# Clase 16

11 Abril 2025.

## Integrales impropios

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \quad / \quad \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt \quad / \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$$

Definición: Sea $f: (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ integrable en $[c, a]$ $(c < a)$. Definimos

$$F(x) = \int_x^a f(t)\,dt$$

$\downarrow$

continua $[c, a]$ $\forall c < a$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$$

$\downarrow$ existe y finito $\qquad\qquad$ $\downarrow$ converge.

Definición: Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable en $[a, b]$ con $a < b$.

Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt$ y $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$ convergen, entonces se define la integral impropia primera especie $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt$$

En este caso, diremos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ converge.

**Observación:** No depende de la elección de $c$

**Prop.:** Sean $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ y $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ convergentes.

Entonces

1) $$\int_a^{+\infty} (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$
$$\int_a^{+\infty} \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

**Demostración:** $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt < \infty$ y $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt < \infty$

entonces $\lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt$ y $\lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} g(t)\,dt$ existen y son finitos.

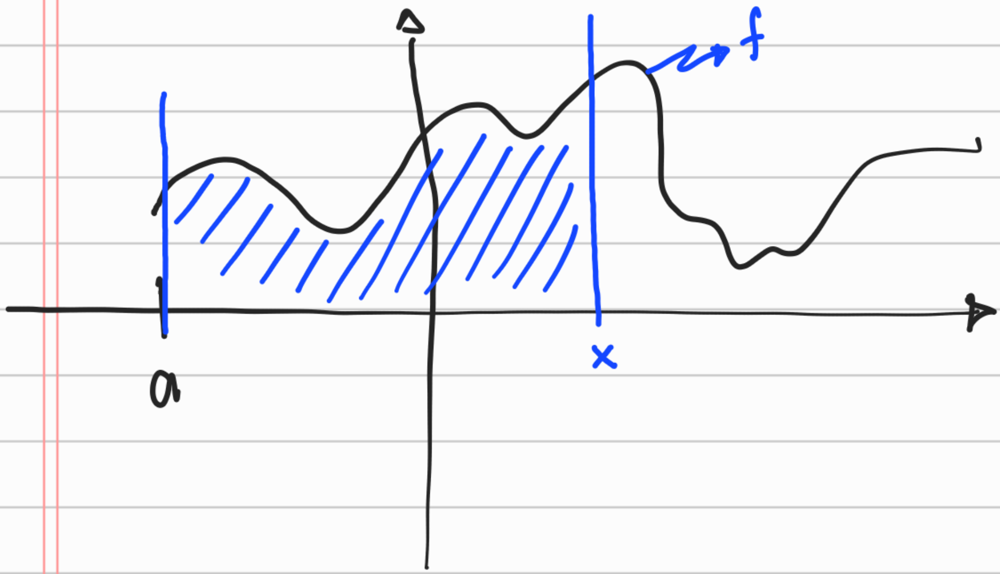
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} (f(t)+g(t))\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \int_a^{x} g(t)\,dt$$

existe, por lo tanto $\int_a^{+\infty} f(t)+g(t)\,dt < \infty$.

## Observación:

Sea $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\left( f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, +\infty) \right)$

$f$ no negativa




$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$$

monótona creciente.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\iff$ $F: [a, \infty) \to \mathbb{R}$ está acotada superiormente.

$\Updownarrow$

$\exists k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) \leq k \quad \forall x \in [a, +\infty)$.

## Criterio de comparación:

Sea $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ funciones no negativas tales que cumplen

1) $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$.

2) $f$ y $g$ son integrables en $[a, b] \quad \forall\, b > a$.

Entonces

Si $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge

Si $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

Observación:

