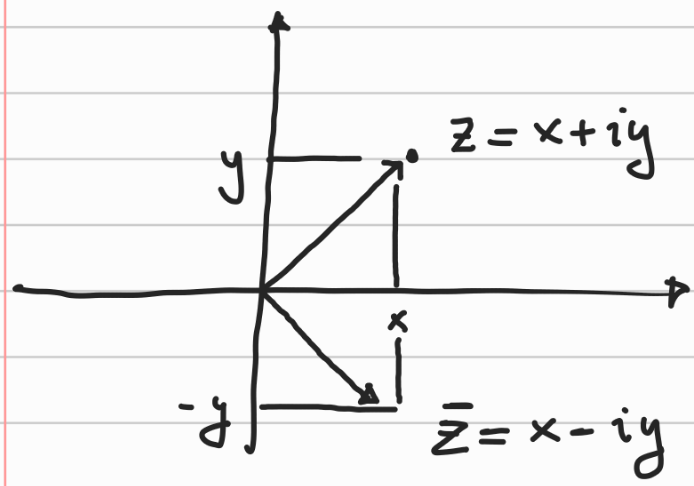
CLASE 2 — 07/03/25.

Números Complejos:

<u>Definición:</u> (Conjugado).

El conjugado del número complejo $z = x+iy$ denota $\bar{z}$ se define como

$$\bar{z} = x - iy$$



<u>Propiedades</u> $z \in \mathbb{C}$

$$z = a+ib$$
$$\bar{z} = a-ib$$

1) $z+\bar{z} = (a+ib)+(a-ib)$
$= 2a = 2\,Re(z)$

$$\boxed{Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}}$$

2) $z-\bar{z} = (a+ib)-(a-ib)$
$= 2ib = 2i\,Im(z)$

$$\boxed{\operatorname{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}}$$

3) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib)$
$= a^2 - a\cancel{ib} + a\cancel{bi} + b^2$
$= a^2 + b^2 = |z|^2$

$$\boxed{z\bar{z} = |z|^2}$$

División de complejos

$z_1 = a_1 + b_1 i$ $\qquad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$
$z_2 = a_2 + b_2 i$ $\qquad z_2 \neq 0 \quad (a_2 \neq 0 \text{ o } b_2 \neq 0)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\left(\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$$

Usamos el Conjugado

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot 1 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}$$

real

Ejemplo:

$$z_1 = 2-3i$$
$$z_2 = 4+6i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{4+6i} \cdot \frac{4-6i}{4-6i}$$

