1

Clase 5

Ecuaciones diferenciales.

17/03/25

Ecuaciones Dif de Primer Orden

"Def": Expresión de la forma

$y' =$ "Expresión Algebraica que involucra a x y/o y"

Variables separadas

Lineales

Homogenea

No homogenea

Variables Separadas	Lineales	
	$y' + P(x)y = Q(x)$	
$y' = P(x)Q(y)$	Homogéneas	No Homogéneas
P, Q son funciones continuos	$Q(x) = 0$ $\Downarrow$ $y' + P(x)y = 0$ $y' = -P(x)y$ $Q(y) = y$	$Q(x) \neq 0$ Teorema 2.6 (Notas) + Método de variación de constantes.

(2) **Obs:** Toda ecuación diferencial de primer orden lineal homogénea

$$y' + P(x)y = 0$$

es de variables separados.

Ejercicio: La ecuación

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 - y)$$

es de variable separados.

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad Q(y) = y^2 - y.$$

pero **NO** es lineal.

Obs: Estas ecuaciones en variables separados siempre tienen solución.

$$y' = \frac{1}{x}(y^2 - y) \qquad\qquad y \longrightarrow x$$

$$\frac{y'}{y^2 - y} = \frac{1}{x} \qquad (y^2 - y \neq 0)$$

$$\int \frac{y'\,dx}{y^2 - y} = \int \frac{1}{x}\,dx + C = \ln|x| + C$$

③

$$u = y = y(x) \qquad u \rightarrow y \rightarrow x$$

$$du = y' dx$$

$$\int \frac{du}{u^2 - u} = \ln|x| + C \qquad (*)$$

$$\int \frac{du}{u^2-u} = \int \frac{du}{u(u-1)}$$

$$\int \frac{du}{u(u-1)} = \int \frac{du}{u-1} - \int \frac{du}{u} = \ln|u-1| - \ln|u|$$

$$(*) \quad \ln|u-1| - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|\frac{u-1}{u}\right| = \ln|x| + C$$

$$\ln\left|1 - \frac{1}{u}\right| = \ln|x| + C$$

$u = y$

$$\ln\left|1 - \frac{1}{y}\right| = \ln|x| + C$$

$$\left|1 - \frac{1}{y}\right| = e^{(\ln|x| + C)} = e^{\ln|x|} \cdot \cancel{e^{C}} \; K$$

$$\left|1 - \frac{1}{y}\right| = K e^{\ln|x|} = K|x|$$

$$1 - \frac{1}{y} = \pm K|x|$$

4

$$1 - \frac{1}{y} = K_0 |x| \qquad K_0 \in \mathbb{R}.$$

$$1 - K_0|x| = \frac{1}{y}$$

$$\boxed{y_{K_0} = \frac{1}{1 - K_0|x|}.}$$

Ejemplo: Pérdida de una solución.

Resolver $y' = y^2 - 4$

$$y' = y^2 - 4$$

$y^2 - 4 \neq 0$

$$\frac{y'}{y^2-4} = 1 \qquad \int \frac{y'\,dx}{y^2-4} = \int dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2-4} = \int dx + c$$

