Una mirada personal sobre el trabajo matemático de Mario Wschebor

José R. León R.
IMERL.

November 12, 2024

Esta conferencia pretende hacer un homenaje a un gran matemático y científico latinoamericano. Mi charla se basará principalmente en mis propios recuerdos y en la gran amistad que hubo entre nosotros.

La primera vez que conocí a Mario fue en 1977 en Caracas. Mario venía de Argentina donde él y su familia vivieron después del golpe de estado dado por el ejercito aquí en Uruguay.

Mario nació aquí en Montevideo en 1939 y falleció en 2011.

Figure: Una foto de su niñez acompañado por su hermana.

- Hizo estudios de Ingeniería Electromecánica en la Facultad de Ingeniería y Agrimensura de la Universidad de la República, Montevideo (1957-1963).

Figure: En sus tiempos de la universidad.

- Posgrado:
  1. Diploma de Posgrado en Teoría de Probabilidad, Estadística Matemática y sus Aplicaciones, UNESCO-Academia Húngara de Ciencias 1964.
  2. Diplôme d'Etudes Approfondies, Matemáticas, Universidad de Paris-Sud, Francia (1971).
  3. Doctor de Tercer Ciclo, Matemáticas, Universidad de Paris-Sud, Francia (1972). Tutor: J. P. Kahane.

Figure: Mario y Adela en la época de sus estudios en Paris.

Sus primeros tres artículos publicados que aparecen en MathScinet son.

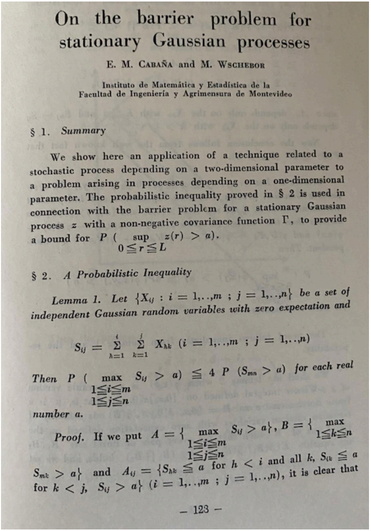
- On the statistical properties of the Walsh functions, Révész, P.; Wschebor, M. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 9 (1965), 543-554.
- On the barrier problem for stationary Gaussian processes, Cabaña, E.; Wschebor, M. Univ. Repúb. Fac. Ingen. Agrimens. Montevideo Publ. Inst. Mat. Estadíst. 4 (1969), 123-128.
- Sur le recouvrement du cercle par des ensembles placés au hasard, Wschebor, Mario Israel J. Math. 15 (1973), 1-11.

El primero de los tres fue producto de la visita que hiciera a Hungría, con motivo de realizar estudios de posgrado en el marco de un programa de la UNESCO-Academia Húngara de Ciencias. Fue escrito con el gran matemático húngaro Pal Revez.

El segundo apareció en el Boletín del IME y para dar una descripción cito textualmente a Enrique Cabaña:

"Se trata de una acotación de la probabilidad de que un proceso gaussiano estacionario sobrepase una barrera. El trabajo combina un par de ingredientes propuestos uno por cada autor, a saber, la Desigualdad de Slepian y la inmersión de un proceso de parámetro unidimensional en un proceso de incrementos independientes de parámetro bidimensional para confluir en el resultado expuesto".

Aquí va una foto de la primera página del artículo



On the barrier problem for stationary Gaussian processes

E. M. Cabaña and M. Wschebor

Instituto de Matemática y Estadística de la
Facultad de Ingeniería y Agrimensura de Montevideo

§ 1. *Summary*

We show here an application of a technique related to a stochastic process depending on a two-dimensional parameter to a problem arising in processes depending on a one-dimensional parameter. The probabilistic inequality proved in § 2 is used in connection with the barrier problem for a stationary Gaussian process z with a non-negative covariance function Γ, to provide a bound for $P(\sup_{0\leq r\leq L} z(r) > a)$.

§ 2. *A Probabilistic Inequality*

Lemma 1. Let $\{X_{ij} : i = 1,..,m \; ; \; j = 1,..,n\}$ *be a set of independent Gaussian random variables with zero expectation and*

$$S_{ij} = \sum_{h=1}^{i} \sum_{k=1}^{j} X_{hk} \quad (i = 1,..,m \; ; \; j = 1,..,n)$$

Then $P(\max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} S_{ij} > a) \leq 4\, P(S_{mn} > a)$ *for each real number* a.

Proof. If we put $A = \{\max_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} S_{ij} > a\}$, $B = \{\max_{1\leq k\leq n} S_{mk} > a\}$ and $A_{ij} = \{S_{hk} \leq a$ for $h < i$ and all k, $S_{ik} \leq a$ for $k < j$, $S_{ij} > a\}$ $(i = 1,..,m \; ; \; j = 1,..,n)$, it is clear that

— 123 —

Figure: On the barrier problem for stationary Gaussian processes

Actividad docente universitaria y funciones análogas.

- En la Facultad de Ciencias Económicas y de Administración, Universidad de la República, Ayudante de Clase de Matemática Financiera y Actuarial (1960); Ayudante de Clase de Matemática I (1962-1963); Ayudante de Clase de Matemática II (1961-1969); Profesor Adjunto de Matemática I (1963-1970); Profesor Adjunto de Matemática II (1965-1968).
- En la misma Facultad, Concurso de pruebas para la provisión de un cargo de Ayudante de Clase de Análisis Matemático II, en el cual fue declarado ganador (1962).
- En el Instituto de Matemática y Estadística de la Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Asistente(1967-1969); Profesor Adjunto (1969-1974), destituido durante la intervención militar de la Universidad, reincorporado en 1987 y nombrado Profesor Titular en 1988, cargo en que permaneció hasta el 25-04-98, con apartamiento de carrera desde el 20-11-90.

- En la misma Facultad, Concurso de méritos y pruebas para la provisión de un cargo de Asistente del Instituto de Matemática y Estadística, en el cual fue declarado ganador (1968).
- En la Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad de la República, Profesor Titular (1973), destituido durante la intervención militar de la Universidad (1973-1985), reincorporado en 1987. A partir de la puesta en funcionamiento de la Facultad de Ciencias en el comienzo de 1991, Profesor Titular de su Centro de Matemática con una interrupción durante el período 25-04-98 a 15-09-98 y en ese cargo se mantuvo hasta su desaparición física.
- En la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Buenos Aires (1974).
- En la Universidad Nacional de Luján, Argentina (1976).

Actividad docente en Caracas, Venezuela

Fue profesor titular en la «Universidad Simón Bolívar», desde 1976 hasta su regreso al Uruguay. Esta universidad fue creada en 1970 y está dirigida a la docencia e investigación en ciencia y tecnología. Hubo un numeroso grupo de científicos que se exiliaron en Venezuela, provenientes del "Cono Sur" por razones políticas.

Más tarde, Mario fue también profesor en la Universidad Central de Venezuela. Allí tuve el gran placer de ser su primer estudiante de doctorado.

Figure: Con su amigo y colaborador venezolano Joaquín Ortega

La actividad matemática de nuestro grupo en Caracas se desarrolló principalmente en el seminario de Probabilidad y Estadística Matemática de Caracas. Era una actividad semanal y sus fundadores fueron Mario y Enrique Cabaña que también estaba en Caracas en la misma universidad.

Principales trabajos en Venezuela y al regreso al Uruguay.

Máximo de la hoja browniana.

El primer trabajo de investigación de Mario, con el que tuve contacto, fue el estudio de la distribución del máximo de la hoja browniana con parámetro en $\mathbb{R}^2$. Fue un trabajo conjunto con Enrique y se basaba en una inecuación diferencial parcial, que satisface la función de densidad de probabilidad del máximo, que Enrique había mostrado tiempo atrás.