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$$

$\downarrow$

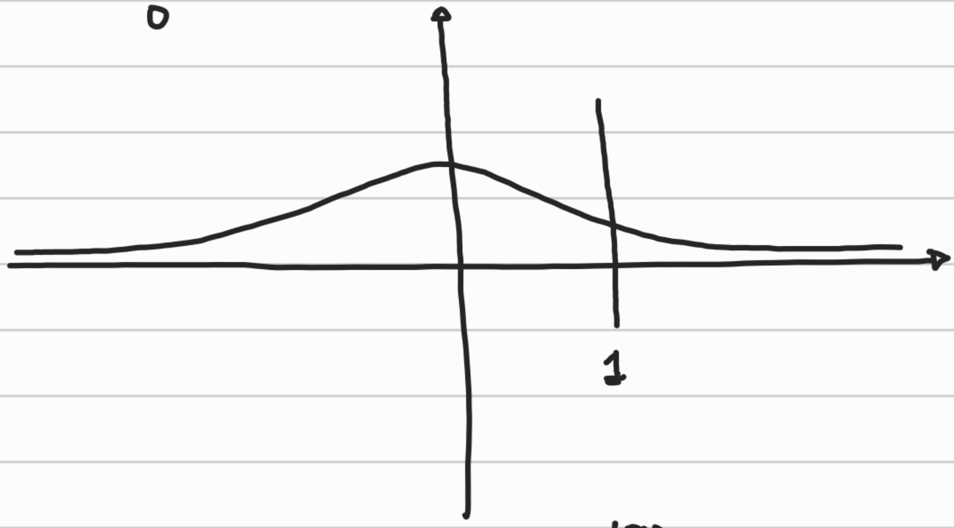
demostrar que converge

$g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable

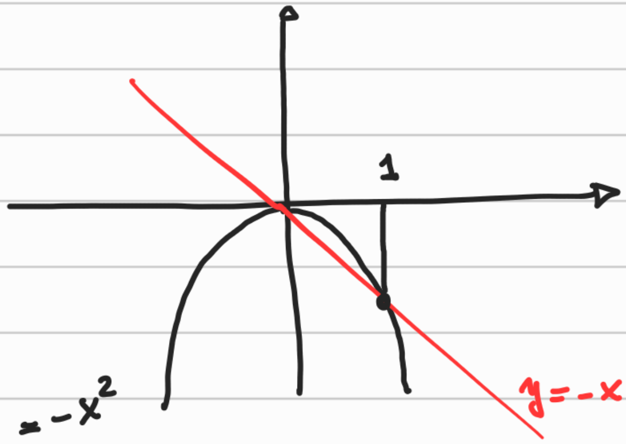
$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq 100$

Ejemplo: (Integral Euler-Poisson)

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$




$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{1} e^{-x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$




$$\int e^{-x^2}\,dx \qquad\qquad \int e^{-x}\,dx$$

Si $x \geq 1$, $\quad -x \geq -x^2$, $\quad e^{-x} \geq e^{-x^2}$

Si $x \geq 1$ $\qquad e^{-x^2} \leq e^{-x}$

Si $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge. entonces por el

criterio anterior $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge

Entonces $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ converge.

Afirmación $\int_1^{+\infty} e^{-x}\,dx < \infty$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t e^{-x}\,dx = \lim_{t \to +\infty} -e^{-x} \Big|_{x=1}^{x=t}$$

$$= \lim_{t \to +\infty} -e^{-t} + e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < \infty$$

# RESUMEN.

- $f: [a,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $[a,b]$ $\forall b>a$.

$$F: [a,+\infty) \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$\downarrow$

Continua en $[a,+\infty)$

Derivable en $(a,+\infty)$.

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$ Primera especie

- $f: (-\infty,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable sobre $[b,a]$ $\forall$ $b<a$.

$$F: (-\infty,a] \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_x^a f(t)\,dt$$

$$\int_{-\infty}^a f(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f(t)\,dt$$ Primera especie.

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable en $[a,b]$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$ $a<b$.

Si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-\infty}^c f(t)\,dt$ y $\int_c^{+\infty} f(t)\,dt$

convergen, entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^c f(t)\,dt + \int_c^{+\infty} f(t)\,dt.$$ Primera especie

# Álgebra de integrales impropias

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{y} \quad \int_a^{+\infty} g(t)\,dt \quad \text{son convergentes y } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\Longrightarrow \int_a^{+\infty} \lambda f(t) + g(t)\,dt \quad \text{converge}$$

| Series | Integrales |
|---|---|
| $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ | $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable |
| Estudiamos el límite de $S_n = a_1 + \dots + a_n$ cuando $n \to +\infty$ | Estudiamos el límite de $\int_a^x f(t)\,dt$ cuando $x \to +\infty$ |
| $\Downarrow$ | $\Downarrow$ |
| $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$ | $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$ |

$f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable y no negativa

$$F: [a, +\infty) \to \mathbb{R} \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

- $F$ es monótona creciente
- $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge $\Longleftrightarrow$ $F$ está acotada superiormente.

Criterio comparación:

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \geq a$$

Integrables.

- Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, entonces $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge
- Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge, entonces $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge.