

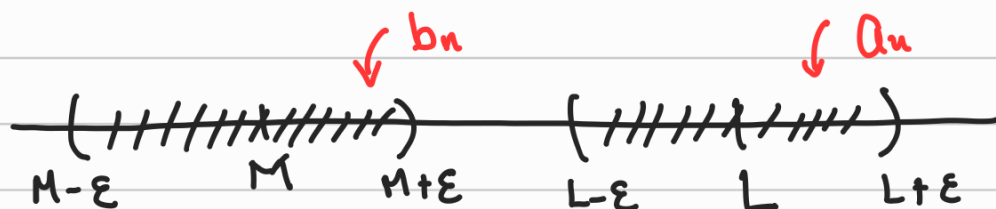
SUCESIONES

- ① Propiedades Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow L \quad (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow M$$

Entonces $L \leq M$.

Demostración: Supongámonos por absurdo $L > M$



Sea $\varepsilon > 0$ tal que $(M-\varepsilon, M+\varepsilon)$ y $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ sean disjuntos.

Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow M$ existe $n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1$

$$|b_n - M| < \varepsilon$$

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow L$ existe $n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_2$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

Para $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$n \geq n_0 \quad a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \quad b_n \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon) \quad a_n > b_n \rightarrow \text{contradicción}$$

Ejercicio (2) Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Además $(a_n) \rightarrow L$ y $(c_n) \rightarrow L \Rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow L$

Corolario Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a CERO. Entonces

$$(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

Ejemplo: $(a_n) = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$

$$(b_n) = \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$$

pues es el producto de una acotada $\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$ por

la sucesión $\frac{1}{n^2}$ que converge a CERO

Definición: Una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es:

* Monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

* Monótona decreciente si $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

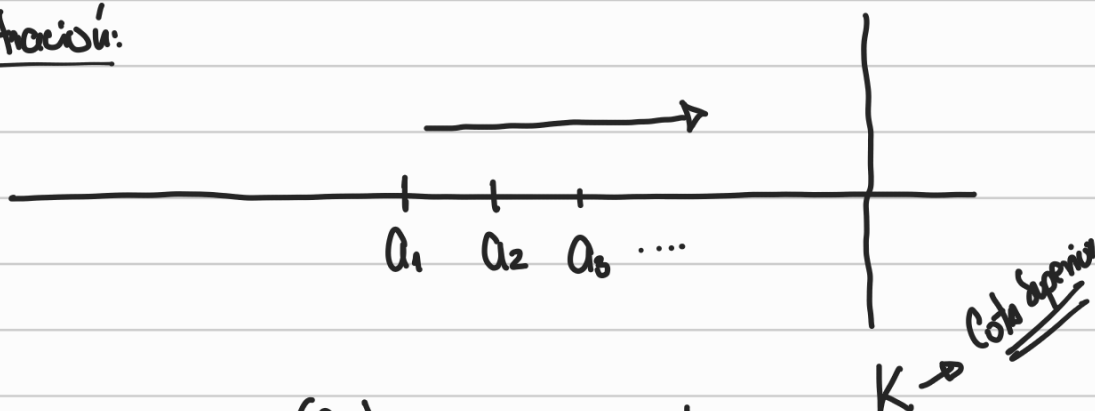
Ejemplos: $\left(\frac{1}{n^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ es decreciente
 $(\log(n))_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.

Teorema: Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión.

- 1) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
- 2) Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Demostración:

1)



Supongamos que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente. Consideremos el siguiente conjunto

$$X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

$$X \neq \emptyset$$

$$X \subseteq \mathbb{R}$$

X está acotado superiormente

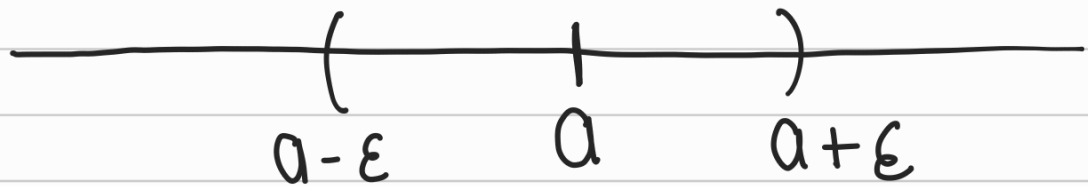
$$\text{Sup } X \text{ existe} \quad \text{Sup } X = a$$

$$\text{Obj: Mostrar que } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0$$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$:

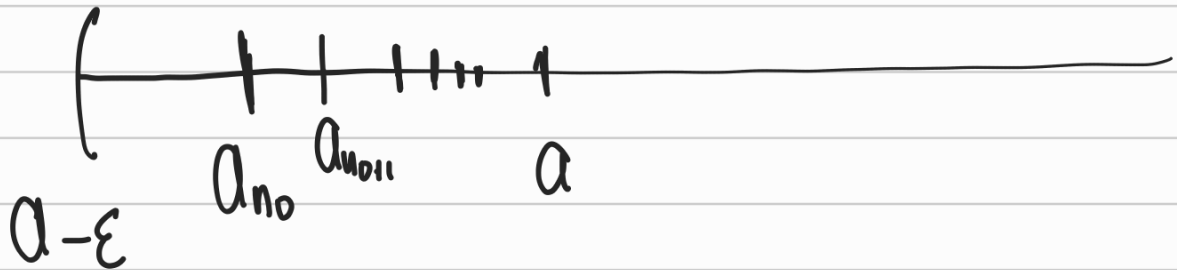


Como $a - \varepsilon < a$, entonces $a - \varepsilon$ NO es una superior de X .

Entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a - \varepsilon < a_{n_0} < a$$

y como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monotón creciente



$$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

Criterios (Criterio de la Razón).

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión **términos positivos** tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R} \text{ o } L = +\infty$$

Entonces

1) Si $L < 1$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a 0.

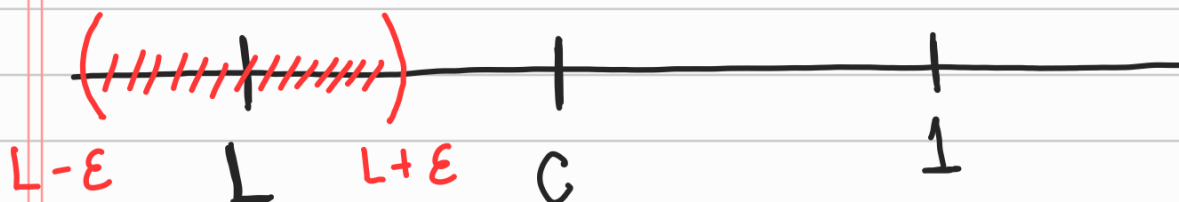
2) Si $L > 1$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Obs. Si $L = 1$. No funciona.

Demostración: (Optional)

1) Supongamos $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1$.

Obj: Mostrar que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$



Sea $c \in \mathbb{R}$ tal que $L < c < 1$.

Consideramos un $\varepsilon = \frac{|c-L|}{4}$

Como $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow L$ para este $\varepsilon = \frac{|c-L|}{4}$

existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \in (L-\epsilon, L+\epsilon)$$

$$\forall n \geq n_0$$

Es decir, $\forall n \geq n_0$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < c \quad \left(\begin{array}{c} a_n > 0 \\ \uparrow \text{positiva} \end{array} \right)$$

$$a_{n+1} < c a_n < 1 \cdot a_n$$

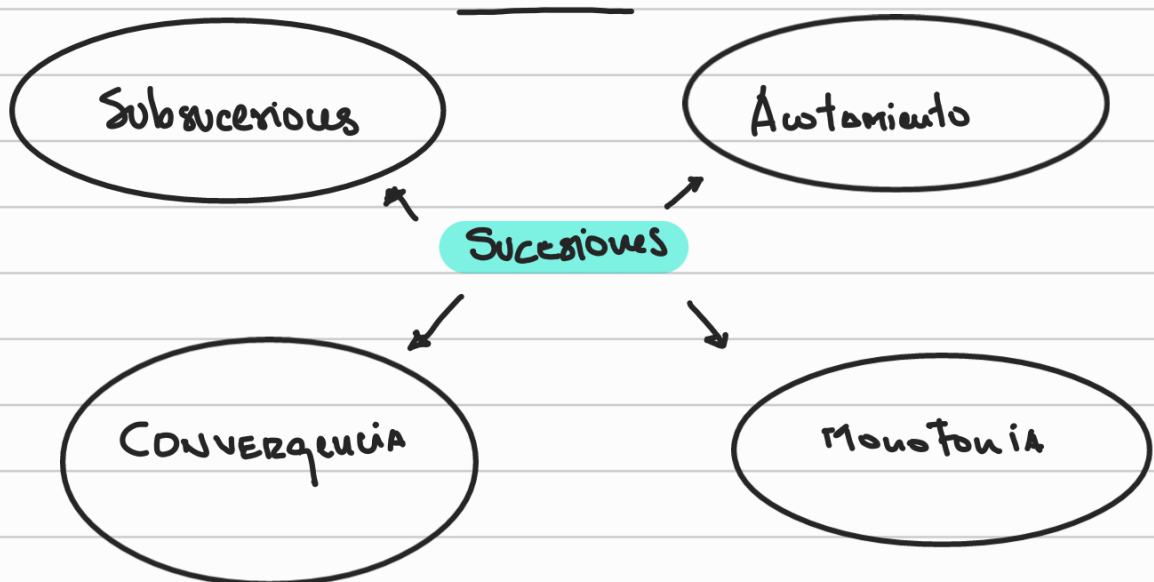
Como $c < 1$, $a_{n+1} < a_n$

(Lo que demostramos es que desde n_0
se verifica que $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \geq n_0$).

Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monotona decreciente!!
y es acotada.
Entonces $(a_n) \rightarrow A$

Ahora lo que falta es mostrar que $A=0$.

RESUMEN



TEOREMA: Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente y acotada superiormente, entonces tiene límite.

Criterio (DE LA RAZÓN).

Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R} \text{ o } L = +\infty.$$

Las siguientes afirmaciones se cumplen:

- 1) Si $L < 1$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero
- 2) Si $L > 1$, entonces $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Si $L = 1$, el criterio no permite concluir nada.

Ejemplo: $a_n = \frac{2^n}{n!}$ $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \frac{2}{n+1} \rightarrow 0 - L < 1$$

Por el criterio de la razón $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$.