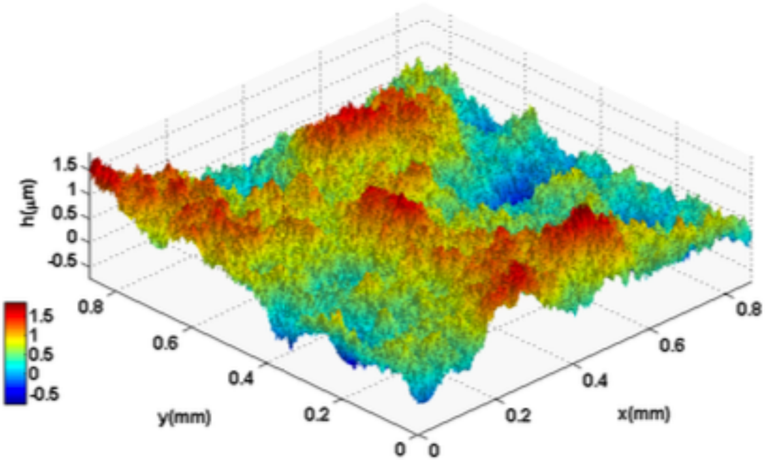


Figure: Simulación de la Hoja Browniana

El artículo se publicó en The Annals of Probability. Volume 10, Number 2 (1982), 289-302. Precisemos sus resultados.

Sea $\beta(x, y)$ una hoja browniana estándar, y definamos

$$M(x, y) = \sup\{\beta(x', y') : 0 \leq x' \leq x,\ 0 \leq y' \leq y\},$$

la densidad de probabilidad

$$p(x, y, z, u) := \frac{\partial}{\partial z}\mathbb{P}\{M(x', y') < u,\ \beta(x, y) \geq u - z\}.$$

Depende de x, y sólo a través del producto $t := xy$ y satisface las siguientes inecuaciones de Kolmogorov

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{\partial p}{\partial t} \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)t\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right)p \geq 0$$

A continuación se muestra un límite superior para p utilizando las propiedades probabilísticas de la hoja browniana. En efecto, si φ es la densidad gaussiana estándar y definiendo

$$p_0(t,z) = t^{-1/2}\varphi(\tfrac{u-z}{t^{1/2}}) - t^{-1/2}\varphi(\tfrac{u+z}{t^{1/2}})$$

se cumple

$$p(t,z) \leq p_0(t,z) - 2uzt^{-1/2}\varphi(\tfrac{u+z}{t^{1/2}})$$

Posteriormente, las inecuaciones diferenciales parciales precedentes proporcionan un límite inferior más difícil, mediante la solución de la ecuación diferencial correspondiente con condiciones de contorno adecuadas.

El trabajo exhibe un gran despliegue de talento.

Conjunto de nivel para Campos Gaussianos

Poco tiempo después de la finalización del trabajo sobre la Hoja Browniana, Mario comenzó a estudiar el trabajo de Rice sobre los cruces de procesos gaussianos. Su interés se centra en extender la famosa fórmula de Kac-Rice a procesos que tienen parámetro en $\mathbb{R}^d$.

Se definen los cruces al nivel u de un proceso Gaussiano regular en el intervalo $[0, T]$ a la variable aleatoria

$$N_T^X(u) = \{t \leq T : X(t) = u\}.$$

Marc Kac y Stephen Rice en 1943 dieron una fórmula para calcular la esperanza de esta v.a.

Consideremos un campo aleatorio gaussiano $X : \Omega \times T \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ suficientemente suave, la noción que generaliza los cruces cuando $d > 1$ es la curva de nivel

$$\mathcal{C}_u^T = \{s \in T : X(s) = u\}.$$

Denotemos su longitud por $\mathcal{L}(\mathcal{C}_u^T)$.