$$= \frac{(2-3i)(4-6i)}{(4+6i)(4-6i)} = \frac{8-12i-12i+18i^2}{16+36}$$

$$= \frac{8-24i-18}{52} = \frac{-10-24i}{52} = \frac{-10}{52} - \frac{24}{52}i$$

Notación: $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$

$$z^{-1} = \frac{1}{z}$$

Propiedades: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

2) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$

5) $|\overline{z_1}| = |z_1|$

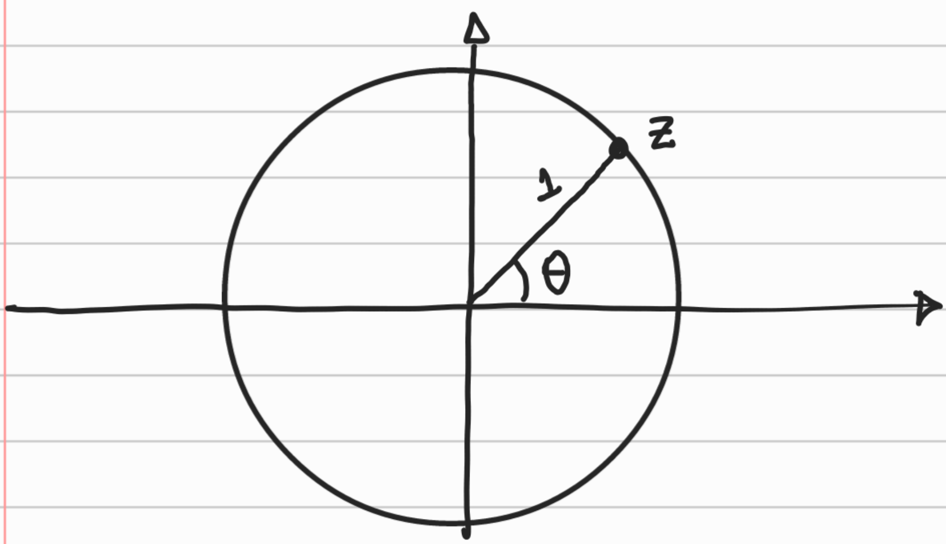
Notación Polar

Tomemos θ

Consideremos $z = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$

$$|z| = \sqrt{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta} = 1$$

Es decir que este complejo está en la circunferencia de centro en el origen y radio 1



Si tomamos $z \in \mathbb{C}$ $(z \neq 0)$ y lo dividimos entre su modulo

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$z = |z|\left(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta\right)$$

Definición (Igualdad de complejos)

$$z_1 = |z_1|\left(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1\right)$$
$$z_2 = |z_2|\left(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2\right)$$

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Interpretación geométrica del Producto

$$z_1 = |z_1| (\cos\theta_1 + i \operatorname{Sen}\theta_1) \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$
$$z_2 = |z_2| (\cos\theta_2 + i \operatorname{Sen}\theta_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| (\cos\theta_1 + i \operatorname{Sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i \operatorname{Sen}\theta_2)$$
$$= |z_1 z_2| (\cos\theta_1 \cos\theta_2 + i \operatorname{Sen}\theta_2 \cos\theta_1 +$$
$$i \operatorname{Sen}\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{Sen}\theta_1 \operatorname{Sen}\theta_2)$$

$$= |z_1||z_2| \left(\underbrace{\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \operatorname{Sen}\theta_1 \operatorname{Sen}\theta_2} + i \left(\underbrace{\operatorname{Sen}\theta_2 \cos\theta_1 + \operatorname{Sen}\theta_1 \cos\theta_2} \right) \right)$$

$$= |z_1||z_2| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{Sen}(\theta_1 + \theta_2) \right).$$

Es decir, el producto de dos números complejos es un número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y uno de sus argumentos es la suma de los argumentos de z_1 y z_2

Ejercicio $\quad z \in \mathbb{C}, \quad z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$
$(z \neq 0)$

$z^{-1} = ?$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}\left(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\right)$$

Identidad de Euler

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

<u>Obs:</u>

$$\begin{aligned} f :\ \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} f:\ \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, squiggly] & \mathbb{C} \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

<u>Exponencial Compleja</u>

<u>Definición:</u> Dado un número complejo $z = a + bi$

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = a + bi &\rightsquigarrow e^{a}(\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b). \end{aligned}$$

