

límite y continuidad

Límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$\forall (x,y) \in B^*((x_0,y_0), \delta)$ se cumple

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

* Si el límite existe entonces es único.

Continuidad

f es continua en (x_0, y_0) si

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y)$ existe

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$

Estrategia: Calcular límites

Demostar existencia

1) Definición de ε - δ

2) Regla del Encaje

3) Polares

Demostar no existencia.

1) Definición ε - δ

2) Trayectorias

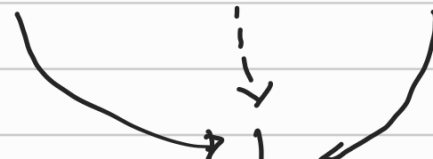
Obj: Encontrar dos tray.
tales que sobre ellos el
límite de la f tome distintos
valores

3) Polares

TEOREMA: SEA $P = (x_0, y_0)$ y $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x,y) = L = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} h(x,y)$$

Además se verifica que $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$
en un entorno del punto (x_0, y_0)

$$g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$$


En particular

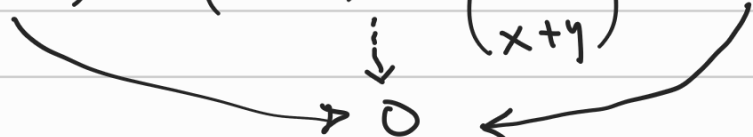
El producto de una función acotada por otra que
tiene límite CERO, también tiene límite y ES CERO

Ejemplo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) \operatorname{Sen} \left(\frac{1}{x+y} \right) = 0$$

$$\underbrace{(x^2+y^2)}_{\downarrow 0} \underbrace{\operatorname{Sen} \left(\frac{1}{x+y} \right)}_{\text{función acotada}}$$

$$-1 \leq \operatorname{Sen} \left(\frac{1}{x+y} \right) \leq 1$$

$$-(x^2+y^2) \leq (x^2+y^2) \operatorname{Sen} \left(\frac{1}{x+y} \right) \leq x^2+y^2$$


Observación: Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función que se pueda descomponer

$$f(x, y) = f_1(x) \odot f_2(y) \quad \odot = \begin{cases} + \\ - \\ \cdot \\ / \end{cases}$$

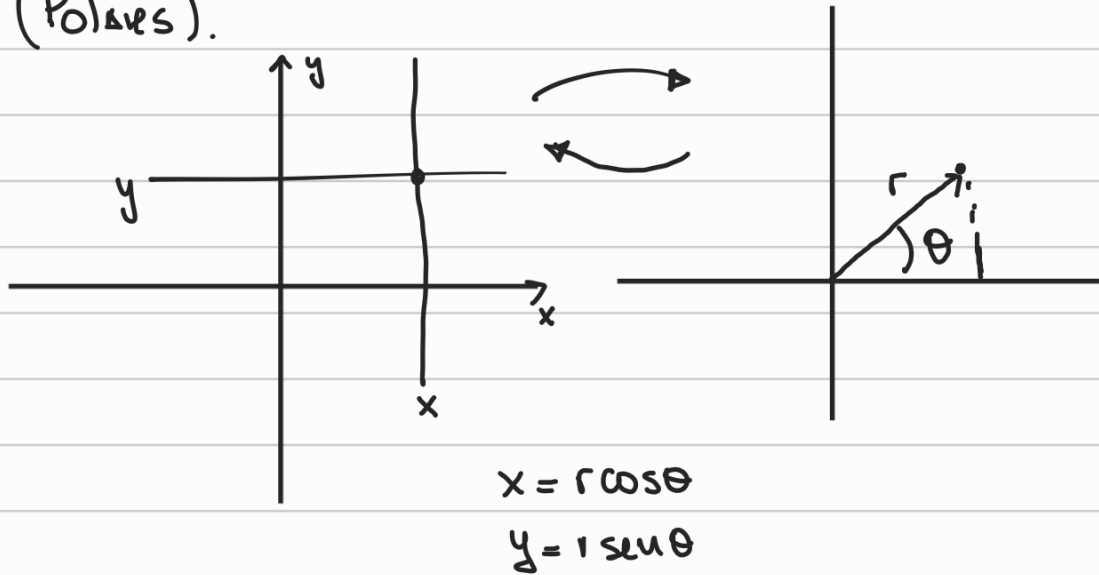
Ejemplo: $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{xy}$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin x \sin y}{xy} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin y}{y} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin y}{y} = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo $f(x, y) = \frac{\arcsin(x+y)}{x^2y + y^3}$ no tiene una descomposición como la anterior.