$$\int \frac{1}{y^2-4} = \int \frac{1/4}{y-2} - \frac{1/4}{y+2}$$

$$\frac{1}{4} \ln|y-2| - \frac{1}{4} \ln|y+2| = x + C$$

$C_1 = 4C$

$$\ln|y-2| - \ln|y+2| = 4x + C_1$$

$$\ln\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = 4x + C_1$$

5

$$\left|\frac{y-2}{y+2}\right| = e^{(4x+c_1)}$$

$$\frac{y-2}{y+2} = ce^{4x}$$

Otra forma

$$y-2 = yce^{4x} + 2ce^{4x}$$

$$y - yce^{4x} = 2 + 2ce^{4x}$$

$$y(1-ce^{4x}) = 2 + 2ce^{4x}$$

$$y = \frac{2(1+ce^{4x})}{1-ce^{4x}}$$

$$\frac{y+2-4}{y+2} = ce^{4x}$$

$$\frac{y+2}{y+2} - \frac{4}{y+2} = ce^{4x}$$

$$1 - \frac{4}{y+2} = ce^{4x}$$

$$1 - ce^{4x} = \frac{4}{y+2}$$

$$y+2 = \frac{4}{1-ce^{4x}}$$

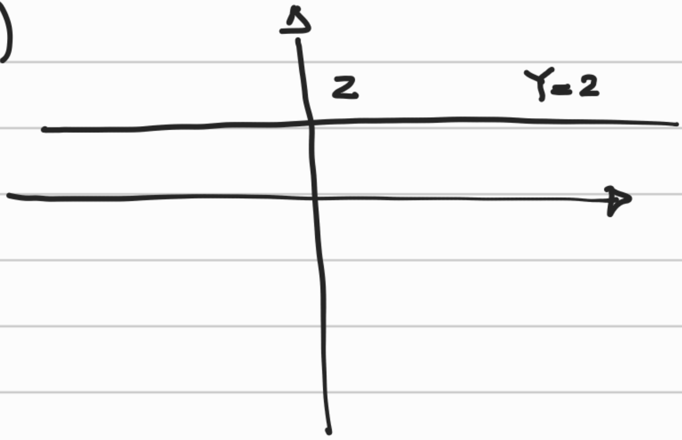
$$y = \frac{4}{1-ce^{4x}} - 2$$

$$y = \frac{4 - 2 + 2ce^{4x}}{1-ce^{4x}}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{2(1+ce^{4x})}{1-ce^{4x}} \\ y = -2 \end{cases}$$

(6) $\boxed{y' = y^2 - 4}$ ✓

$y = y(x)$



$Y = 2$

$y' = 0$

$y^2 - 4 = 0$

$y = 2$ es solución

¿Cuál es el c que me da la solución $y=2$?

$C=0$ ✓

$y = -2$ $\qquad y' = 0 = y^2 - 4 = 0$

¿Cuál es el c que me da la solución $y=-2$?

$$\frac{1+ce^{4x}}{1-ce^{4x}} = -1 \qquad 1+\cancel{ce^{4x}} = -1+\cancel{ce^{4x}}$$

$1 = -1$ NO

15

7

Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneos.

$$(*) \quad y' + P(x)y = Q(x)$$

funciones continuos en la variable x.

Teorema: (Notas pag 27).

La solución general de la ecuación $(*)$ se obtiene como la solución general de la correspondiente ecuación homogenea, más una solución particular.

Paso 1: $Y_H(x)$ solucion de $y' + P(x)y = 0$

$$Y_H(x) = k e^{-\int P(x)dx} \qquad k \in \mathbb{R}$$

Paso 2: Encontrar una solución particular Y_p de $y_p' + P(x)\, y_p = Q(x)$

Paso 3: $Y_H + Y_p$

Espacio vectorial $V :=$ Espacio de todas la funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

$$(V, +, \cdot) = V$$

S = Subespacio de V := Conjunto de todas los soluciones de $Y' + P(x)\, y = 0$

8 i) $\hat{0} \in S$ $\qquad y = 0 \in S$

ii) $y_1, y_2 \in S$

$$\begin{array}{l} y_1' + P(x)\,y_1 = 0 \\ y_2' + P(x)\,y_2 = 0 \\ \hline y_1' + y_2' + P(x)(y_1 + y_2) = 0 \\ (y_1 + y_2)' + P(x)(y_1 + y_2) = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow y_1 + y_2 \in S$ ✓

iii) $\lambda \in \mathbb{R}$ $y \in S$ $\Rightarrow$ $\lambda y \in S$.

$$\boxed{\dim(S) = 1}$$

RESUMEN

1. Ecuaciones Diferenciales de primer orden de variables separadas

Forma general $\boxed{y' = Q(x)R(y)}$

donde Q y R son funciones de valores reales, y continuas.

TEOREMA: Sea $y' = Q(x)R(y)$ una ecuación diferencial de primer orden de variables separadas, con Q y R continuas y $R \neq 0$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) $y(x)$ es solución de $y' = Q(x)R(y)$.
2) $y(x)$ satisface la igualdad

$$G(y) = \int Q(x)dx + k$$

donde G es una primitiva de la función $1/R(y)$.

Obs: Estas ecuaciones siempre tienen solución.

2) Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Forma general
$$\boxed{y' + P(x)\, y = Q(x)}$$

Homogénea si $Q(x) = 0$, no homogénea en caso contrario.

I caso: Homogénea

Sea $P: I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I y sean $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$. Entonces, existe una única función $y = y(x)$ que es solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + P(x)\, y = 0 \\ y(a) = b \end{cases}$$

Donde $y(x) = b\, e^{\int_a^x P(t)\,dt}$

II caso: No homogénea