CLASE 7 — 21/03/25

Sucesiones

Definición: Una sucesión de números reales es una función

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightsquigarrow a(n) := a_n$$

El elemento $a(n) = a_n$ se denomina término n-ésimo de la sucesión, y se denota por a_n. Denotamos a la sucesión por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Notación: Se escribe $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ ó $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para indicar la sucesión cuyo término n-ésimo es a_n.

Observación: No debe confundirse la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ de sus términos.

Por ejemplo la sucesión $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ No es lo mismo que el conjunto $\{1\}$.

Por ejemplo las sucesiones $(0, 1, 0, 1, 0, \dots)$ y $(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ son diferentes pero el conjunto de sus términos es el mismo, igual a $\{0, 1\}$.

Definición: Se dice que el número real a es el límite de la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cuando para todo número real $\varepsilon>0$, dado arbitrariamente, se puede obtener $n_0\in\mathbb{N}$ tal que todos los términos x_n con índice $n>n_0$ cumplen la condición $|x_n-a|<\varepsilon$.

Se escribe entonces $a=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

Observación: Esta importante definición significa que, para valores muy grandes de n, los términos x_n permanecen próximos a "a" cuanto se desee.

Más precisamente, dado un error $\varepsilon>0$, existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que todos los términos de la sucesión con índice $n>n_0$ son valores aproximados de "a" con un error menor a ε.

En símbolos

$$a=\lim_{n\to+\infty} x_n \equiv \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N} : n>n_0 \Rightarrow |x_n-a|<\varepsilon.$$

Así, decir que $a=\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ significa que

cualquier intervalo abierto centrado en a contiene todos los términos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la sucesión excepto un número finito de éstos (a saber, los de índice $n\leq n_0$).

Otras notaciones

$$a=\lim_{n\to+\infty} x_n, \quad a=\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n, \quad x_n\to a$$

Ejemplo: (I parcial II Semestre 2024)

Demostrar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Sea $\varepsilon>0$, debemos encontrar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ $|a_n - 0| < \varepsilon$

Es decir, tal que $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Basta tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

Esto siempre es posible hacerlo pues los $\mathbb{N}$ no son acotados superiormente.

Otra forma es tomar $n_0 = \left[\!\left[\frac{1}{\varepsilon} \right]\!\right] + 1$

$\downarrow$

denota la parte entera de $1/\varepsilon$.

$\varepsilon << 1$

$\varepsilon = 1.05$ $\qquad$ $n_0 = 1, 2, 3$

$a_n = \frac{1}{n}$ $\qquad$ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$

$n_0 = 1$ $\qquad$ $n_0 = 100$

$\varepsilon << 1$