El primer y clásico resultado es la fórmula de la co-área, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua se cumple

$$\int_{\mathbb{R}} g(u)\mathcal{L}(\mathcal{C}_u^T)du = \int_T g(X(s))||\nabla X(s)||ds.$$

Tomando esperanzas y utilizando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} g(u)\mathbb{E}[\mathcal{L}(\mathcal{C}_u^T)]du$$
$$= \int_{\mathbb{R}} g(u) \int_T \mathbb{E}[||\nabla X(s)|| \,|X(s) = u] p_{X(s)}(u) ds du.$$

La relación anterior implica que para casi todo u con respecto a la medida de Lebesgue se tiene

$$\mathbb{E}[\mathcal{L}(\mathcal{C}_u^T)] = \int_T \mathbb{E}[||\nabla X(s)|| \, |X(s) = u] p_{X(s)}(u) ds.$$

Esta fórmula se conoce como fórmula de Kac-Rice para campos.

Mario estudió algunas cuestiones interesantes que citamos a continuación.

1.- En primer lugar el conjunto de nivel $\mathcal{C}_u^T$ puede ser muy irregular y son necesarias algunas nociones de Geometría Integral para definir de manera correcta su longitud. Mario tomó la noción del perímetro Di Giorgi. Con ello fue capaz de establecer, de forma correcta, la definición de $\mathcal{L}(\mathcal{C}_u^T)$.

2.- La fórmula precedente de Kac-Rice sólo es válida para casi todos los niveles u, pero en las aplicaciones se necesita una fórmula de este tipo para algunos niveles específicos, por ejemplo el nivel cero. Para resolver estas cuestiones en primer lugar Mario utilizó el Teorema de Bulinskaya, sobre la no existencia de puntos críticos en un nivel fijo con probabilidad uno. Y en segundo lugar hizo un estudio muy detallado de la continuidad de la función $u \to \mathcal{L}(\mathcal{C}_u^T)$, siempre que el parámetro del proceso se restrinja a un conjunto compacto Q.

3.- La fórmula de Kac-Rice también es válida no sólo para la longitud de la curva de nivel, sino también para las integrales de línea con respecto a la diferencial de la longitud de la curva. En el trabajo de Mario se propone una fórmula para las esperanzas de

$$\int_{\mathcal{C}_u^T} Y(\nabla X(s))d\sigma(s).$$

Importante para las aplicaciones resulta la fórmula de Kac-Rice para momentos de orden mayor que uno de estas variables aleatorias. En su libro LNM 1147 "Surfaces Aléatoires" hay un número importantes de este tipo de resultados.

4.- Mario continuó trabajando en el tema de la fórmula de Kac-Rice en todo el resto de su vida, el libro con Jean-Marc Azaïs: "Level sets and Extrema of Random Processes and fields" Wiley (2009) es un muy buen resumen de su trabajo posterior.

Algunas observaciones sobre la importancia del trabajo de Mario en las aplicaciones.

Han aparecido varios ámbitos en los que las ideas desarrolladas en los trabajos que hemos mencionado antes ocupan un lugar central. A continuación citamos algunos de ellos.

- Test of anisotropy based in level sets observations (Wschebor LNM 1147, Cabaña (1987), Flores & L (2011)).
- Aplicaciones al modelo del mar aleatorio (Baxevani et al. (2003), Azaïs et al. (2005), Podgórski & Rychlik (2008)).
- Óptica y Física Cuántica: Dislocaciones, Líneas Nodales (Berry & Dennis (2000), Berry (2002) and Toth & Wigman (2010), Azaïs et al. (2011)).
- Lentes gravitacionales y número de imágenes(Petters et al. (2010)).

Uno de los temas que abordó al final de su vida fue el estudio de raíces reales o conjunto nodales de polinomios o sistemas de polinomios aleatorios. Dos ejemplos de esta investigación lo constituyen:

Armentano, D., Wschebor, M. Random systems of polynomial equations. The expected number of roots under smooth analysis Bernoulli 15 (2009), no. 1, 249–266.

