Clase 23 19/05/25

Continuidad en $\mathbb{R}^n$

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Límite de $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

P acumulación del Dominio de $f$

$$\lim_{x \to p} f(x) = L \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

$L \in \mathbb{R}$.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$

$$\forall x \in B^*(p, \delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

- $f$ es continua en $p \in \mathrm{Dom} f$.

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in B(p, \delta) \rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Teorema 6.9 Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$a \in D$.

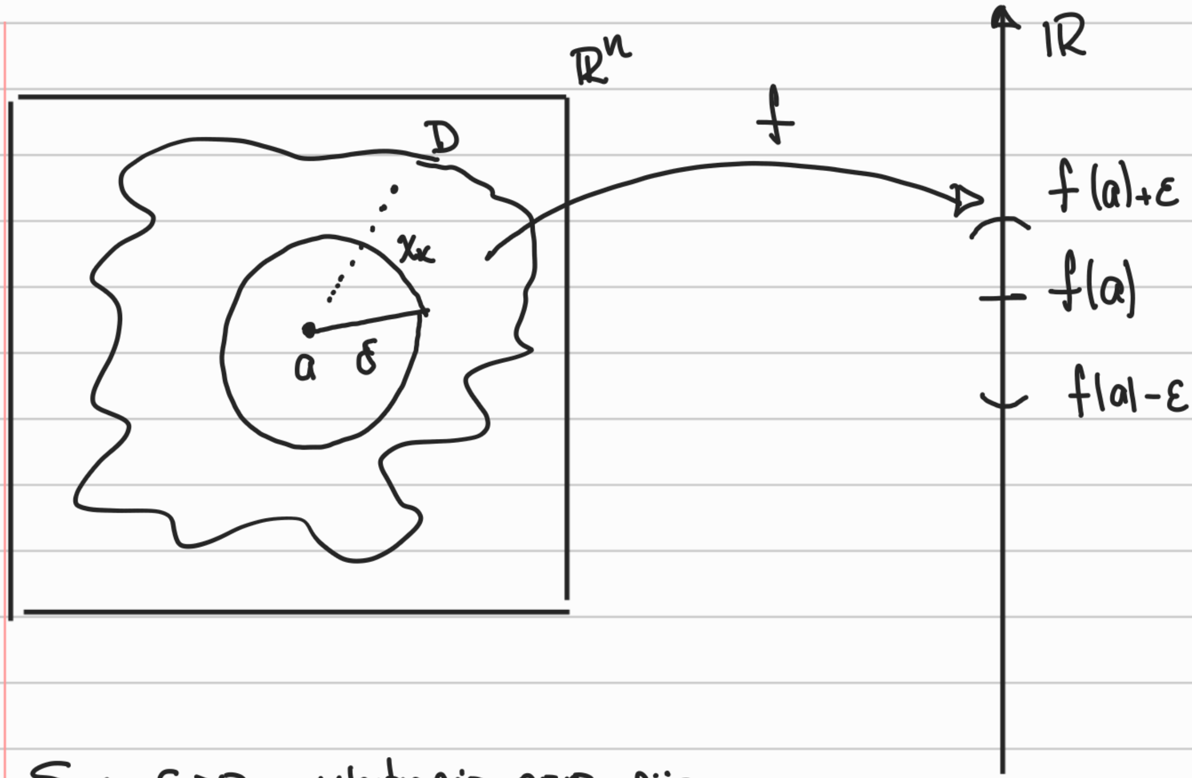
$f$ es continua en $a$ $\Longleftrightarrow$ Para sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de elementos de $D$ tal que $x_k \to a$, tenemos que

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = f(a)$$

Demostración:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $f$ es continua en $a$. y sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ (Especificamente en $D$). que $x_k \to a$.

Obj: Mostrar que $f(x_k) \to f(a)$.




Sea $\varepsilon>0$, arbitrario pero fijo.

