

Ecuaciones Diferenciales.

Una ecuación diferencial es una ecuación que involucra una función desconocida y sus derivadas.

Ejemplos:

$$y = y(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

EDO

$$1) \frac{dy}{dx} = 5x + 3$$

EDO

$$2) e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} = 1$$

EDO

$$3) 4 \frac{d^3y}{dx^3} + 5ex \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$$

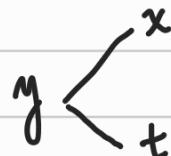
EDO

$$4) \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^3 + 3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^7 + y^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$$

EDP

$$5) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

$$y = y(x, t)$$



Obs: Una ecuación diferencial ordinaria

(EDO) es una ecuación donde la función desconocida depende solamente de 1 variable independiente

Si la función desconocida depende de 2 ó más variables independientes la ecuación diferencial es una ecuación diferencial parcial (EDP).

Definición: El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

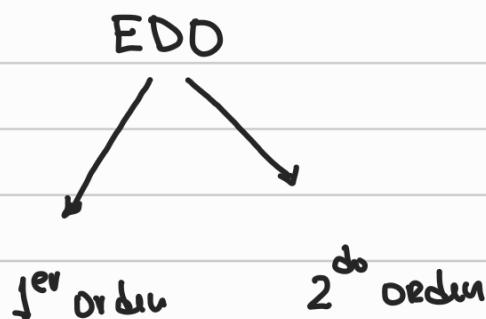
$$(1) \rightarrow 1 \quad \text{orden}$$

$$(2) \rightarrow 2$$

$$(3) \rightarrow 3$$

$$(4) \rightarrow 2$$

$$(5) \rightarrow 2$$



Notación:

$$\frac{dy}{dx} = y' = y^{(1)} = \ddot{y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = y^{(2)} = \dddot{y}$$

$$\vdots \\ \frac{d^n y}{dx^n} = y^{(n)}$$

Solución:

Una solución de una ecuación diferencial en la función "y" desconocida y la variable "x" en el intervalo I, es una función $y(x)$.

Que satisface la ecuación diferencial de
Wronskiano identico $\forall x \in \mathbb{J}$.

Ejemplo:

i) Es $y(x) = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x)$

una solución de $y'' + 4y = 0$?

$$y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$$

$$y'(x) = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x$$

$$y''(x) = -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x$$

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= 0 \Rightarrow -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x + 4(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) \\ &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Por esto, $y(x) = C_1 \sin 2x + C_2 \cos(2x)$

satisface la ecuación diferencial para todos los
valores de x en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

$\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}}$$

Ejemplo: Determinar si $y(x) = x^2 - 1$ es una solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

$y(x) = x^2 - 1$ No es solución de $(y')^4 + y^2 = -1$.

Esta ecuación diferencial no tiene soluciones.

Observación: Una solución particular de una ecuación diferencial es alguna solución única. La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todos los soluciones.

Ejemplo: La solución general de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$, se puede demostrar que es

$$y(x) = C_1 \operatorname{Sen} 2x + C_2 \operatorname{Cos} 2x$$

Algunas soluciones particulares

- $y_1(x) = 5 \operatorname{Sen}(2x) - 3 \operatorname{Cos} 2x$

$$C_1 = 5 \quad C_2 = -3$$

- $y_2(x) = \operatorname{Sen} 2x$
 $C_1 = 1 \quad C_2 = 0$

- $y_3(x) = 0$
 $C_1 = 0 = C_2$

Problemas de Valor inicial y de valores de frontera.

Una ecuación diferencial acompañada con condiciones iniciales sobre la función desconocida, dadas al mismo valor constituyen un problema de valor inicial

Si las condiciones iniciales se dan a más de un valor de la variable "x" el problema es un problema de valores en la frontera

$$1) \quad y'' + 2y' = e^x \quad \begin{aligned} y(\pi) &= 1 \\ y'(\pi) &= 2 \end{aligned}$$

$$2) \quad y'' + 2y' = e^x \quad \begin{aligned} y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

RESUMEN

ECUACIONES DIFERENCIALES

Ordinarias

(No) Parciales

ORDEN: El orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación

CLASIFICACIÓN

Primer Orden

Segundo Orden

Ecu. de Coeficientes

Constantes

Ecuaciones de
Variables Separadas

Lineales

Homogéneas No Homogéneas

Homogéneas No Homogéneas