Azaïs, J-M. Wschebor, M. On the roots of a random system of equations. The theorem on Shub and Smale and some extensions Found. Comput. Math. 5 (2005), no. 2, 125–144.

Sus trabajos en este tema han dado lugar a una serie de artículos de los cuales citamos algunos.

- Asymptotic variance and CLT for the number of zeros of Kostlan Shub Smale random polynomials, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 353 (2015), F. Dalmao.
- Variance of the volume of random real algebraic submanifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 371 (2019), T. Letendre.
- Variance of the volume of random real algebraic submanifolds II, Indiana Univ. Math. J. 68 (2019), T. Letendre & M. Puchol.
- Central limit theorem for the number of real roots of Kostlan Shub Smale random polynomial systems. Armentano et al. American Journal of Math. (2021).

Suavizado de procesos y campos aleatorios por convolución y estadística de difusiones.

Sea X_t un movimiento Browniano estándar. Mario estudió el comportamiento asintótico, cuando $\varepsilon \to 0$ de las variables aleatorias

$$\frac{X_{s+\varepsilon} - X_s}{\sqrt{\varepsilon}},$$

cuando se considera, para casi todo ω, como variable aleatoria en el espacio de probabilidad $([0,1], \mathcal{B}, \lambda)$, de la medida de Lebesgue λ. Denotemos por Φ la distribución de un v.a. gaussiana estándar.

Mario demostró el siguiente resultado notable.
Para casi todo ω se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda\{s\leq t:\ \frac{X_{s+\varepsilon}(\omega)-X_s(\omega)}{\sqrt{\varepsilon}}\leq x\}=t\Phi(x).$$

Como consecuencia del resultado anterior tenemos: sea G una función continua perteneciente a $\mathbb{L}^4(\mathbb{R},\varphi(x)dx)$, para casi todo ω obtenemos

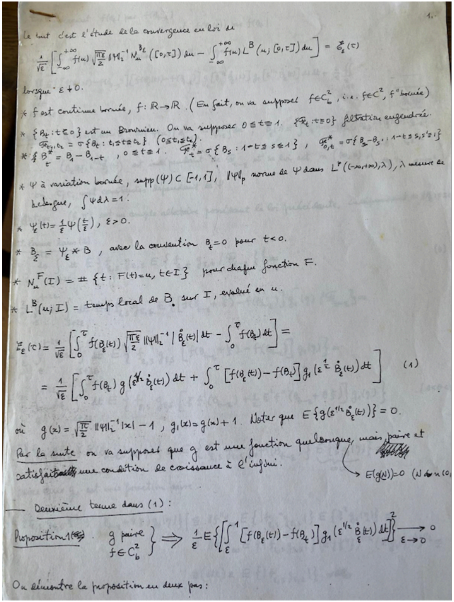
$$\int_0^t G(\frac{X_{s+\varepsilon}(\omega)-X_s(\omega)}{\sqrt{\varepsilon}})ds\to t\mathbb{E}G(N),$$

$$\int_0^t f(X_s)G(\frac{X_{s+\varepsilon}(\omega)-X_s(\omega)}{\sqrt{\varepsilon}})ds\to \mathbb{E}G(N)\int_0^t f(X_s)ds.$$

Utilizando estos resultados se puede demostrar lo siguiente:
Definamos $\tilde{G} = G - \mathbb{E}G(N)$ entonces

$$S_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \tilde{G}(\frac{X_{s+\varepsilon} - X_s}{\sqrt{\varepsilon}})ds \overset{\varepsilon \to 0}{\Rightarrow} \sigma_{\tilde{G}} W_t,$$

donde W_t es otro MB y $\Rightarrow$ denota la convergencia en ley. Además, si G es una función par los dos MB resultan independientes.


1.

Le tout c'est l'étude de la convergence en loi de

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\,\|\psi\|_2^{-1} N_u^{B_\varepsilon}([0,\tau])\,du - \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,L^B(u;[0,\tau])\,du\right] = \xi_\varepsilon(\tau)$$

lorsque $\varepsilon \downarrow 0$.

