Clase 20 12/05/2025

funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definición: Una función $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una regla que asigna de manera única a cada elemento $(x_1, .., x_n)$ un número real $f(x_1, x_2 .., x_n)$.

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{(x_1, .., x_n)}_{\text{variables independientes}} \rightsquigarrow \underbrace{f(x_1, .., x_n)}_{\text{variable dependiente}}.$$

Ejemplo:

$\boxed{n=2}$

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow z = f(x,y).$$

dependiente $\to z \to x, y \to$ independientes

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3$$

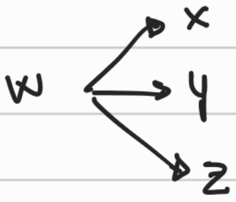
$$z = f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 + 3$$

$f(0,0) = 3$

$f(1,0) = 1 + 3 = 4.$

$\boxed{n=3}$

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow w = f(x,y,z)$$



Ejemplos:

$$f_1(x,y,z) = \operatorname{Sen}(x+y+z)$$

$$f_2(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x-y+z}$$

Obs:

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\operatorname{Dom} f \subseteq \mathbb{R}^n$

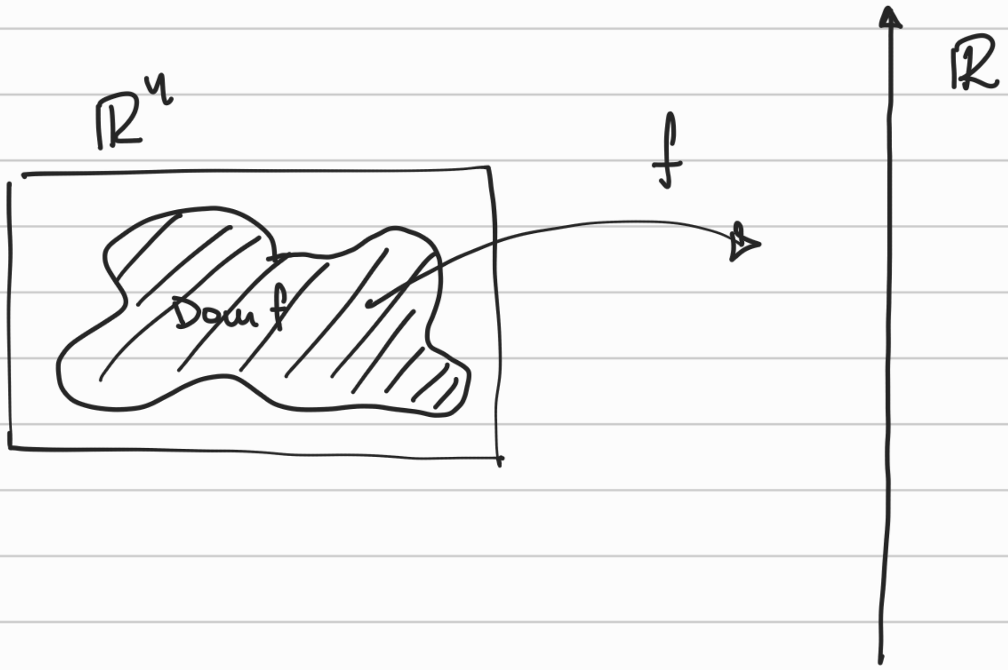
$\parallel$

Es el subconjunto más grande de $\mathbb{R}^n$ para el cual la regla f tiene sentido.

$\operatorname{Rango} f \subseteq \mathbb{R}$

$\parallel$

$c \in$ Rango de f si existe al menos una $(x_1,\ldots,x_n) \in \operatorname{Dom} f$ tal que $f(x_1,\ldots,x_n) = c$.



Def: Diremos que $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son iguales si

i) Regla que define a f es igual a la regla que define a g.

ii) $\text{Dom} f = \text{Dom} g$.

