Clase 6

19/03/25.

Ecuaciones Diferenciales

$$y' + P(x)\,y = Q(x)$$

Teorema (Ecuaciones lineales de primer orden)

La solución general de la ecuación no homogénea se obtiene como la solución general de la correspondiente ecuación homogénea, más una solución particular.

Otra versión:

Teorema: Sean $P, Q : I \to \mathbb{R}$ funciones continuas (I un intervalo). Si $a \in I$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces existe una función $y = y(x)$ que es solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ y(a) = b \end{cases}$$

Dada por

$$y(x) = b\,e^{-\int_a^x P(t)\,dt} + e^{-\int_a^x P(t)\,dt} \int_a^x Q(t)\, e^{\int_a^t P(u)\,du}\,dt$$

Ejemplo:

$$y' - 3y = 6 \qquad \begin{aligned} P(x) &= -3 \\ Q(x) &= 6 \end{aligned}$$

Homogénea

$$y' - 3y = 0$$

$$y' = 3y \qquad y_H$$

$$\int \frac{y'\,dx}{y} = 3\int dx \qquad |y| = e^{3x + C}$$

$$y_H = k\,e^{3x}$$

Solución particular (ojo)

de $y' - 3y = 6$ $\qquad y_p = -2$

Por lo tanto,

$$y = y_H + y_P = -2 + ke^{3x} \qquad -\infty < x < \infty.$$

<u>Ejemplo:</u> $xy' - 4y = x^6 e^x$

$$y' - \frac{4}{x} y = x^5 e^x$$

$$P(x) = -\frac{4}{x} \qquad Q(x) = x^5 e^x$$

<u>Homogénea:</u>

$$y' - \frac{4}{x} y = 0 \qquad y_H = kx^4 \qquad k \in \mathbb{R}$$

Verificar

<u>Solución Particular</u> $y_P = \underline{k(x)} x^4$

k función de x.

$k = k(x)$

Como y_p es solución de la ecuación

$$y_p' - \frac{4}{x} y_p = x^5 e^x$$

$$y_p(x) = \underbrace{k(x)}\,\underbrace{x^4}$$

$$y_p'(x) = k'(x)x^4 + 4k(x)x^3$$

$$k'(x)x^4 + 4k(x)x^3 - \frac{4}{x} k(x)x^4 = x^5 e^x$$

$$k'(x)x^4 + \cancel{4k(x)x^3} - \cancel{4k(x)x^3} = x^5 e^x$$

$$K'(x)x^4 = x^5 e^x$$

$$\boxed{K'(x) = xe^x}$$

$$K(x) = \int x e^x \, dx \overset{\text{Por partes}}{=} xe^x - e^x$$

$u = x \quad dv = e^x dx$

$du = dx \quad v = e^x$

$$K(x) = xe^x - e^x$$

$$\Rightarrow \; Y_p = (xe^x - e^x)x^4 = x^5 e^x - x^4 e^x$$

Solución no homogénea

$$y(x) = Y_H + Y_p$$

$$= Kx^4 - x^4 e^x + x^5 e^x \qquad \underline{K \in \mathbb{R}}$$

Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden.

Forma General

$$y'' + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = h(x)$$

$$a(x) = a \in \mathbb{R}$$
$$b(x) = b \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{y'' + ay'(x) + by(x) = h(x)}$$

con coeficientes constantes $(a, b \in \mathbb{R})$

I) $y'' + ay'(x) + by(x) = 0$ (Homogéneo).

Se plantea si existe una solución de la forma

$y = e^{mx}$

$$y(x) = e^{mx}$$
$$y'(x) = me^{mx}$$
$$y''(x) = m^2e^{mx}$$

$y'' + ay' + by = 0 \Rightarrow m^2e^{mx} + ame^{mx} + be^{mx} = 0$

$e^{mx}(m^2 + am + b) = 0$

$$\boxed{m^2 + am + b = 0}$$

Obs: La única forma en que $y = e^{mx}$ satisface $y'' + ay' + by = 0$ es cuando se elige m como una raíz de la ecuación

Casos

1) m_1 y m_2 reales y distintas
2) $m_1 = m_2$ reales e iguales
3) $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$, son complejos conjugados.

Obs: El espacio de solución de la ecuación $y'' + ay' + by = 0$ forma un subespacio vectorial de dimensión 2.

Caso 1: Base $\{e^{m_1x}, e^{m_2x}\}$ $m_1 \neq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$

$$Y_H = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x}$$

Caso 2: Base $\{e^{m_1x}, \underline{x}e^{m_1x}\}$ $m_1 = m_2$, $m_1 \in \mathbb{R}$

Caso 3: Base $\{ e^{\alpha x} \cos \beta x , \ e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \}$.