* f est continue bornée, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. (En fait, on va supposer $f\in C_b^2$, i.e. $f\in C^2$, f'' bornée)
* $\{B_t : t\geq 0\}$ est un Brownien. On va supposer $0\leq t\leq 1$. $\{\mathcal{F}_t : t\geq 0\}$ filtration engendrée. $\mathcal{F}_{t_1,t_2}=\sigma\{B_t : t_1\leq t\leq t_2\}$ $(0\leq t_1\leq t_2)$.
* $\{B_t^* = B_1 - B_{1-t}$, $0\leq t\leq 1$. $\mathcal{F}_t^* = \sigma\{B_s : 1-t\leq s\leq 1\}$, $\mathcal{F}_{0,t}^* = \sigma\{B_s - B_{s'} : 1-t\leq s,s'\leq 1\}$
* ψ à variation bornée, $\mathrm{supp}(\psi)\subset[-1,1]$, $\|\psi\|_p$ norme de ψ dans $L^p((-\infty,+\infty),\lambda)$, λ mesure de Lebesgue, $\int\psi\,d\lambda = 1$.
* $\psi_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\psi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon>0$.
* $B_\varepsilon = \psi_\varepsilon * B$, avec la convention $B_t = 0$ pour $t<0$.
* $N_u^F(I) = \#\{t : F(t)=u,\ t\in I\}$ pour chaque fonction F.
* $L^B(u;I)$ = temps local de $B_\bullet$ sur I, evalué en u.

$$\xi_\varepsilon(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\int_0^\tau f(B_\varepsilon(t))\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{2}}\,\|\psi\|_2^{-1}\,|\dot{B}_\varepsilon(t)|\,dt - \int_0^\tau f(B_t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\left[\int_0^\tau f(B_t)\,g(\varepsilon^{1/2}\dot{B}_\varepsilon(t))\,dt + \int_0^\tau [f(B_\varepsilon(t)) - f(B_t)]\,g_1(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\dot{B}_\varepsilon(t))\,dt\right] \qquad (1)$$

où $g(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\|\psi\|_2^{-1}|x| - 1$, $g_1(x) = g(x)+1$. Noter que $E\{g(\varepsilon^{1/2}\dot{B}_\varepsilon(t))\} = 0$.

Par la suite on va supposer que g est une fonction quelconque, mais paire et satisfait une condition de croissance à l'infini.

$E(g(N))=0$ $(N$ $n(0,$

— Deuxième terme dans (1):

Proposition 1. $\left.\begin{array}{l} g \text{ paire} \\ f\in C_b^2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1}{\varepsilon}E\left\{\left[\int_\varepsilon^1 [f(B_\varepsilon(t)) - f(B_t)]\,g_1(\varepsilon^{1/2}\dot{B}_\varepsilon(t))\,dt\right]^2\right\} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

On démontre la proposition en deux pas:

Figure: Manuscrito de Mario sobre este teorema

Mario también estudió el caso de las difusiones. Primero consideraremos el movimiento browniano con deriva. Bajo ciertas condiciones la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$dZ_t = dX_t + b(Z_t)dt \quad Z_0 = x,$$

admite una solución débil única que puede expresarse mediante la fórmula de Girsanov.

En primer lugar definimos la martingala exponencial

$$M(t) = e^{\int_0^t b(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t b^2(X_s)ds}.$$

Si $H : C[0,t] \to \mathbb{R}$ es un funcional medible e integrable tenemos la fórmula de Girsanov

$$\mathbb{E}^x[H\{Z_s : 0 \leq s \leq t\}] = \mathbb{E}^x[M(t)H\{X_s : 0 \leq s \leq t\}].$$

Utilizando esta continuidad absoluta y los resultados citados anteriormente para el movimiento Browniano, se pueden obtener los dos resultados siguientes. Para casi todo ω se tiene