Obj encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal $\forall k \geq k_0$

$$f(x_k) \in (f(a)+\varepsilon, f(a)-\varepsilon)$$
$$\Updownarrow$$
$$|f(x_k)-f(a)|<\varepsilon.$$

Para este $\varepsilon>0$, por la continuidad de $f$ en $a$. existe $\delta>0$ tal que

$$\forall x \in B(a,\delta) \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon.$$

Para este $\delta>0$ encontrado y usando que $x_k \to a$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$

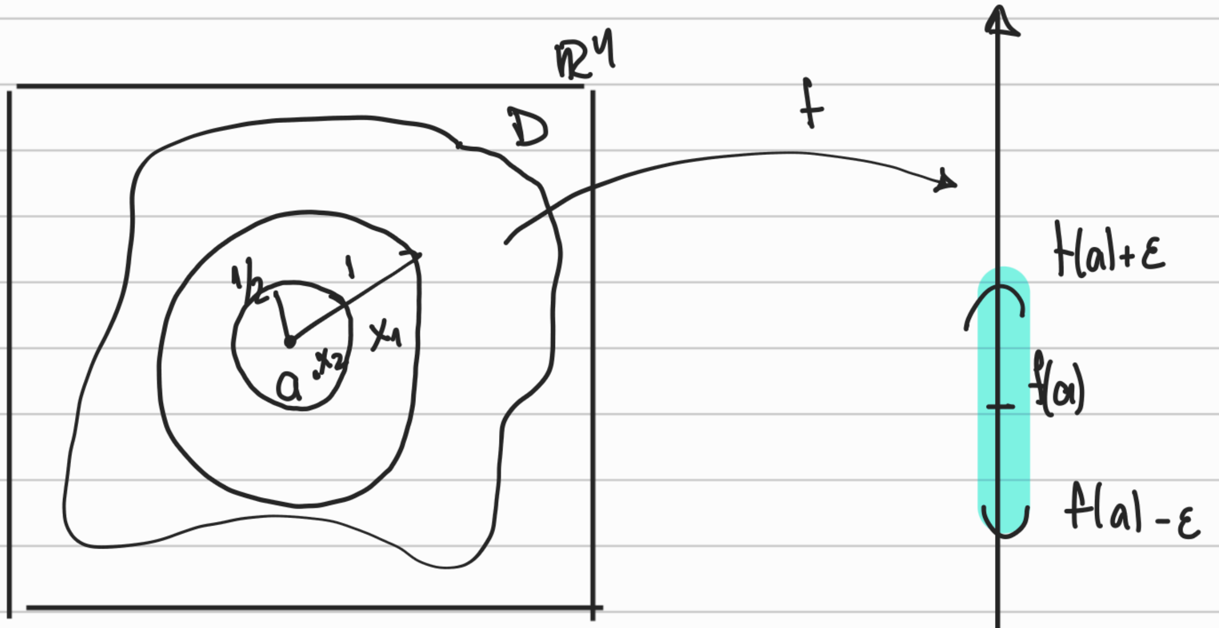
$$x_k \in B(a,\delta).$$

y por lo tanto para este $k_0$ se cumple lo pedido

$\boxed{\Leftarrow}$ Por absurdo suponemos que $f$ no es continua en $a$. En otras palabras

$\exists \varepsilon>0$ tal que $\forall \delta>0$ existe al menos un $x \in B(a,\delta)$

tal que $f(x) \notin (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$




$\delta_k = \frac{1}{k}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$K=1 \rightsquigarrow$ existe $x_1 \in D$ tal que $f(x_1) \notin (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$

$K=2 \rightarrow$ existe $x_2 \in D$ tal que $f(x_2) \notin (f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon)$

$\vdots$

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to a$ pero $f(x_k) \not\to f(a)$

Álgebra de las funciones continua

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en $a$

$g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en $a$

$\Rightarrow$ $f \pm g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua en $a$

$f \cdot g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ " " "

$f/g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ " " " si $g(a) \neq 0$.

Teorema:

$\downarrow$ continua $\quad\quad$ $\downarrow$ continua.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, dotted, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$g\circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\downarrow$ continua.