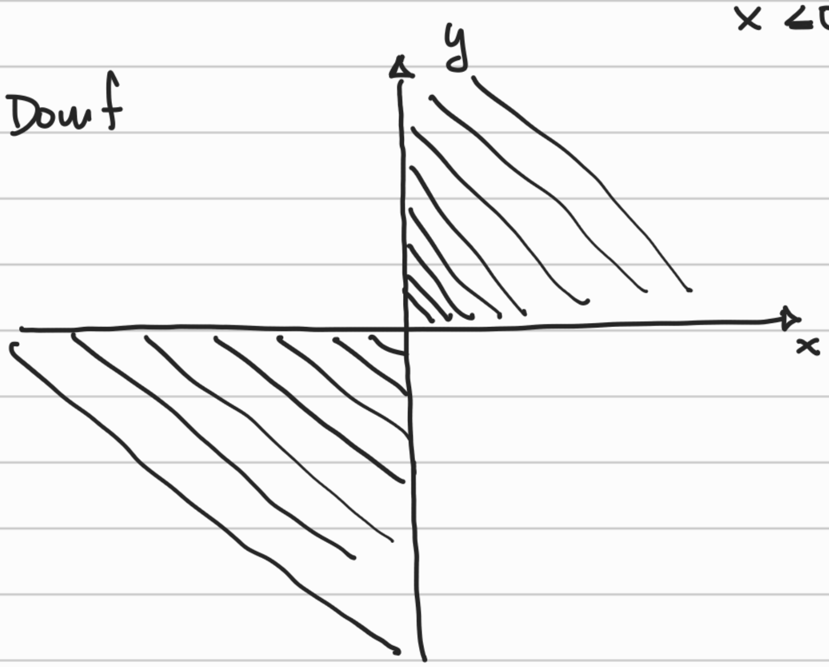
Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$f(x,y) = \sqrt{xy}$$

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$$g(x,y) = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

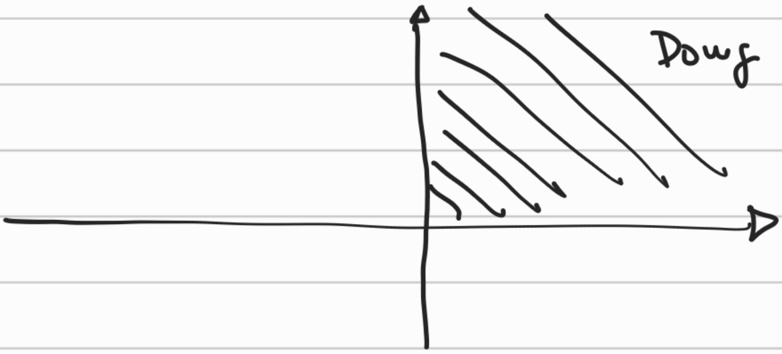
¿ $f = g$?

$$\text{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \text{ y } y \geq 0 \text{ o } x \leq 0 \text{ y } y \leq 0\}$$

Dom f



$\text{Dom}\, g = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \;\; y \geq 0 \}$



$\text{Dom}\, f \neq \text{Dom}\, g$

$\Rightarrow \quad f \neq g$

<u>Definición:</u> Sea $f : \text{Dom}\, f \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$\text{Gra}\, f = \{ (x_1, x_2, \ldots x_n, w) \in \mathbb{R}^{n+1} : w = f(x_1, \ldots, x_n) \}$

