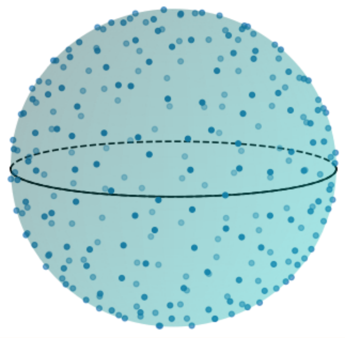


Figura: Las mismas 260 raíces llevadas a la esfera por la proyección estereográfica

[Armentano, Beltrán, Shub]

$$p_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{N}{k}^{1/2} z^k$$

con $a_k \sim \mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1,\ldots,w_N)\right) = \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} - \frac{\kappa}{2}N.$$

$$\mathcal{E}_N = \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} + CN + o(N)$$

D. Armentano, C. Beltrán, M. Shub, "Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: The role of random polynomials", Trans. Amer. Math. Soc. (2011).

De la ABS a la AZ

[AZ]

$$p_N(z) = det(A + zB)$$

$$\frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln N}{4} + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\gamma}{4}\right) N \cdots$$

[ABS]

$$p_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{N}{k}^{1/2} z^k$$

$$\frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln N}{4} - \frac{\kappa}{2}N$$

De la ABS a la AZ

[AZ]

$$p_N(z) = det(A + zB)$$

$$\frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\gamma}{4}\right)N \cdots$$

PEVP
polynomial eigenvalue problem

$$F(z) = \det\left(\sum_{i=0}^{d} G_i \binom{d}{i}^{1/2} z^i\right)$$

G_i matrices $r \times r$ con entradas $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}(0,1)$

[ABS]

$$p_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k \binom{N}{k}^{1/2} z^k$$

$$\frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} - \frac{\kappa}{2}N$$

[ACF]

$$F(z) = \det \left(\sum_{i=0}^{d} G_i \binom{d}{i}^{1/2} z^i \right)$$

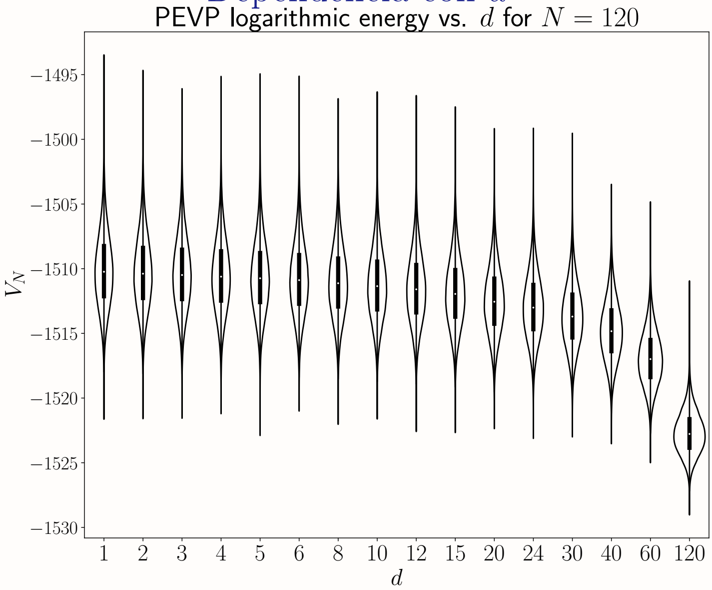
como arriba. Entonces

$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N)\right) = \frac{\kappa}{2} N^2 - \frac{N \ln d}{4} - \frac{N}{4}\left(1 + \psi(r+1) - \psi(2) - 2\ln 2\right)$$