$(a, b \in \mathbb{R})$

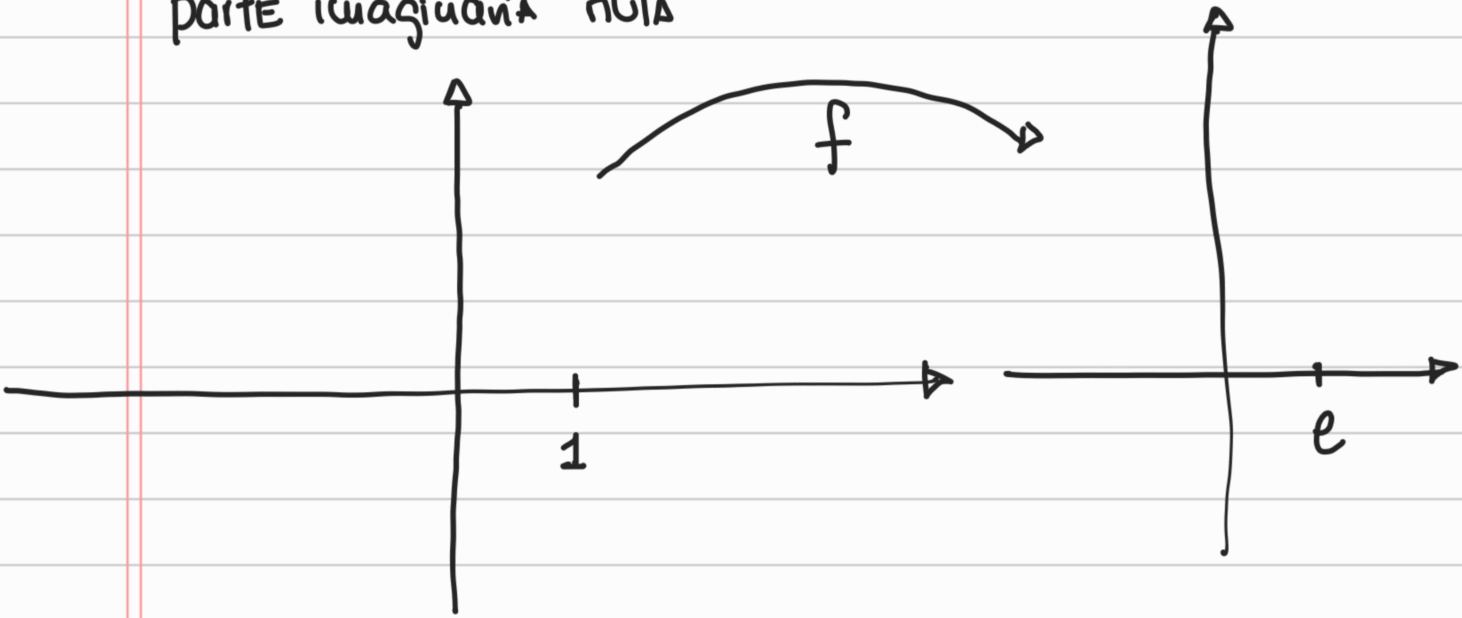
donde e^a es la función exponencial real <u>conocida</u>

$$\boxed{\begin{matrix} z \\ \shortparallel \\ a+ib \end{matrix} \rightsquigarrow e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)}$$

$$f(z) = f(a+ib)$$
$$= e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b).$$

Observación:

Si $z = a+ib$ con $b=0$, es decir con parte imaginaria nula



$$e^{z} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b) = e^{a}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$
$$= e^{a}$$