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda\{s \leq t : \frac{Z_{s+\varepsilon}(\omega) - Z_s(\omega)}{\sqrt{\varepsilon}} \leq x\} = t\Phi(x).$$

y

$$\tilde{S}_t^{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_0^t \tilde{G}(\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}})ds \Rightarrow \sigma_{\tilde{G}} W_t.$$

Observación: Si la función $\tilde{G}$ es par y tiene derivada que es Lipschitz, este último movimiento Browniano es el mismo que el surge en el resultado citado anterioremente para el MB y por lo tanto independiente de Z.
El estudio que hemos comentado anteriormente, relativo a la oscilación del movimiento browniano y otros procesos de difusión permite a Gonzalo Perera y a Mario en (1998) construir un estimador no paramétrico de la variación cuadrática para una difusión general unidimensional.

El proceso observado será la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dZ_s = \sigma(Z_s)dX_s + b(Z_s)ds \quad Z_0 = x.$$

Suponemos que las funciones σ y b satisfacen la hipótesis de tener existencia y unicidad. El estimador de la variación cuadrática de Z en el intervalo $[0, t]$ será

$$\hat{V}^{\varepsilon}(t) = \int_0^t (\frac{Z_{s+\varepsilon} - Z_s}{\sqrt{\varepsilon}})^2 ds.$$

Se cumplen los dos resultados siguientes. Sea σ una función continuamente diferenciable que satisface $\sigma(x) > 0$ y b una función continua, entonces

$\hat{V}^{\varepsilon}(t) \to \int_0^t \sigma^2(Z_s)ds = V(t), \quad$ a.s. in ω.

Además existe W un movimiento browniano estándar independiente de Z tal que

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\hat{V}^{\varepsilon}(t) - V(t)) \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^t \sigma^2(Z_s)\, dW(s).$$

La demostración se basa en el resultado para una difusión con deriva, definiendo la función $F_\sigma(x) = \int^x \frac{1}{\sigma(u)} du$. La función F_σ permite introducir el proceso $Y_t = F_\sigma(Z_t)$.
Al usar la fórmula de Itô se obtiene:

$$dY_t = dX_t + \mu(Y_t)dt, \qquad Y_0 = F_\sigma(x),$$

para una cierta función μ. Esto y la existencia de un límite de movimiento Browniano independiente de X, proporciona el resultado deseado.

Otros incrementos del B-M.

Consideremos la función $\psi(u) = 1_{[-1,0]}(u)$, dicha función es de variación acotada. Pongamos $\psi_\varepsilon(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon}\psi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$. Definiendo $X^\varepsilon = \psi_\varepsilon * X$, donde $*$ denota la convolución entre funciones o medidas y X es de nuevo un MB stándar X^ε tiene una derivada casi siempre y se cumple

$$\sqrt{\varepsilon}\dot{X}_t^\varepsilon = \frac{X_{t+\varepsilon} - X_t}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Este hecho permite a Mario y sus coautores formular el problema de la sección anterior para funciones más generales ψ. Lo haremos en lo que sigue. Sea ψ una densidad de soporte acotada con una derivada continua.

Definimos de nuevo $X^{\varepsilon} = \psi_{\varepsilon} * X$ y $\sigma := Var(\sqrt{\varepsilon}\dot{X}_t^{\varepsilon})$.

Para todo t y casi todo ω se cumple

$$\lambda\{s \leq t : \frac{\sqrt{\varepsilon}\dot{X}_t^{\varepsilon}}{\sigma} \leq x\} \to t\Phi(x).$$

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_0^1 f(X_s^{\varepsilon})\tilde{G}(\frac{\sqrt{\varepsilon}\dot{X}_s^{\varepsilon}}{\sigma})ds \Rightarrow \sigma_{\tilde{G}}\int_0^1 f(X_s)dW_s.$$

Observación: En el caso en que $G(x) = |x|$ este resultado implica la convergencia de los cruces del proceso X^{ε} hacia el tiempo Local de X. Además, los resultados son válidos también para difusiones generales o integrales estocásticas.