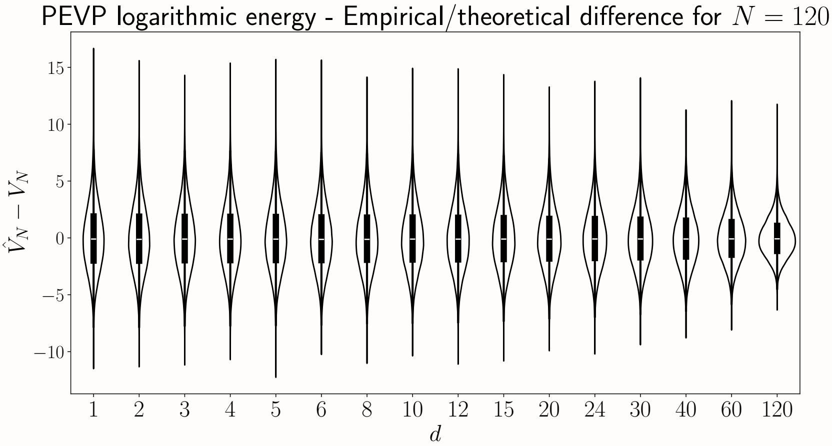
donde $\psi(n) = \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$

$$
\begin{aligned}
\text{[AZ]} : \mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N)\right) &= \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln N}{4} + \left(\frac{\ln 2}{2} - \frac{\gamma}{4}\right) N - \frac{1}{8} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
\text{PEVP} : \mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N)\right) &= \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln d}{4} - \frac{N}{4}\left(1 + \psi(r+1) - \psi(2) - 2\ln 2\right) \\
\text{[ABS]} : \mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N)\right) &= \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N \ln N}{4} - \frac{\kappa}{2}N
\end{aligned}
$$

Dependencia con d



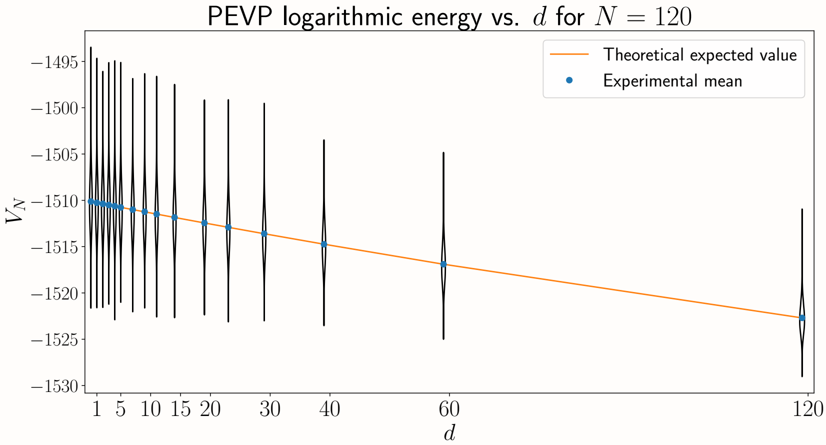
Dependencia con d



Dependencia con d

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1,\ldots,w_N)\right) &= \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln d}{4} - \frac{N}{4}\left(1+\psi(r+1)-\psi(2)-2\ln 2\right) \\
&= \frac{\kappa}{2}N^2 - \frac{N\ln N}{4} + N\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\gamma}{4}\right) - \frac{d}{8} + \frac{d^2}{48N} + NO\left(\frac{1}{r^4}\right)
\end{aligned}
$$

Dependencia con d



$$\mathbb{E}\left(\mathcal{E}(w_1, \ldots, w_N)\right) = \frac{\kappa}{2} N^2 - \frac{N \ln d}{4} - \frac{N}{4}\Big(1 + \psi(r+1) - \psi(2) - 2\ln 2\Big)$$

Atacando el caso $N = 7$

$$L(w, \lambda) = -\sum_{i<j} \log\left(\|w_i - w_j\|_2^2\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\|w_i\|^2 - 1\right).$$

Atacando el caso $N = 7$

$$L(w, \lambda) = -\sum_{i<j} \log\left(\|w_i - w_j\|_2^2\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\|w_i\|^2 - 1\right).$$

$$\nabla_x L = 0 \iff -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{2(w_i - w_j)}{\|w_i - w_j\|_2^2} + (n-1)w_i = \mathbf{0}$$