<u>Ejemplo:</u>

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

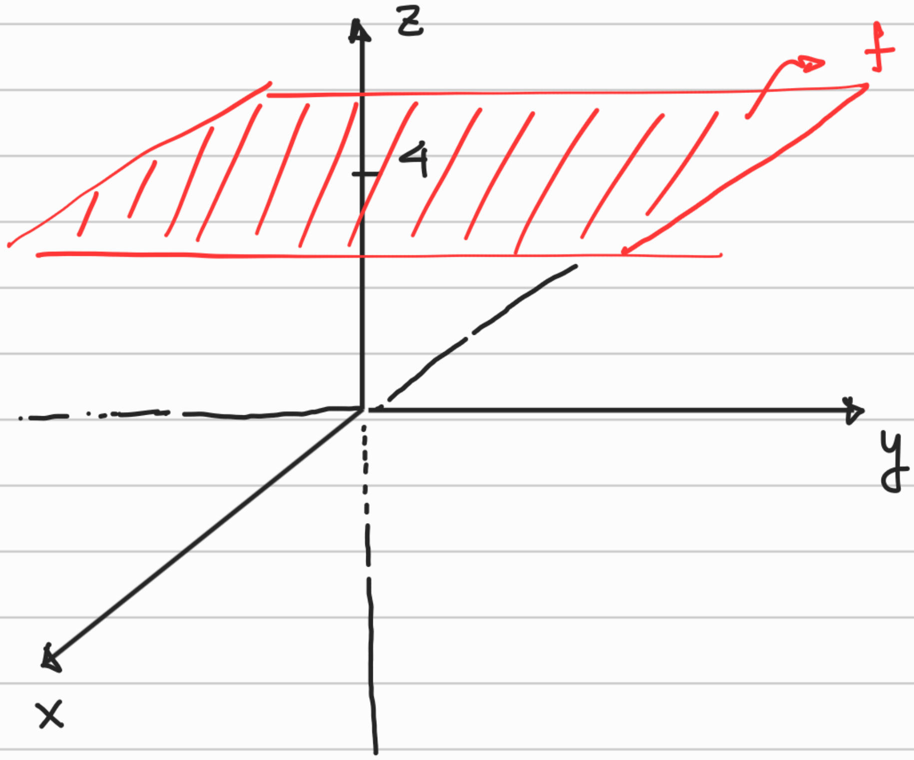
$f(x,y) = 4.$

$\text{Graf}\, (f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y) = 4 \}$

$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) = 4 \}.$

$\text{Dom}\, f = \mathbb{R}^2.$

$\text{Rango}\, f = \{4\}$



(2) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\text{Rango } f = [0, +\infty)$

$x^2 \geq 0 \quad y^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$x^2 + y^2 \geq 0$

$f(x,y) \geq 0$

$\text{Graf}(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) = x^2 + y^2 \}$

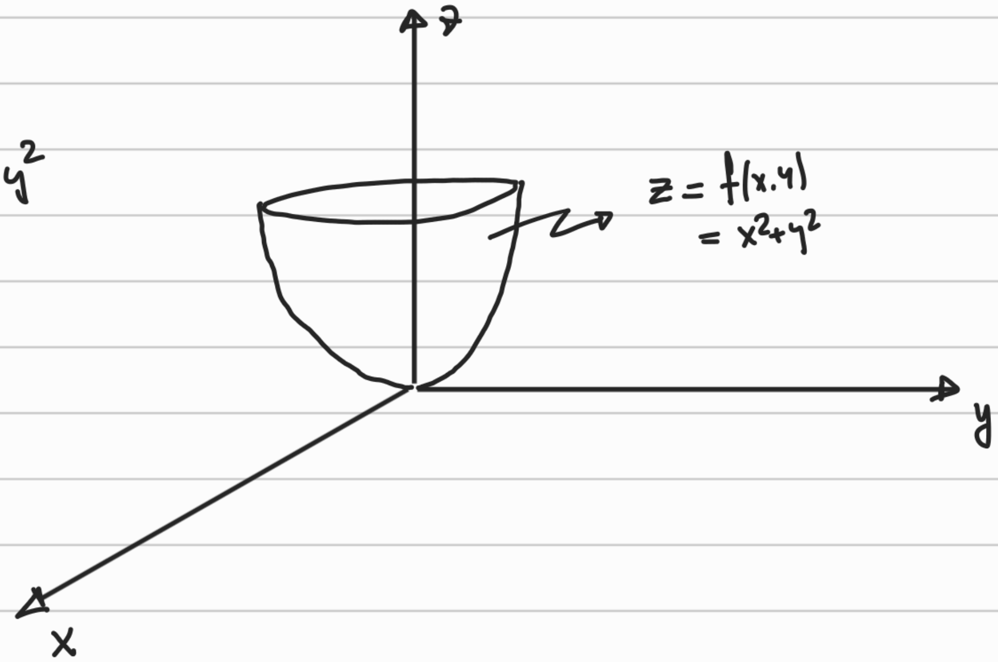
$= \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \}.$