Si $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $a$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua $f(a)$, entonces

$$g \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ es continua en } a.$$

<u>Ejemplo:</u> Estudiar la continuidad de

$$h(x,y) = \operatorname{Sen}\left(\frac{xy}{x^2+y^2+1}\right). \qquad h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\operatorname{Dom} h = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{xy}{x^2+y^2+1} & \longmapsto & \operatorname{Sen}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}\right) \end{array}$$

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2+1} \qquad g(t) = \operatorname{Sen}(t)$$

$$\boxed{g \circ f = h}$$

continua continua

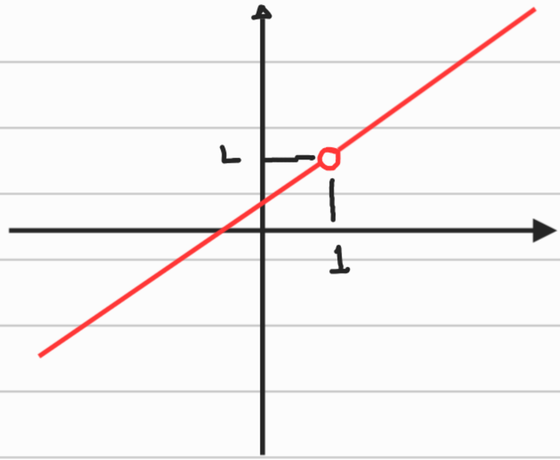
<u>$h$ es continua en $\mathbb{R}^2$</u>

<u>Definición:</u> Dominio de continuidad de $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ en el cual la $f$ es continua.

Dominio de continuidad de $f \subseteq \operatorname{Dom} f$.

Obs:

$f: \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$



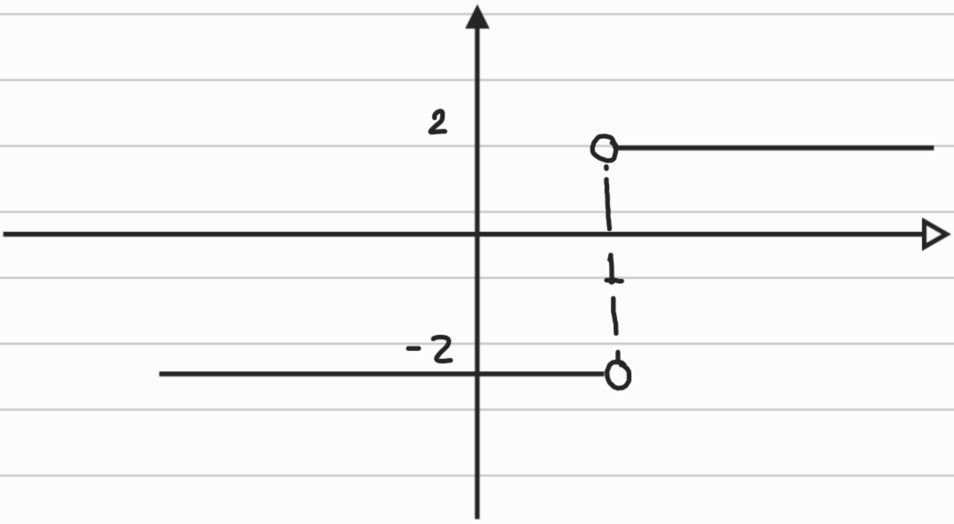

Existe una extensión de f tal que sea continua?

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua

$$F\Big|_{\mathbb{R}-\{1\}} = f$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ \lim_{x \to 1} f(x) & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Si, se puede hacer y se define ↑




$f\ \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 1 \\ -2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1^-} f = -2 \neq 2 = \lim_{x \to 1^+} f \rightarrow \lim_{x \to 1} f$ NO existe

