Clase 8 24/03/25.

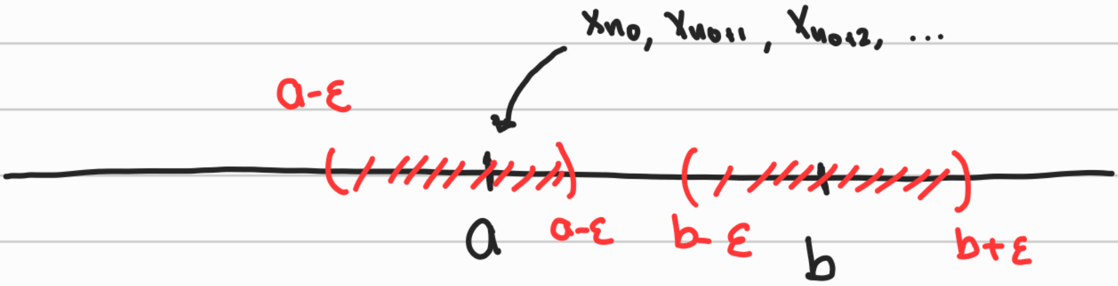
Sucesiones

(Teorema) Unicidad del límite.

Una sucesión no puede converger a dos límites diferentes.

<u>Demostración</u>: Supongamos que $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.

Dado $b \neq a$ $(b \in \mathbb{R})$



Podemos tomar un $\varepsilon > 0$ tal que los intervalos $I = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ $J = (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ sean disjuntos $(I \cap J = \emptyset)$.

Como $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que x_n $n \geq n_0$ $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Entonces $\forall n \geq n_0$, tenemos que $x_n \notin J$. Entonces $\lim_{n \to +\infty} x_n \neq b$.

<u>Definición</u>: Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se dice acotada superiormente (respectivamente inferiormente) cuando existe $c \in \mathbb{R}$ tal $x_n \leq c$ (respectivamente $x_n \geq c$) para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Notación</u>: Se dice que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, cuando está acotada superior e inferiormente.

es decir que existe $K>0$ tal que $|x_n| \leq K \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

$$a_n = n \qquad n \in \mathbb{N}$$
$$(1, 2, 3, 4, \ldots)$$

está acotada inferiormente pero no superiormente.

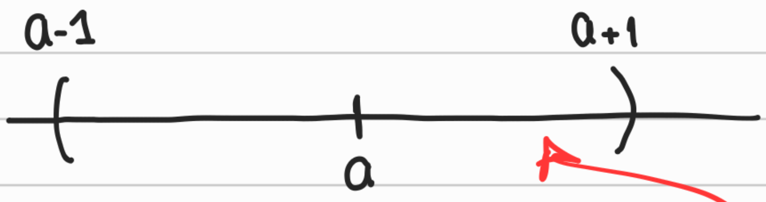
$$a_n = 1/n \qquad (1, 1/2, 1/3, 1/4 \ldots)$$

está acotada.

Prop: Toda sucesión convergente es **acotada.**

Demostración:

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$



$\varepsilon = 1$.

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots, \ldots, \boxed{x_{n_0}, x_{n_0+1}, x_{n_0+1}}$$

Para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$
$$|x_n - a| < 1$$

En otras palabras $x_n \in (a-1, a+1)$.

Sea b el mayor y c el menor de los elementos del conjunto <u>FINITO</u>

$$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-1}, a-1, a+1\}$$

b y c son cotas de la sucesión.

$$b = \operatorname{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, a-1, a+1\}$$

$$c = \operatorname{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0-1}, a-1, a+1\}$$

Mostremos que b es cota superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Basta mostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$x_n \leq b.$$

$$\downarrow$$

i) $n \geq n_0$ $\quad x_n \in (a-1, a+1)$

$x_n < a+1 \leq b$ ✓

ii) $n < n_0$ $\quad x_n \in \{x_1 \dots x_{n_0-1}\}$

$x_n \leq b$

(Ejemplo) $x_n = (-1)^{n+1}$ $\quad (1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots)$

x_n es acotada y no converge

Obs: $x_n \to a$ $\quad \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0$
$|x_n - a| < \varepsilon.$

Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge cuando no converge, es decir cuando