$m_1 = \alpha + i\beta$ $m^2 + am + b = 0$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$m_2 = \alpha - i\beta$

$$Y_H = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

Ejemplo: $4y'' + 4y' + 17y = 0$ $y(0) = -1$

$y'(0) = 2$

$$y'' + y' + \frac{17}{4} y = 0$$

$$a = 1 \quad b = \frac{17}{4}.$$

$y(x) = e^{mx}$ Ecuación Auxiliar

$$m^2 + m + \frac{17}{4} = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(17/4)}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-16}}{2} = -\frac{1}{2} \pm 2i$$

$m_1 = -\frac{1}{2} + 2i$ $m_2 = -\frac{1}{2} - 2i$ $\alpha = -1/2$ $\beta = 2$

Base $\{ e^{-x/2} \cos 2x , \ e^{-x/2} \operatorname{sen} 2x \}$

$$Y_H = C_1 e^{-x/2} \cos 2x + C_2 e^{-x/2} \operatorname{sen} 2x$$

$Y_H(0) = -1$ $C_1 e^{0} \cos 0 + \cancel{C_2 e^{0} \operatorname{sen} 0} = -1$

$C_1 = -1$

$Y_H'(0) = 2$ $C_2 =$ Calcular

Ecuaciones Diferenciales de segundo orden no homogeneas

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

$a, b \in \mathbb{R}$

Estrategia

1) Se calcula la solución general $Y_H(x)$ de la ecuación homogenea. ✓

Método de Selección

2) Se encuentra una solución particular $Y_p(x)$ de la ecuación $y'' + ay' + by = h(x)$

3) La solución general de $y'' + ay' + by = h(x)$ viene dada por

$$y(x) = Y_H(x) + Y_p(x).$$

$$h(x) = \begin{cases} e^{ax} P_n(x) & P_n(x) \text{ es un Polinomio de grado } n \\ e^{ax}\left[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \operatorname{Sen} bx \right] & P_n(x),\ Q_m(x) \text{ son polinomios de grado } n \text{ y } m. \end{cases}$$

Método

$$y'' + ay' + by = h(x)$$

$$Y(x) = Y_H(x) + Y_p(x)$$

$$\overset{\varphi}{\overset{\parallel}{m^2 + am + b = 0}}$$

Casos

$$h(x) = e^{\alpha x} P_n(x) \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha^2 + a\alpha + b \begin{array}{l} \nearrow 0 \\ \searrow \neq 0 \end{array}$$

Ejemplo

$$y'' + 3y' + 2y = e^{5x}(x^3 + 2x + 1).$$

$$\alpha = 5 \qquad P_n(x) = x^3 + 2x + 1$$

$\varphi(\alpha) = 0$

$\varphi(\alpha) \neq 0$

RESUMEN

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN.

FORMA GENERAL $y'' + P(x)y' + Q(x)y = h(x)$

P, Q y h funciones continuas.

Objetivos del Curso: Estudiar un caso particular cuando

$$P(x) = p \ \forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) = q \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$p, q \in \mathbb{R}.$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.

FORMA GENERAL $y'' + py' + qy = h(x).$

HOMOGÉNEAS $y'' + py' + qy = 0$

Obj: Buscar soluciones de la forma $y = e^{mx}$

Propiedad: El conjunto de soluciones de
$$y'' + py' + qy = 0$$
ES UN subespacio vectorial de dimensión 2.

PROCEDIMIENTO: Consideramos la ecuación característica asociada a $y'' + py' + qy = 0$.

$m^2 + pm + q = 0$ → Polinomio de grado 2 indeterminada m y coeficientes reales.

I Caso

$m_1 \neq m_2$ $\quad$ Base $\{e^{m_1 x}, e^{m_2 x}\}$

$m_1, m_2 \in \mathbb{R}$

II Caso

$m_1 = m_2 \in \mathbb{R}$ $\quad$ Base $\{e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}\}$

$m^2 + pm + q = 0 \qquad m_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$

Si $m_1 = m_2$, $\quad p^2 - 4q = 0$

$\rightarrow m_1 = -p/2$

Mostremos que $y(x) = xe^{m_1 x} = xe^{-px/2}$ es solución de

$y'' + py' + qy = 0$.

$$0 = y'' + py' + qy = \left(xe^{-px/2}\right)'' + p\left(xe^{-px/2}\right)' + qxe^{-px/2} =$$

$$\cancel{-pe^{-px/2}} + x\frac{p^2}{4}e^{-px/2} + \cancel{pe^{-px/2}} - x\frac{p^2}{2}e^{-px/2} + qxe^{-px/2}$$

$$- x\frac{p^2}{4}e^{-px/2} + qxe^{-px/2} = xe^{-px/2}\left[-\frac{p^2}{4} + q\right]$$

$$= -\frac{xe^{-px/2}}{4}\left[p^2 - 4q\right] \rightarrow 0$$

Resta mostrar que $\{e^{m_1 x}, xe^{m_1 x}\}$

es L. I. (Ejercicio).