Superficies Cuadricas

$\square x^{\square} + \square y^{\square} = \square z^{\square}$

$\square = 0, 1, 2$ $\qquad$ $\square = \mathbb{R}$

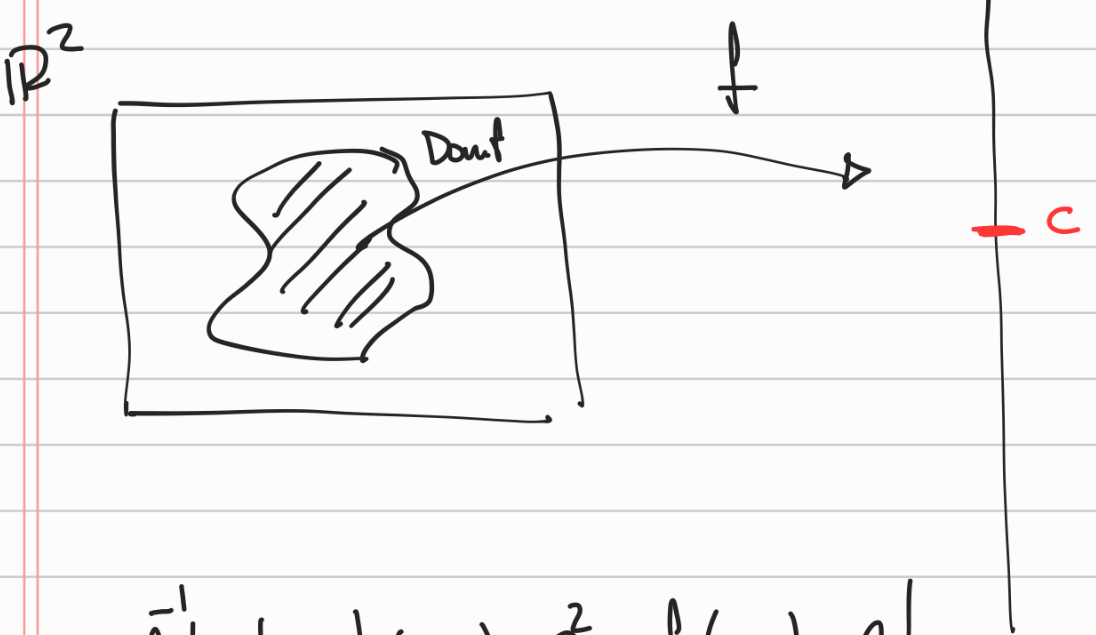
$z = x^2 + y^2$



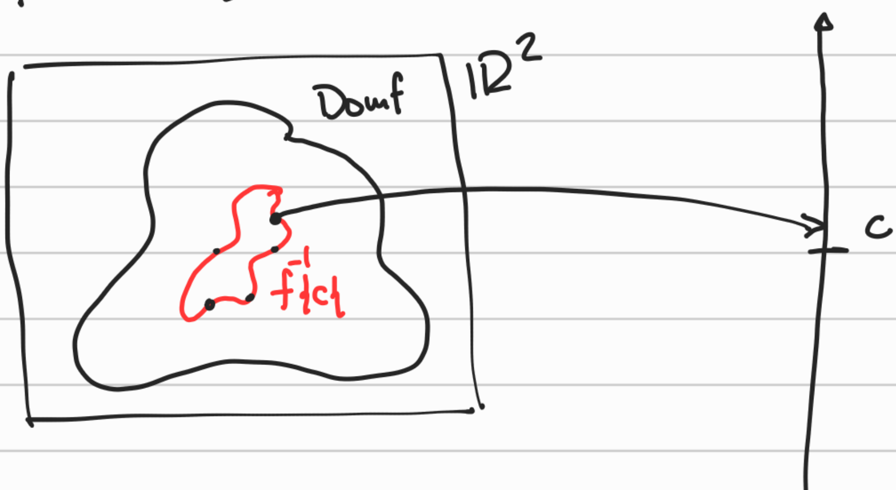
Curvas de Nivel de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Sea $c \in$ Rango f

$f^{-1}\{c\} :=$ Curva de Nivel c de f



$$f^{-1}\{c\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$$



Geométricamente

$$f^{-1}\{c\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = z \text{ y } z = c\}$$

$= $ Proyección de $\operatorname{Graf}(f) \cap z = c$ sobre el plano xy.

Ejemplo: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = |x| + |y|.$$

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}^2$$

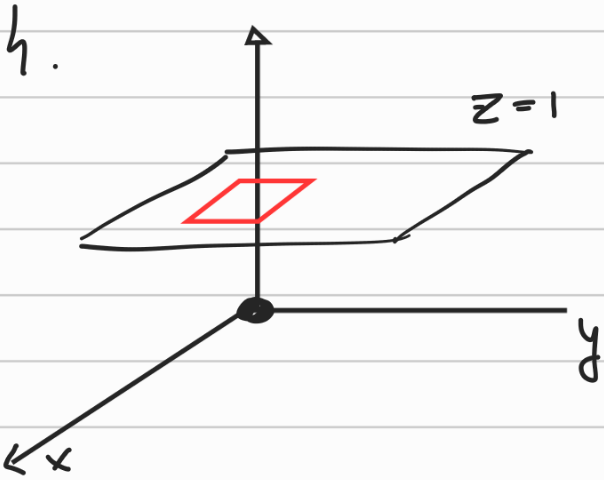
$$\operatorname{Rango} f = [0,+\infty).$$

$$\operatorname{Graf}(f) = ¿?$$

$$f^{-1}\{0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = 0\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 0\}$$

$$= \{(0,0)\}.$$



$$\bar{f}^{1}\{1\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : f(x,y) = 1\}$$

$$= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y| = 1\}$$