$\lim_{n\to+\infty} x_n$ no existe o no es finito

x_n es divergente $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ no existe} \\ \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ no es finito.} \end{cases}$

Son tres casos:

1) $\lim_{n\to+\infty} x_n$ no existe, por ejemplo cuando x_n es alternante

2) $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ o $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ $\quad (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots \ldots)$

existir x_{n_0}

$\forall L \in \mathbb{R}^+$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$
$x_n > L$ $\quad L \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$

$\forall L \in \mathbb{R}^-$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$
$x_n < L$

Algebra de la sucesiones convergentes

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales convergentes

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \quad y \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = b$$

1) $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $a+b$.

2) $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $a.b$

3) $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a/b

4) $\lambda\in\mathbb{R}$ $(\lambda a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge λa

Demostración:

Demostremos que $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a+b$.

Sea $\varepsilon>0$, debemos encontrar un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n\geq n_0$ $|a_n+b_n-(a+b)|<\varepsilon$

$$|a_n+b_n-(a+b)| = |\underbrace{a_n-a}_{} + \underbrace{b_n-b}_{}| \leq |a_n-a|+|b_n-b|$$

Para este $\varepsilon>0$ dado, considero $\varepsilon/2$

$(a_n)\to a \Rightarrow$ Para $\varepsilon/2$, existe $n_1\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq n_1$ $|a_n-a|<\varepsilon/2$
$(b_n)\to b \Rightarrow$ Para $\varepsilon/2$, existe $n_2\in\mathbb{N}$ $\forall n\geq n_2$ $|b_n-b|<\varepsilon/2$

Tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Resumen

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales.

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L, o tiene límite L, si para cada $\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $|a_n-L|<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Si dicho límite existe, **es único.**

2. Si (a_n) no converge, entonce **diverge.**

2.1 $\lim a_n=+\infty$
$\forall K>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n>K$ $\forall n\geq n_0$.

2.1 $\lim a_n=-\infty$
$\forall K<0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $a_n<K$ $\forall n\geq n_0$

2.3 $\lim a_n$ no exista. (Alternante).

3. Definición de Sucesión acotada
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada si existe $K\in\mathbb{R}^+$ tal que
$|a_n|\leq K$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

La sucesión esta contenida en un intervalo.

4. (Teorema) Todo sucesión convergente es acotada.

5. (Algebra de Convergencia)

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones convergentes a L y $M \in \mathbb{R}$. Se cumple entonces

$$(a_n)\to L \qquad (b_n)\to M$$

5.1 $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L+M$

5.2 $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $L\cdot M$

5.3 $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L/M $(M\neq 0)$ $(b_n\neq 0)\ \forall n\in\mathbb{N}$.

5.4 Si $c\in\mathbb{R}$, entonces $(c a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cL.

Ejemplo: (Ejercicio Desarrollo I parcial II-24).

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones de números reales.

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to L$ y $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$, demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to L$

Demostración: Obj: Demostrar que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \to L$

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ (?)$ tal que $\forall n\geq n_0$
$$|b_n - L| < \varepsilon.$$

Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to L$, para este $\varepsilon/2$ existe un $n_1\in\mathbb{N}$

tal que $\forall n\geq n_1$ $|a_n - L| < \varepsilon/2$

Como $(a_n - b_n) \to 0$ para $\varepsilon/2$ existe un $n_2 \in \mathbb{N}$

tal que $\forall n \geq n_2 \quad |(a_n - b_n) - 0| < \varepsilon/2$

Tomo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$\forall n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

$$|b_n - L| = |\underline{b_n - a_n} + \underline{a_n - L}|$$

$$\leq |b_n - a_n| + |a_n - L|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

<u>Otra forma</u>:

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n - (a_n - b_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

$\downarrow$ Algebra de sucesiones

$a_n \to L \qquad (a_n - b_n) \to 0$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \to L$$

<u>ERROR</u>!!

Opts

$$(a_n - b_n) \to 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} a_n - b_n = 0$$

$$\cancel{\lim_{n \to +\infty} a_n} - \lim_{n \to +\infty} b_n = 0 \implies \lim_{n \to +\infty} b_n = L$$

L