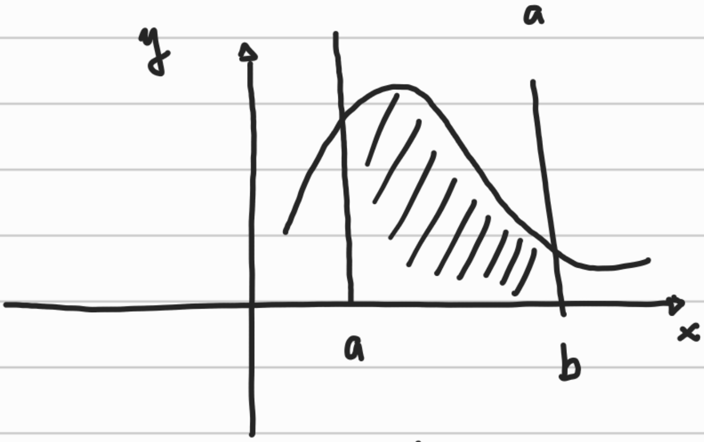
Clase 15 09/04/25.

Integrales impropios

Introducción:

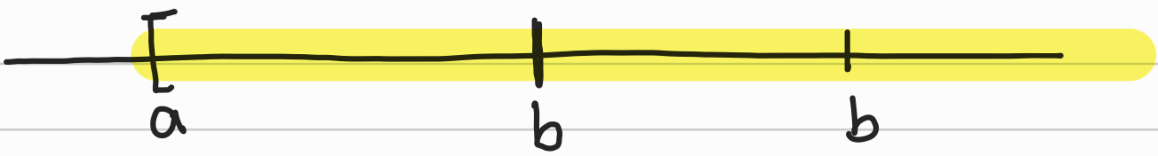
Integral definida $\int_a^b f$ $\quad f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua.



Comportamiento $\int_a^b f\,dx$ cuando $b\to+\infty$ o $a\to-\infty$

Integrales impropios de primera especie.

Sea $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ una función integrable sobre todo intervalo $[a,b]$ $\forall\, b\geq a$.

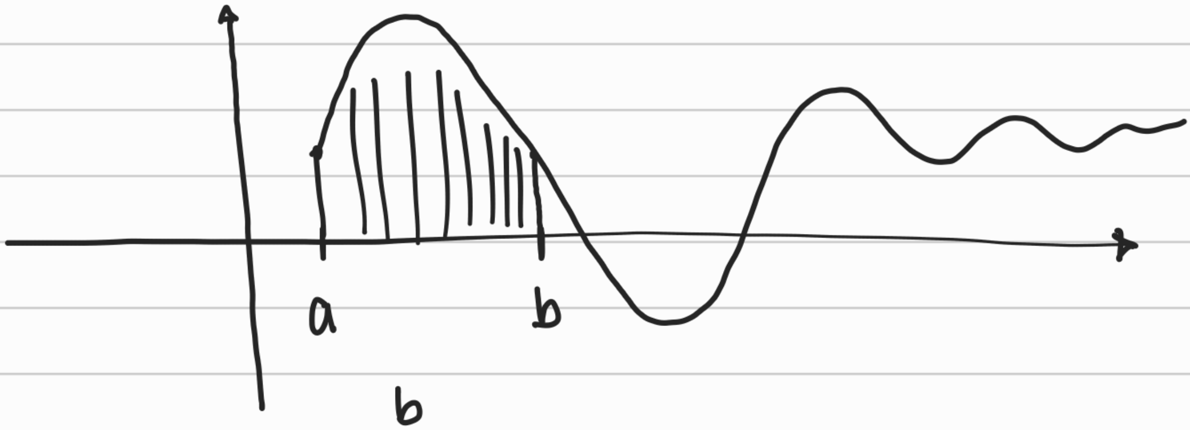


Consideramos una nueva función.

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

* F continua en $[a,+\infty)$
* F derivable en $(a,+\infty)$

T. fundamental del cálculo.



$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

Definición: Llamamos a la función $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ como la integral impropia de f (De primera especie).

Si existe $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$ y es finito, decimos que converge.

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

Notación.

En caso contrario, es decir $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ es $\pm\infty$ o no existe, decimos que diverge.

<u>Objetivo</u> Clasificar $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ // $\int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt$