Atacando el caso $N = 7$

$$L(w,\lambda) = -\sum_{i<j} \log\left(\|w_i - w_j\|_2^2\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\|w_i\|^2 - 1\right).$$

$$\nabla_x L = 0 \iff -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{2(w_i - w_j)}{\|w_i - w_j\|_2^2} + (n-1)w_i = \mathbf{0}$$

$$I \quad \begin{cases} 1 - w_i^T w_i \quad i = 0, \ldots, n-1 \\ \\ \\ \end{cases}$$

Atacando el caso $N = 7$

$$L(w,\lambda) = -\sum_{i<j} \log\left(\|w_i - w_j\|_2^2\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\|w_i\|^2 - 1\right).$$

$$\nabla_x L = 0 \iff -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{2(w_i - w_j)}{\|w_i - w_j\|_2^2} + (n-1)w_i = \mathbf{0}$$

$$I \quad \begin{cases} 1 - w_i^T w_i \quad i = 0, \dots, n-1 \\ z_{ij}\left(2(1 - w_i^T w_j)\right) - 1 \quad i = 0, \dots, n-1 \quad j < i \\ \\ \end{cases}$$

Atacando el caso $N = 7$

$$L(w,\lambda) = -\sum_{i<j} \log\left(\|w_i - w_j\|_2^2\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_i \left(\|w_i\|^2 - 1\right).$$

$$\nabla_x L = 0 \iff -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{2(w_i - w_j)}{\|w_i - w_j\|_2^2} + (n-1)w_i = \mathbf{0}$$

$$I \quad \begin{cases} 1 - w_i^T w_i \quad i = 0, \dots, n-1 \\ z_{ij}\left(2(1 - w_i^T w_j)\right) - 1 \quad i = 0, \dots, n-1 \quad j < i \\ -\sum_{j\neq i} z_{ij} 2(w_i - w_j) + (n-1)w_i \quad i = 0, \dots, n-1 \end{cases}$$

Podemos calcular una base de Gröbner

- Podemos preguntarnos si ciertos polinomios están en I

Podemos calcular una base de Gröbner

- Podemos preguntarnos si ciertos polinomios están en I
- Podemos contar la cantidad de soluciones

Podemos calcular una base de Gröbner (¿podemos?)

- Podemos preguntarnos si ciertos polinomios están en I
- Podemos contar la cantidad de soluciones

Las simetrías del problema

¿qué hacer con las simetrías del problema?

Otra formulación

X matriz de productos internos $(n \times n)$

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \operatorname{rank}(X) = 3 \\ X_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n \\ X_{ij} \neq 1,\ 1 \leq i < j \leq n \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(X) = -\sum_{i<j} \log(1 - X_{ij})$$

Otra formulación

X matriz de productos internos $(n \times n)$

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \operatorname{rank}(X) = 3 \\ X_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n \\ X_{ij} \neq 1,\ 1 \leq i < j \leq n \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(X) = -\sum_{i<j} \log(1 - X_{ij})$$

$$\begin{cases} X_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n \\ X_{ij} \neq 1,\ 1 \leq i < j \leq n \\ Z_{ij}(1 - X_{ij}) = 1,\ \ 1 \leq i < j \leq n \\ XZ = XD \\ \operatorname{rank}(X) \leq 3 \end{cases}$$

Otra formulación

X matriz de productos internos $(n \times n)$

$$\mathcal{M} = \begin{cases} \operatorname{rank}(X) = 3 \\ X_{ii} = 1, \ 1 \leq i \leq n \\ X_{ij} \neq 1, \ 1 \leq i < j \leq n \\ X \succeq 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{E}(X) = -\sum_{i<j} \log(1 - X_{ij})$$

$$\begin{cases} X_{ii} = 1, \ 1 \leq i \leq n \\ X_{ij} \neq 1, \ 1 \leq i < j \leq n \\ Z_{ij}(1 - X_{ij}) = 1, \ \ 1 \leq i < j \leq n \\ XZ = XD \\ \operatorname{rank}(X) \leq 3 \end{cases}$$

Y después a contar!

Problemas relacionados

a atacar por el grupo de los jueves[1]

- ¿Cómo son los puntos críticos?