$$f(\text{REAL}) = e^{a}$$
$$f(a) = e^{a}$$

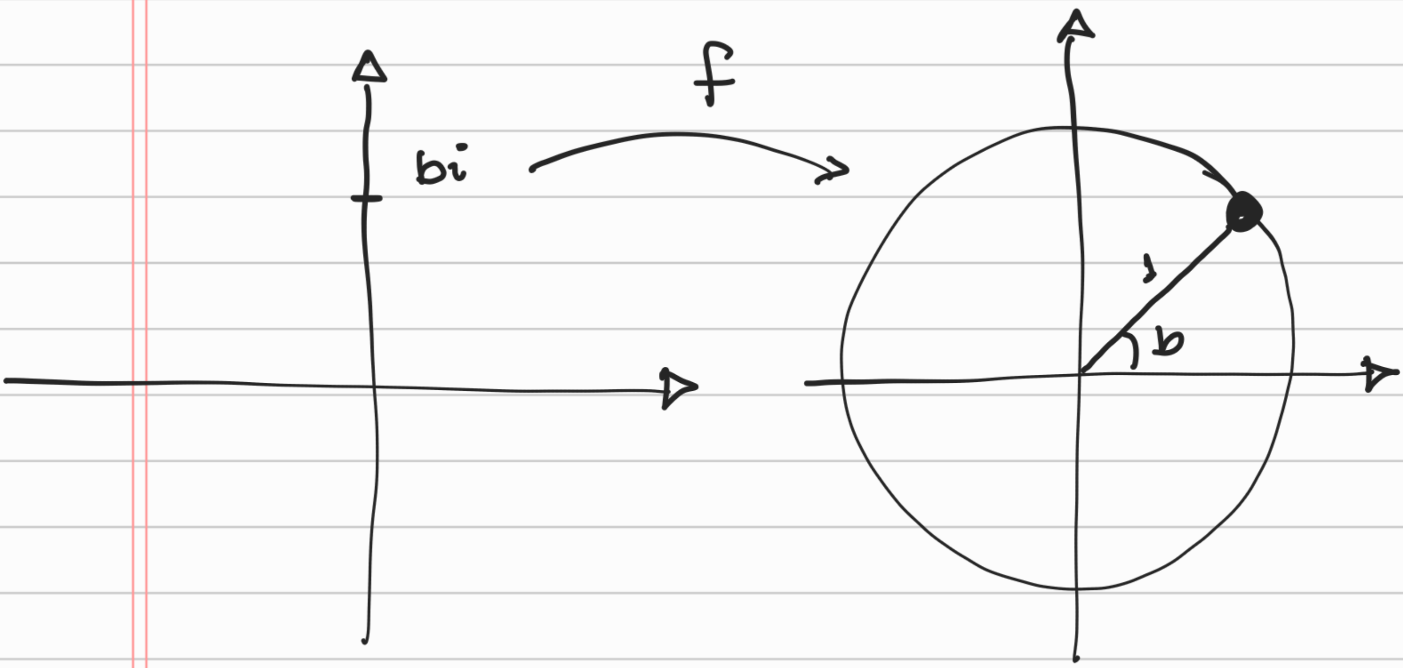
La función recién definida coincide con la función exponencial real

2) Si z es un complejo imaginario puro

$$z = bi \qquad b \in \mathbb{R} \qquad a=0$$
$$= 0 + bi$$

$$e^{z} = e^{a}(\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

$$= \cos b + i \operatorname{sen} b$$



RESUMEN

CONJUGADO: Sea $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$

$$\bar{z} = a - ib.$$

PROPIEDADES $z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

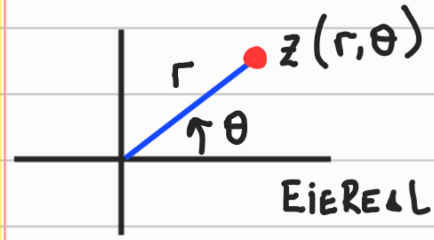
1. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
2. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
3. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\quad (z_2 \neq 0)$
4. $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $\qquad \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$
5. $\bar{\bar{z}} = z$

6. **Relación con la división de complejos**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} \qquad (z_2 \neq 0)$$

7. $|z|^2 = z\bar{z}$ y $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Notación de Complejos en Forma Polar.



$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$r = |z|$

Multiplicación y División

$z_1 = a_1 + b_1 i = |z_1| (\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$
$z_2 = a_2 + b_2 i = |z_2| (\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2| [\cos(\theta_1+\theta_2) + i \operatorname{Sen}(\theta_1+\theta_2)] \; !$$

Interpretar geométricamente.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} [\cos(\theta_1-\theta_2) + i \operatorname{Sen}(\theta_1-\theta_2)]$$

Inverso de un complejo: Para $z \neq 0$

$z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|} (\cos(-\theta) + i \operatorname{Sen}(-\theta))$$

Potencias enteras de z.

$z = |z| (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.
$n \in \mathbb{N}$

$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta).$$

$z^0 = 1$

Exponencial Compleja.

Dado $z \in \mathbb{C}$ $(z = a+ib)$, definimos la función exponencial compleja como

$$\mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$
$$z \rightsquigarrow f(z) = e^z := e^a (\cos b + i \operatorname{sen} b)$$

Notación

Exponencial Real