III Caso

$m_1 = \alpha + i\beta$

$m_2 = \alpha - i\beta$

Base $\{e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x\}$.

Conclusión:

I Caso $\quad y_H(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$.

II Caso $\quad y_H(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x}$.

III Caso $\quad y_H(x) = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$.

ECUACIONES DIF DE SEGUNDO ORDEN NO HOMOGENEA CON COEFICIENTES CONSTANTES.

$$y'' + py' + qy = h(x)$$

$p, q \in \mathbb{R}$ Muy particular.

TEOREMA (PROCEDIMIENTO).

1. SE CALCULA LA SOLUCIÓN GENERAL $y_H(x)$ DE LA ECUACIÓN HOMOGENEA $y'' + py' + q = 0$

AYUDA: $\varphi(m) = m^2 + pm + q$

2. SE HALLA UNA SOLUCIÓN PARTICULAR $y_p(x)$ DE LA ECUACIÓN $y'' + py' + q = h(x)$

¿CÓMO? $y_p = ?$

1. A OJO.
2. MÉTODO DE LOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

3. LA SOLUCIÓN GENERAL DE $y'' + py' + qy = h(x)$ VIENE DADA POR

$$y(x) = y_H(x) + y_p(x)$$

$y'' + py' + q = h(x)$ $\qquad \varphi(m) = m^2 + pm + q$

I CASO $\quad h(x) = e^{ax} P_n(x)$

$\downarrow$ Polinomio de grado n.

Ejemplo

- $y'' + 2y' + 3y = e^{x}(x^4+1)$ $\qquad a = 1$
- $y'' + 3y' + y = x^2 + 2x + 1$ $\qquad a = 0$

- Si $\varphi(a) \neq 0$

Sol. particular candidata $\quad y_p(x) = e^{ax} Q_n(x)$

polinomio de grado n con coeficientes indeterminados

- Si $\varphi(a) = 0$

Sol particular candidata $\quad y_p(x) = x^r e^{ax} Q_n(x)$

$r :=$ es el grado de la multiplicidad de a EN φ.

$(r = 1$ o $2)$.

$$y'' + py' + qy = h(x) \qquad \varphi(m) = m^2 + pm + q$$

II Caso

$$h(x) = e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\operatorname{Sen} bx\right]$$

Polinomios

- Si $\varphi(a \pm ib) \neq 0$

Solución particular candidata $\quad y_p(x) = e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\operatorname{Sen} bx\right]$

$$N = \max\{n, m\}.$$

- Si $\varphi(a \pm ib) = 0$

Solución particular candidata $\quad y_p(x) = x e^{ax}\left[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\operatorname{Sen} bx\right]$

Ejemplo: $2y'' - y' - y = e^{2x}(4x)$

$$e^{2x} P_n(x)$$

$a = 2 \quad P_n(x) = 4x \quad n = 1.$

$2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$ $\boxed{y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{2x}}$

Paso 1 $\varphi(m) = m^2 - \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}$ $\quad p = -\frac{1}{2} \quad q = -1/2$

$m_1 = 1$

$m_2 = -1/2$

$$y_H(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x/2}.$$

Paso 2: Y_p de $y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 2xe^{2x}$

$$Y_p(x) = e^{2x} \underset{n=1}{Q_n(x)} = e^{2x}(Ax+B).$$

Obj: Encontrar A y B.

Paso 3: $y(x) = y_H(x) + Y_p(x).$

$$Y_p(x) = e^{2x}(Ax+B) \quad \text{satisface} \quad 2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$$

$$Y_p'(x) = Ae^{2x} + 2(Ax+B)e^{2x}$$

$$y_p''(x) = 4Ae^{2x} + 4(Ax+B)e^{2x}$$

$$2e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) - e^{2x}(2Ax + 2B + A)$$

$$- e^{2x}(Ax+B) = 4xe^{2x}$$

$$8Ax + 8B + 8A - 2Ax - 2B - A - Ax - B = 4x$$

$$5Ax + 5B + 7A = 4x + 0$$

$$5A = 4 \qquad A = 4/5$$

$$5B + 7A = 0 \qquad B = -7A/5 = -28/25$$

$$Y_p(x) = e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

$\blacksquare$