[1] El grupo de los jueves es: D. Armentano, L. Bentancur, F. Carrasco, M.F., M. Valdés, M. Velasco.

Problemas relacionados

a atacar por el grupo de los jueves[1]

- ¿Cómo son los puntos críticos?
- ¿Cómo es la dist. sep. asintótica para algunos de estos procesos de puntos?

[1] El grupo de los jueves es: D. Armentano, L. Bentancur, F. Carrasco, M.F., M. Valdés, M. Velasco.

Problemas relacionados

a atacar por el grupo de los jueves[1]

- ¿Cómo son los puntos críticos?
- ¿Cómo es la dist. sep. asintótica para algunos de estos procesos de puntos?
- ¿Cómo es la varianza de la energía logarítmica en estos procesos?

[1] El grupo de los jueves es: D. Armentano, L. Bentancur, F. Carrasco, M.F., M. Valdés, M. Velasco.

Problemas relacionados

a atacar por el grupo de los jueves[1]

- ¿Cómo son los puntos críticos?
- ¿Cómo es la dist. sep. asintótica para algunos de estos procesos de puntos?
- ¿Cómo es la varianza de la energía logarítmica en estos procesos?
- Conjetura de la trifórmula

[1] El grupo de los jueves es: D. Armentano, L. Bentancur, F. Carrasco, M.F., M. Valdés, M. Velasco.

Problemas relacionados

a atacar por el grupo de los jueves[1]

- ¿Cómo son los puntos críticos?
- ¿Cómo es la dist. sep. asintótica para algunos de estos procesos de puntos?
- ¿Cómo es la varianza de la energía logarítmica en estos procesos?
- Conjetura de la trifórmula
- ¿Cómo son los fenómenos de transición de fase?

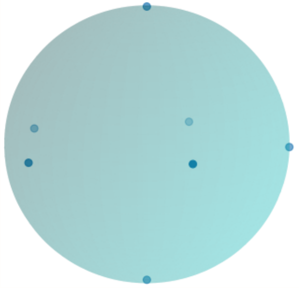
[1] El grupo de los jueves es: D. Armentano, L. Bentancur, F. Carrasco, M.F., M. Valdés, M. Velasco.

Problemas relacionados

a atacar por el grupo de los jueves[1]

- ¿Cómo son los puntos críticos?
- ¿Cómo es la dist. sep. asintótica para algunos de estos procesos de puntos?
- ¿Cómo es la varianza de la energía logarítmica en estos procesos?
- Conjetura de la trifórmula
- ¿Cómo son los fenómenos de transición de fase?

[1] El grupo de los jueves es: D. Armentano, L. Bentancur, F. Carrasco, M.F., M. Valdés, M. Velasco.



¡Muchas Gracias!

Bonus track

Una trifórmula y una conjetura

[Armentano, Beltrán, Shub - 2011]

$$\mathcal{E}(w) = \sum_{i=1}^{N} \log\left(\mu(p, z_i)\right) + N \log\left(\frac{\prod_{i=1}^{N} \sqrt{1+|z_i|^2}}{\|p\|}\right) + C(N)$$

Bonus track

Una trifórmula y una conjetura

[Armentano, Beltrán, Shub - 2011]

$$\mathcal{E}(w) = \sum_{i=1}^{N} \log\left(\mu(p, z_i)\right) + N \log \left(\frac{\prod_{i=1}^{N} \sqrt{1+|z_i|^2}}{\|p\|} \right) + C(N)$$

Conjetura (Beltrán - 2020. Son equivalentes:)

$$\operatorname*{argmin}_{w_i \in S^2} \mathcal{E}(w), \qquad \operatorname*{argmin}_{z_i \in \mathbb{C}} \sum_{i=1}^{N} \log\left(\mu(p, z_i)\right)$$

$$\operatorname*{argmax}_{z_i \in \mathbb{C}} \log \left(\frac{\prod_{i=1}^{N} \sqrt{1+|z_i|^2}}{\|p\|} \right)$$

Conjeturas y experimentos