<u>HECHO</u>: Sabemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

¿ Si la integral impropia $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

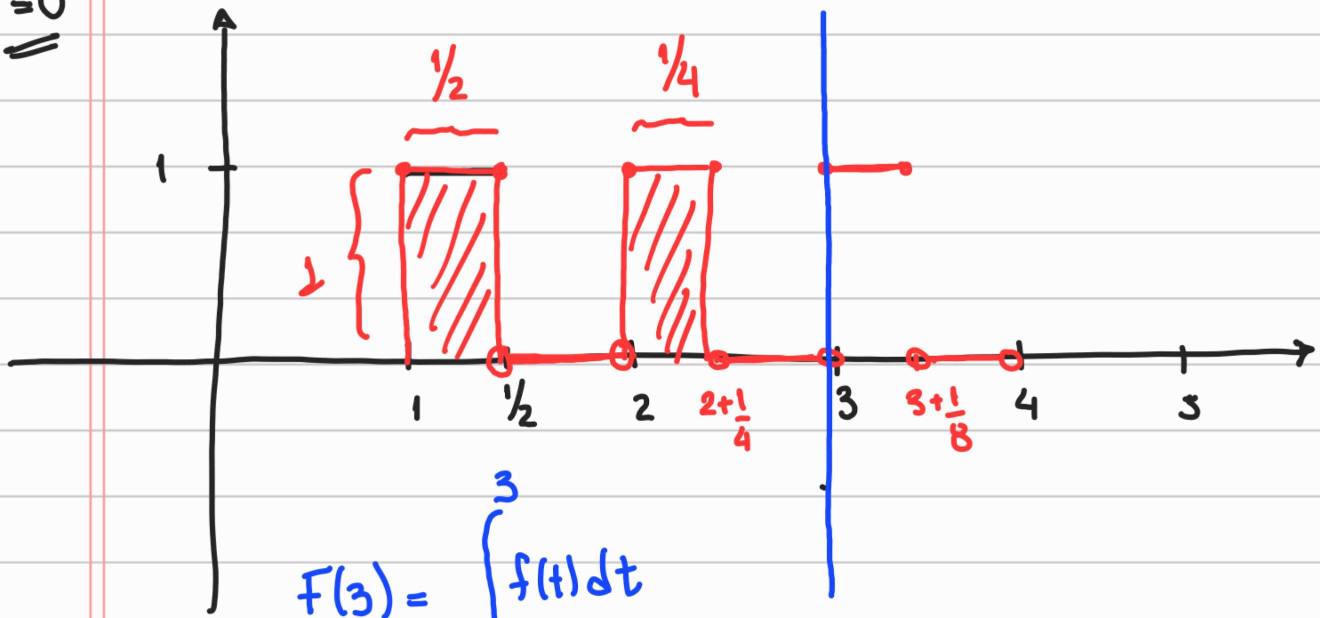
$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

No. Tomemos el ejemplo 4.4.

$f: [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{2^n}] \ n\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$\underline{\underline{a=0}}$



$$F(3) = \int_0^3 f(t)\,dt$$

$$= 1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt$$

$F(n) = \int_0^n f(t)\,dt$ es la suma de las áreas de los primeros n escalones

$$F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$$ serie geométrica converge

$n \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt < \infty.$$

¿ $\lim_{x \to +\infty} f(x)$? No existe.

Prop: Si f es tal que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge y existe $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$. Entonces $L = 0$.

L

<u>Ejemplo:</u> $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ $\quad\alpha$ parámetro real

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$\alpha = 1$

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \operatorname{Log} x \Big|_1^t = \operatorname{Log}(t)$$

$\alpha \neq 1$

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_1^t x^{-\alpha}\,dx = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_1^t$$

$$= \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \dfrac{t^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\[2ex] \operatorname{Log}(t) & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

* Si $\alpha = 1$ $\quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} =$

$$= \lim_{t\to+\infty} \operatorname{Log}(t) \to +\infty$$

diverge.

* Si $\alpha \neq 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

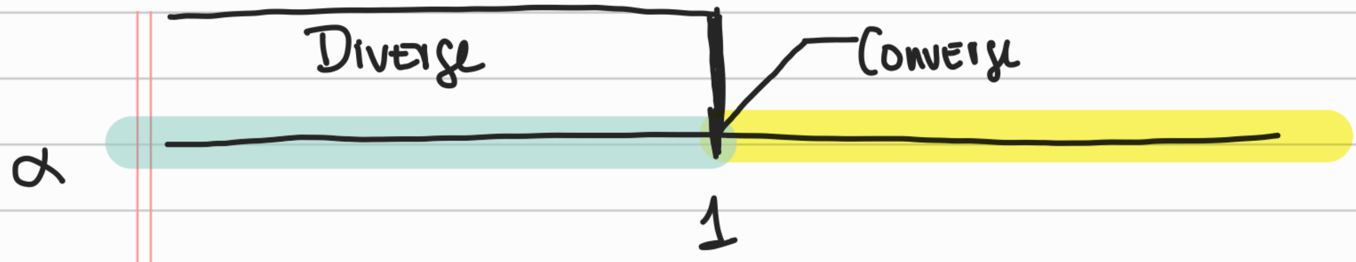
<u>I Caso</u> $\quad 1-\alpha > 0 \quad (\alpha < 1)$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = +\infty \quad \text{diverge}$$

II Caso $\quad 1-\alpha < 0 \quad (\alpha > 1)$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} = -\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$$

converge



$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

Si $\alpha \leq 1$ Diverge

$\alpha > 1$ Converge.

RESUMEN.

Integrales impropias de primera especie

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

f integrable en $[a,b]$ $\forall b > a$.

$F : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Continua en $[a, +\infty)$ y derivable en $(a, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$$

Converge si $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe.

Prop: Sea f tal que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge y existe $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$

Entonces $L = 0$.

Ejercicio Desarrollo (Exam Dic 2024). Pregunta 1.

Ejemplo: Clasificar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$

$\alpha \leq 1$ Diverge.

$\alpha > 1$ Converge.