Cambios de Variables

(Polares).



ojo

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Ejemplos:

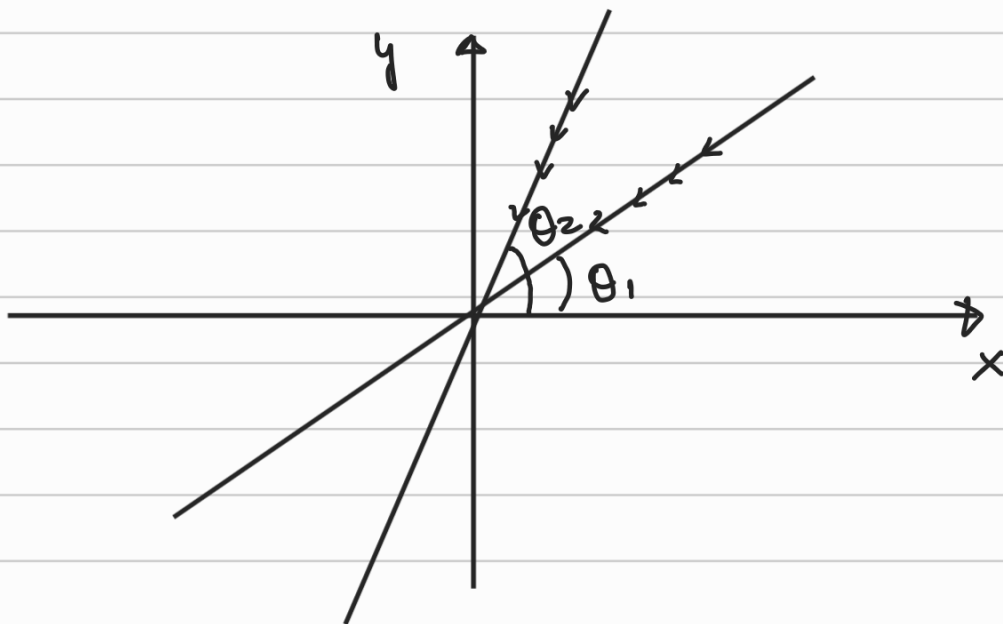
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (\text{No existe})$$

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \frac{\cancel{r^2} \cos \theta \sin \theta}{\cancel{r^2}}$$

$$= \cos \theta \sin \theta. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Esto demuestra que el valor del} \\ \text{limite depende del } \theta \text{ y por} \\ \text{lo tanto no existe} \end{array}$$
$$0 \leq \theta < 2\pi$$

$$\theta = 0 \quad \cos 0 \sin 0 = 0$$

$$\theta = \pi/4 \quad \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{4} \neq 0$$



Polars

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

↓ cambio a Polars

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = h(r) \cdot \kappa(\theta)$$

↓
0

↓
Austand

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Ejemplo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0.$

$$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} \frac{\cancel{r^2} \cos^2 \theta \cancel{r} \sin \theta}{\cancel{r^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot \cos^2 \theta \sin \theta = 0$$

Continuidad. $P = (x_0, y_0) \in \text{Dom } f$.

f ES CONTINUA EN $P = (x_0, y_0)$ si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Observación: Práctico 3

Ej 11 Probar que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $a \in \mathbb{R}$
y $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua en a , entonces

$$(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f(a).$$

$$a_n \rightarrow a$$

$$f(a_n) \rightarrow f(a)$$

Definición. Sucesiones en el plano y en el espacio.

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

ES UNA FUNCIÓN QUE ASIGNA
A CADA $n \in \mathbb{N}$ el valor
 $a_n \in \mathbb{R}^k$

Ejemplos:

$$a_n = (e^n, n+3) \quad \text{EN } \mathbb{R}^2$$

$$a_0 = (e^0, 0+3) = (1, 3)$$

$$a_n^1 = e^n$$

$$a_1 = (e^1, 1+3) = (e, 4)$$

$$a_n^2 = n+3$$

$$a_2 = (e^2, 215) = (e^2, 5)$$

$$(1,3); (e,4); (e^2,5); \dots \rightarrow$$

$$a_n = (2 + 2/n, \log(n), 4n^2 + n + 2) \text{ en } \mathbb{R}^3$$

$$a_n^1 = 2 + 2/n \quad a_n^2 = \log(n) \quad a_n^3 = 4n^2 + n + 2.$$

$$a_1 = (2+2, \log(1), 4+1+2) = (4, 0, 7)$$

$$a_2 = (2+1, \log(2), 4+2+2) = (3, \log 2, 20).$$

Para cada sucesión a_n en $\mathbb{R}^k$ existen una sucesión de reals que la determinan.

Notación: SEA a_n una sucesión en $\mathbb{R}^k$

$$a_n = (a_n^1, a_n^2, \dots, a_n^k)$$

$$a_n^1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_n^2: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

:

$$a_n^k: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

Definición Una sucesión a_n en $\mathbb{R}^k$ converge a $L \in \mathbb{R}^k$

si para todo $\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a_n - L\| < \varepsilon$

$$\forall n \geq n_0$$

Decimos que $C_n \rightarrow L$

Teorema 6.9 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad a \in \mathbb{R}^2$

f es continua en $a \iff$ Para toda sucesión x_n
de puntos en el dominio
tales que

$$x_n \rightarrow a = (a_1, a_2)$$

se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a).$$