Clase 4 12/03/25

Ecuaciones diferenciales.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas.

Ejemplos:

$$y = y(x) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

EDO 1) $$\frac{dy}{dx} = 5x+3$$

EDO 2) $$e^{y}\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 1$$

EDO 3) $$4\frac{d^3y}{dx^3} + \operatorname{Sen} x \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$$

EDO 4) $$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

EDP 5) $$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$$y = y(x,t)$$

$$y \begin{cases} x \\ t \end{cases}$$

Obs: Una ecuación diferencial ordinaria (EDO) es una ecuación donde la función desconocida depende solamente de 1 variable independiente

Si la función desconocida depende de 2 ó más variables independientes la ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial (EDP).

Definición: El ORDEN de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

	orden
(1) →	1
(2) →	2
(3) →	3
(4) →	2
(5) →	2

EDO

1^{er} orden $\quad$ 2^{do} orden

Notación:

$$y = y(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = y^{(1)} = \dot{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = y^{(2)} = \ddot{y}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n} = y^{(n)}$$

Solución:

Una solución de una ecuación diferencial en la función "y" desconocida y la variable "x" en el intervalo I, es una función $y(x)$

que satisface la ecuación diferencial de manera idéntica $\forall x \in I$.

Ejemplo:

¿ Es $y(x) = C_1 \operatorname{Sen}(2x) + C_2 \operatorname{Cos}(2x)$

UNA solución de $y'' + 4y = 0$?

$$y(x) = C_1 \operatorname{Sen} 2x + C_2 \operatorname{Cos} 2x$$

$$y'(x) = 2C_1 \operatorname{Cos} 2x - 2C_2 \operatorname{Sen} 2x$$

$$y''(x) = -4C_1 \operatorname{Sen} 2x - 4C_2 \operatorname{Cos} 2x$$

$$y'' + 4y = 0 \Rightarrow -4C_1 \operatorname{Sen} 2x - 4C_2 \operatorname{Cos} 2x + 4\left(C_1 \operatorname{Sen} 2x + C_2 \operatorname{Cos} 2x\right)$$

$$= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por esto, $y(x) = C_1 \operatorname{Sen} 2x + C_2 \operatorname{Cos}(2x)$

satisface la ecuación diferencial para todos los valores de x en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\boxed{y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$$

Ejemplo. Determinar si $y(x) = x^2 - 1$ es una solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

$y(x) = x^2 - 1$ No es solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

Esta ecuación diferencial NO tiene soluciones.

Observación: Una solución particular de una ecuación diferencial es cualquier solución única. La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todos los soluciones.

Ejemplo: La solucion general de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, se puede demostrar que es

$$y(x) = C_1 \operatorname{Sen} 2x + C_2 \operatorname{Cos} 2x$$

Algunos soluciones particulares

- $y(x) = 5 \operatorname{Sen}(2x) - 3 \operatorname{Cos} 2x$

$C_1 = 5 \quad C_2 = -3$

- $y(x) = \operatorname{Sen} 2x$

$C_1 = 1 \quad C_2 = 0$

- $y(x) = 0$

$C_1 = 0 = C_2$

Problemas de Valor inicial y de valores de frontera.

Una ecuación diferencial acompañada con condiciones iniciales sobre la función desconocida, dadas al mismo valor constituyen un problema de valor inicial

Si las condiciones iniciales se dan a más de un valor de la variable "x" el problema es un problema de valores en la frontera

1) $y'' + 2y' = e^x \qquad y(\pi) = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad y'(\pi) = 2$

2) $y'' + 2y' = e^x \qquad y(0) = 1$
$\qquad\qquad\qquad\qquad y(1) = 1$

RESUMEN

Ecuaciones Diferenciales

- Ordinarias
  - Orden: El orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación
  - Clasificación
    - Primer Orden
      - Ecuaciones de Variables Separadas
      - Lineales
        - Homogéneas
        - No homogéneas
    - Segundo Orden
      - Ecu. de coeficientes constantes
        - Homogéneas
        - No Homogéneas
- (No) Parciales