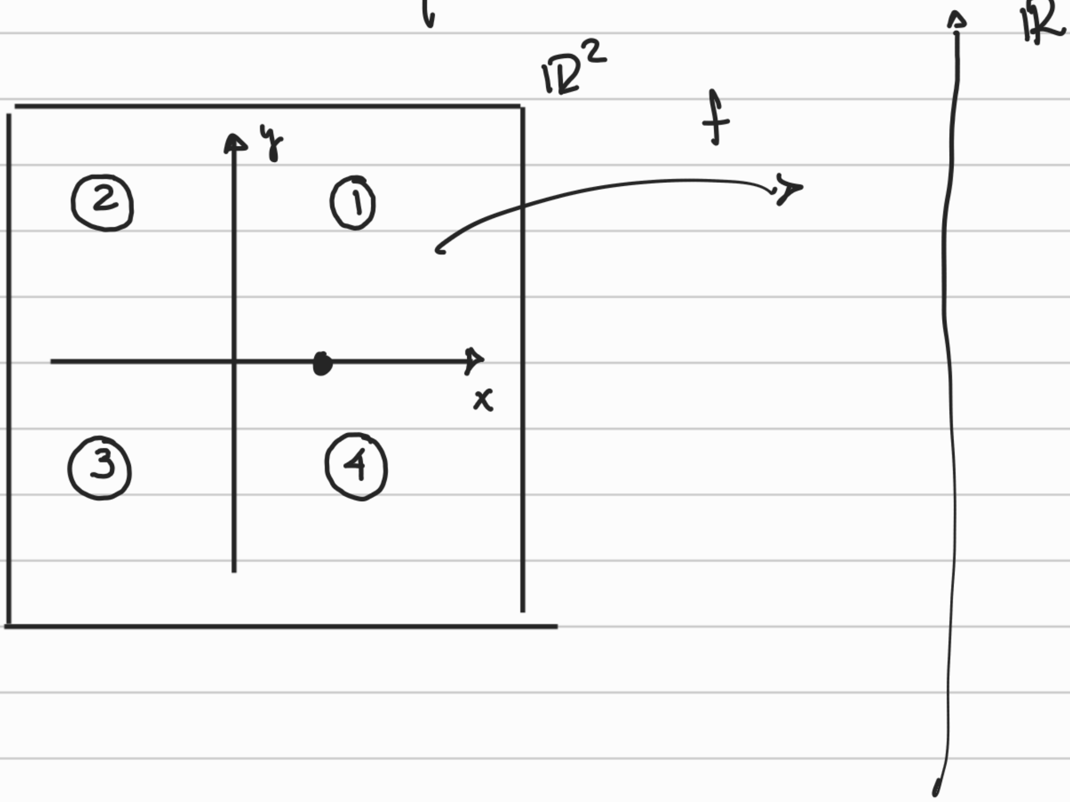
$$F = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 1 \\ \boxed{\phantom{xx}} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