Galería de Fotos

Figure: Una reunión en su casa en Joaquín de Salterain luego del regreso a Uruguay

Figure: Sus tres primeros estudiantes: Corinne Berzin Jean-Marc Azaïs y Chichi en la misma reunión

Figure: Con Gerardo Rodríguez, Graciela Sapriza, Ramón Méndez, Roberto Markarian, Adela Pellegrino, Paola Bermolen, Laura Aspirot y María Viña

Figure: Con Gonzalo Perera y Ernesto Mordecki

References

Adler R. J., Taylor J. E.
Random Fields and Geometry.
Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag. (2007).

Azaïs J-M., León J. R. and Ortega J.
Geometrical Characteristics of Gaussian Sea Waves.
J. Appl. Prob. 42, 405-425, (2005).

Azaïs J-M., León J. R. and Wschebor M.
Rice formulas and Gaussian waves.
Bernoulli 17 (1), 170-193 (2011).

Azaïs J-M. and Wschebor M.
Level sets and extrema of random processes and fields.
John Wiley & Sons, (2009).

Baxevani A., Podgórski K. and Rychlik I.
Velocities for moving random surfaces.

Prob. Eng. Mech. 18-3, 251-271 (2003).

Berry M.V., and Dennis M.R.,
Phase singularities in isotropic random waves,
Proc. R. Soc. Lond, A, 456, 2059-2079 (2000).

Cabaña E.M. and Wschebor, M.
The Two-parameter Brownian Bridge: Kolmogorov inequalities and upper and lower bounds for the distribution of the maximum.
Annals of Probability, v.: 10 2, p.: 289-302 (1982).

Cabaña E. M.
Esperanzas de integrales sobre conjuntos de nivel aleatorios.
Actas del segundo Congreso Latinoamericano de Probabilidades y Estadística Matemática, Caracas 65-81, (1985).

Flores E. and León J.R.
Level Sets of Random Fields and Applications: Specular Points and Wave Crests

International Journal of Stochastic Analysis, Article ID 621038, 22 pages (2010).

Perera G. Wschebor, M.
Crossings and occupation measures for a class of semimartingales,
Ann. Probab. 26, no. 1, 253-266, (1998).

Petters A.O., Rider B. and Teguia A.M.
A Theory of Stochastic Microlensing I. Random Images, Shear and the Kac-Rice Formula.
J. Math. Physics, vol. 50, pp. 122501 (2009).

Podgórski P., Rychlik I.
Envelope crossing for Gaussian fields.
Prob. Eng. Mech., 23 364-377 (2008).

Rudnick Z. and Wigman I.
On the Volume of Nodal Sets for Eigenfunctions of the Laplacian on the Torus.
Ann. Henri Poincaré 9 , 109-130 (2008).

Toth J. and Wigman I.
Counting open nodal lines of random waves on planar domains.
Arxiv 0810.1276v4 (2009).

Wschebor, M.
Formule de Rice en dimension d.
Zeitschrift Für Wahrscheinlichkeitstheorie Und Verwandte Gebiete, v.: 60, p.: 393-401 (1982).

Wschebor, M.
On crossings of gaussian fields.
Stochastic Processes and their Applications, v.: 14 2, p.: 147-155 (1983).

Wschebor, M.
Surfaces Aléatoires
Lecture Notes in Mathematics, 1147 (1985).

Azaïs, J-M.; Wschebor, M.
On the roots of a random system of equations. The theorem on Shub and Smale and some extensions
Found. Comput. Math. 5 (2005), no. 2, 125–144.

Wschebor, M.
On the Kostlan-Shub-Smale model for random polynomial systems. Variance of the number of roots
J. Complexity 21 (2005), no. 6, 773–789.

Cucker, F.,Krick, T.,Malajovich, G.; Wschebor, M.
A numerical algorithm for zero counting. I. Complexity and accuracy
J. Complexity 24 (2008), no. 5-6, 582–605.