

Obs: Dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos no negativos son de la misma clase si ambas convergen o si ambas divergen.

Prop
3.40

Criterio: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos no negativos. y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad (b_n \neq 0).$$

1) Si $L > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son de la misma clase.

2) Si $L = 0$, entonces si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también lo hace.

Demostración: (I) Parte $L > 0$



Sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{1}{2}$$

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}$$

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < L + \frac{L}{2}$$

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \quad (b_n > 0)$$

$$\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n \quad \forall n \geq n_0$$

$$\frac{L}{2} b_n < a_n$$

$$a_n < \frac{3L}{2} b_n$$

Usamos el criterio de comparación. para concluir que

$\sum a_n$ $\sum b_n$ son del mismo tipo.

Demostración $L = 0$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$$

Usar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}}$$

$$\frac{n}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\frac{n+1-1}{n+1}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 > 0.$$

Por el Criterio anterior $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

son del mismo tipo.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ es divergente.

CRITERIO SEA $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ de términos no negativos

$$\text{y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Entonces:

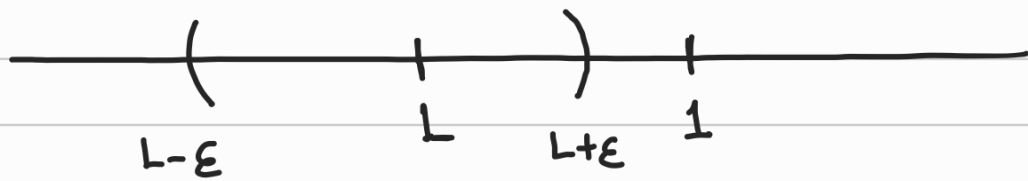
1) Si $L < 1$, LA SERIE $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ CONVERGE

2) Si $L > 1$, ($L = +\infty$), LA SERIE
 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ DIVERGE.

3) Si $L = 1$, NO SE PUEDE APLICAR

Demostración:

1) Supongamos que $L < 1$. TOMAR $\varepsilon > 0$ TAL QUE:
 $L + \varepsilon < 1$



$$(L + \varepsilon < 1)$$

¿Qué implica que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$?

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \varepsilon$$

$$- \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Recordar $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge si $\underbrace{|r| < 1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Definir $r = L + \varepsilon < 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ converge.

Como $\sqrt[n]{a_n} < L + \varepsilon = r \quad \forall n \geq n_0$

$$\sqrt[n]{a_n} < r$$

$$a_n < r^n \quad \forall n \geq n_0$$

Por el Criterio
de
Comparación

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

Ejemplo:

Eje 3.45 Demostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ converge.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0 < 1.$$

Por el Criterio anterior $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$ converge.

$$a_n = \left(\frac{\log n}{n} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{1/n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{\log n}{n} \right)^n \right)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n}$$

RESUMEN

Criterio

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ DIVERGE.}$$

- Comparación

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ CONVERGE} &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ DIVERGE} &\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ DIVERGE.} \end{aligned}$$

- Equivalentes

$$a_n \geq 0 \quad b_n > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

- $L \in \mathbb{R} \quad L > 0$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE} &\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ CONVERGE} \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ DIVERGE} &\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ DIVERGE} \end{aligned}$$

- $L \in \mathbb{R} \quad L = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ CONVERGE} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE.}$$

- DE LA RAIZ

$$a_n \geq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

$$0 \leq L < 1: \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE}$$

$$L > 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ DIVERGE}$$

$$L = 1. \text{ No funciona.}$$

Criterio del Cociente

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos, tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L. \text{ Entonces}$$

- Si $L < 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge
- Si $L > 1 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.
- Si $L = 1 \Rightarrow$ El Criterio no aplica.

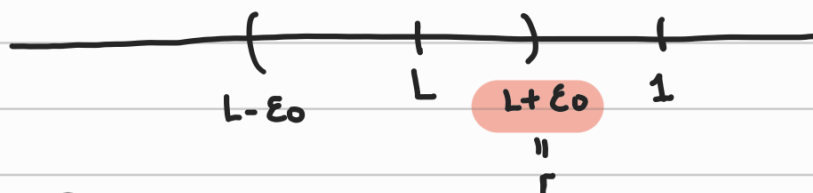
Demostración:

$$\text{Supongamos que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \varepsilon$$

$$-L + \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon$$

(I) Caso: $L < 1$ Tomamos $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $L + \varepsilon_0 < 1$.



$$\text{Sea } \Gamma = L + \varepsilon_0$$

Notemos que $\Gamma < 1$

Para dicho ε_0 , existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0 \quad -L + \varepsilon_0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon_0 = r$$

$$\forall n \geq n_0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$$n = n_0$$

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < r \iff a_{n_0+1} < r a_{n_0}$$

$$n = n_0 + 1$$

$$\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} < r \iff a_{n_0+2} < r a_{n_0+1}$$

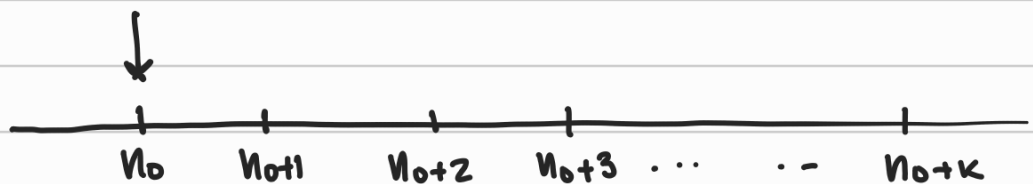
$$a_{n_0+2} < r (r a_{n_0}) = r^2 a_{n_0}$$

$$n = n_0 + 2$$

$\vdots$

$$n = n_0 + k$$

$$\frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+(k-1)}} < r \iff a_{n_0+k} < r^k a_{n_0}$$



$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} < r$$

$$a_{n_0+k} < r^k a_{n_0}$$

$$\underline{\underline{\forall n \geq n_0}}$$

Notemos $\sum_{n=1}^{+\infty} r^n$ Convergente $r < 1$.

Notemos $\sum_{n=n_0}^{+\infty} r^n$ Convergente $r < 1$.

$$\forall n \geq n_0 \quad a_{n+k} < r^k a_n$$

$$|n+k=n|$$

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n < r^{n-n_0} a_{n_0}$$

$$a_n < \frac{r^n}{r^{n_0}} a_{n_0} = r^n \left(\frac{a_{n_0}}{r^{n_0}} \right) = k$$

Constante

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n < k r^n$$

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < \sum_{n=n_0}^{+\infty} k r^n < \infty$$

$$r < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n < \infty.$$