Clase 12 — Series

02/04/25

Notación:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \to \sum a_n$$

En ocasiones es conveniente considerar series del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Ejemplo: Sea $a \in \mathbb{R}$ $|a| < 1$. Entonces consideramos la serie geométrica

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + \dots$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}}$$

$$S_n = \underbrace{1 + a + \dots + a^n}$$

$$a S_n = a + a^2 + \dots + a^{n+1}$$

$$S_n - a S_n = 1 - a^{n+1}$$

$$(1-a) S_n = 1 - a^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$$

Consideramos $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\quad S_n = \frac{1 - a^{n+1}}{1-a}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}$$

Ejemplo:

La Serie $1-1+1-1+1-1+1-\cdots\cdots$
con término general $(-1)^{n+1}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \text{ Es divergente}$$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Diverge pues

$(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0 \qquad (S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow 1$

$$a_n=(-1)^{n+1} \rightsquigarrow (1,-1,1,-1,1,-1,\ldots)$$

$S_2 = 1-1 = 0 \qquad S_3 = 1$

$S_4 = 1-1 = 0 \qquad S_5 = 1$

Ejemplo: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ término general $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots\cdots +$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$
$$= \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \to 1.$$

<u>**Propiedades**</u> Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dos series convergentes y $c\in\mathbb{R}$. Entonces

- $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ es convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} c\,a_n$ convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} c\,a_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

<u>**Problema:**</u>

Clasificar $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

Series de términos no Negativos

Obj: Clasificar $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ tales que $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$.

Observación: Para este tipo de series la sucesión $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ es monótona creciente

$$S_n \leq S_{n+1}$$

$(S_n)_{n\geq 1} \rightarrow$ Monótona Creciente

Afirmación: Si $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge si y solo si la sucesión de sumas parciales está acotada superiormente.

Criterio de comparación

Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ dos series de términos no negativos, es decir $a_n \geq 0$ y $b_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$.

Tales $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq 1$ ~~$\forall n \geq n_0$~~ ✓. Se cumple

1) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

2) Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

Demostración:

Parte (1): Supongamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge

$(S_n^B)_{n\in\mathbb{N}} \to$ Sucesión de sumas parciales de $\sum b_n$

$$(S_n^B)_{n\in\mathbb{N}} = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$(S_n^A)_{n\in\mathbb{N}} \to$ Sucesión de sumas parciales de $\sum a_n$

$$(S_n^A)_{n\in\mathbb{N}} = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Por hipótesis $\sum b_n$ converge, es decir

$(S_n^B)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y por lo tanto está acotada superiormente

$$S_n^A = a_1 + \dots + a_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = S_n^B$$

Nota

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n_0}, \dots)$$
$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots, b_{n_0}, \dots)$$

Ejemplo: Demostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

Afirmación:

$n! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \geq 1$ (Inducción). ✓

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\downarrow$

Converge

$\Rightarrow$ Por el Criterio $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge

<u>Justificar</u> $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \to 2 \qquad a = 1/2 < 1$$

<u>Convergente.</u> a $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$

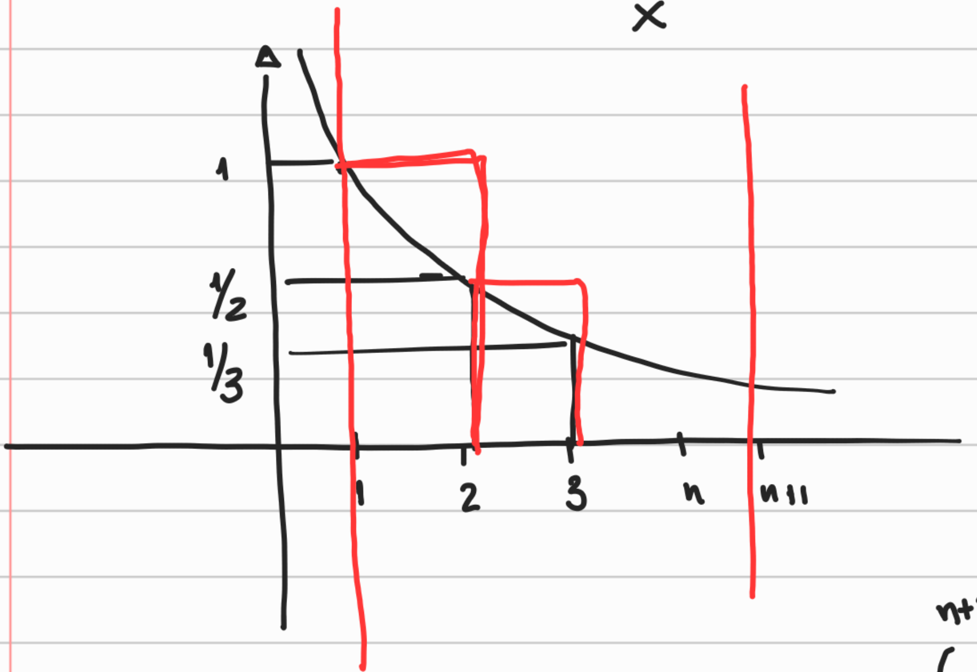
$$= 2$$

<u>Ejemplo:</u>

Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergente. ✓

Cousiderar $f(x) = \frac{1}{x}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$S_n \to +\infty$

$$= \operatorname{Log}(n+1) \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

Resumen

Series Geométricas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \qquad a_n = r^n$$

Criterio

- Si $|r| < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ converge.

En este caso,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

- Si $|r| \geq 1$, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ diverge.

Series Telescópicas.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \qquad a_n = b_n - b_{n+1}.$$

$$\boxed{S_n = b_1 - b_{n+1}.}$$

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{b_{n+1}}.$$

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = b_1 - b_{n+1}$$

Criterio

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff (b_n) \text{ converge.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ diverge} \iff (b_n) \text{ diverge.}$$

Criterios de convergencia para series de términos no negativos

Afirmación: Si $a_n \geq 0 \ \forall n \geq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente

$\boxed{!}$ $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ siempre resulta monótona creciente

Criterio de Comparación

Sean $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ series de términos no negativos tales que $a_n \leq b_n \ \forall n \geq n_0$. Entonces

- Si $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.
- Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverge.

OJO $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Sea $\alpha < 1$ $\Rightarrow$ $n^{\alpha} < n$ $\rightarrow$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^{\alpha}}$

$\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ diverge por comparación.