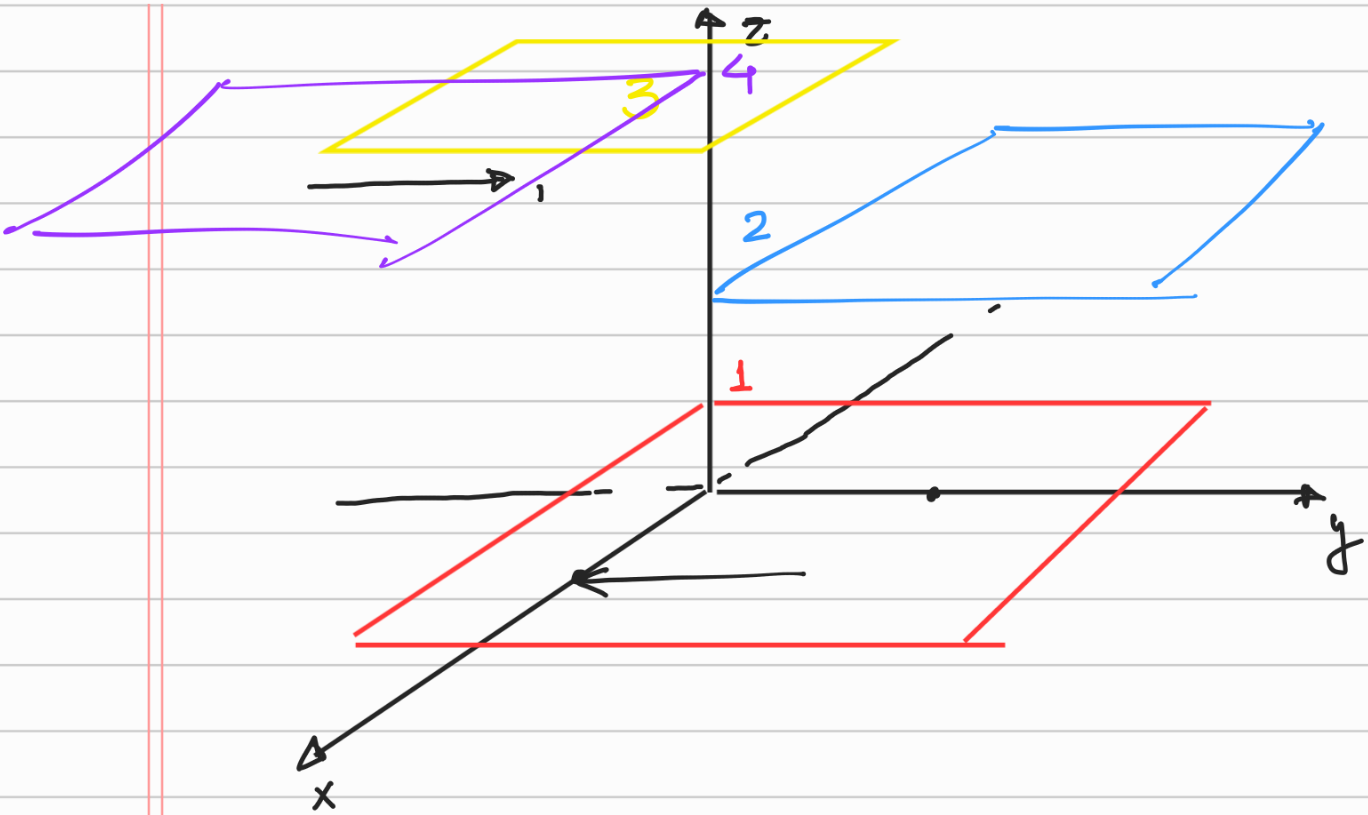
?

No existe una extensión continua de f.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \text{ y } y>0 \\ 2 & \text{si } x<0 \text{ y } y>0 \\ 3 & \text{si } x<0 \text{ y } y<0 \\ 4 & \text{si } x>0 \text{ y } y<0 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$



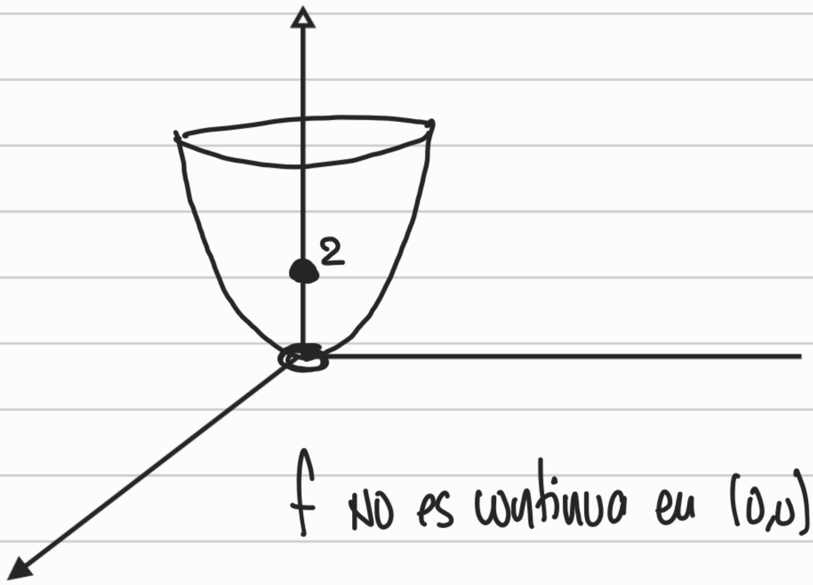



Dominio de continuidad de f = $\mathbb{R}^2 - \{\text{Eje } x \cup \text{Eje } y\}$.

Ejemplo.

$$z = f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 2 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$z = x^2+y^2$




f NO es continua en (0,0)

$$\begin{matrix} 2 \\ \| \\ f(0,0) \end{matrix} \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} f \text{ existe y es cero}$$