Clase 11 — 31/03/25.

Sucesiones y Series

Teorema A: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Teorema B: Toda sucesión ACOTADA tiene una subsucesión convergente

Supongamos que Teorema A se cumple.

Demostración del Teorema B:

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de reales ACOTADA.

$$a: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow a(n) = a_n$$

$$I = \{y \in \mathbb{R} : \; y = a(n) \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}. \subseteq \mathbb{R}.$$

$\downarrow$

imágenes de la función $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

I Caso: I es finito

Debe existir $Y_0 \in I$ para el cual la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pasa infinitas veces.
Tomamos la subsucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ constante a Y_0

II Caso: I es infinito.

$$I \subseteq \mathbb{R}$$

I es infinito + I acotado $\overset{\text{Teorema A}}{\Longrightarrow}$ I tenga un pto de acumulación

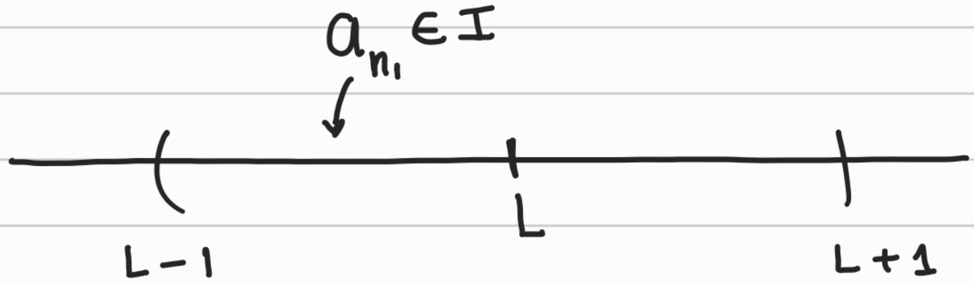
$L \rightsquigarrow$ Pto de Acumulación de I.

Obj: Construir una subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a L.

Como L es un Pto de acumulación de I, $\forall \varepsilon > 0$

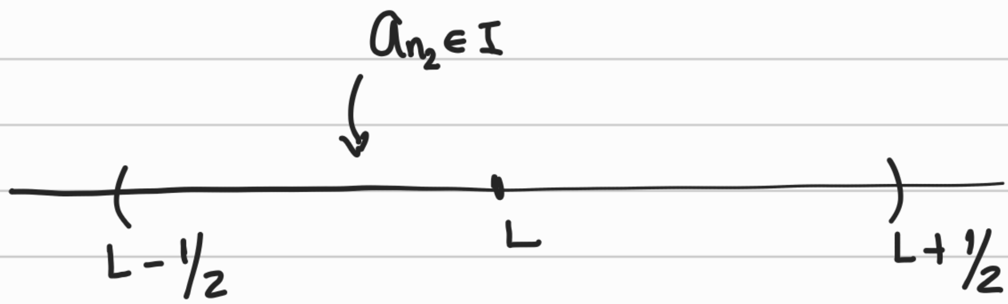
$$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)^* \cap I \neq \emptyset.$$

$\varepsilon = 1$



existe $a_{n_1} \in I$ tal que $a_{n_1} \in (L-1, L+1)^*$

$\varepsilon = 1/2$



existe $a_{n_2} \in I$ tal que $a_{n_2} \in (L-1/2, L+1/2)$.

$\vdots$

$\varepsilon = 1/k \rightsquigarrow a_{n_k} \in I$ tal que $a_{n_k} \in (L - 1/k, L + 1/k)$

$$(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \longrightarrow L.$$

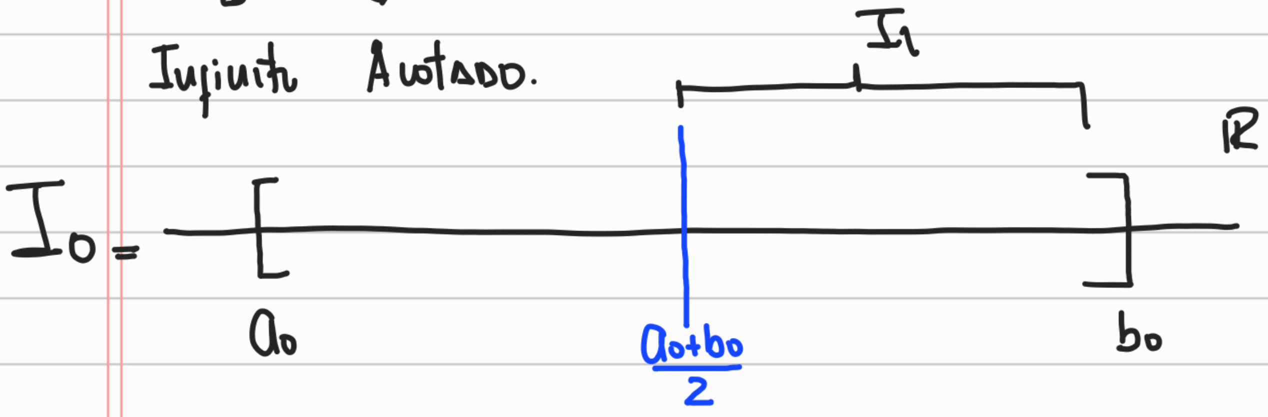
Teorema A: Todo conjunto infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

(**Idea:**) Sea A un conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$.

$\boxed{A \subseteq \mathbb{R}}$

Infinito Acotado.

Obj: Construir un punto de acumulación de A.



Como A es acotado existe $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$A \subseteq [a_0, b_0].$$

Como A es infinito, entonces (al menos) una de las dos mitades debe contener infinitos puntos de A.

$$I_0 = [a_0, b_0]$$

I_1 es el intervalo que tiene infinitos puntos de A.

$\vdots$

$$\cdots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset I_{n-1} \subset \cdots \subset I_1 \subset I_0$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n = L$$

Punto de acumulación de A.

SERIES

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales formamos

La sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots)$

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $(S_1, S_2, S_3, S_4, \dots)$

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Definición: Dada una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a la correspondiente sucesión de sumas parciales $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se le conoce como serie o serie infinita.

En caso de existir real $S \in \mathbb{R}$ tal que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \to S$

$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$ entonces diremos que la serie $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a S.

Notación: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S$

Prop: Si la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, entonces $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0$

(Condición necesaria de convergencia).

<u>Demostración:</u> Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, es decir $\lim_{n\to+\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$
$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} \qquad n \geq 2$$

La sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la diferencia entre las sucesiones $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(S_{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n - \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

<u>Ejemplo:</u> $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} n \quad \text{diverge}}$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}} \not\to 0$

$S_1 = 1$

$S_2 = 1 + 2$

$S_3 = 1 + 2 + 3$

$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

$\vdots$

$S_n = 1 + \dots + n$

Resumen.

Series de Números Reales

"Una serie es suma $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ con un número infinito de sumandos"

Sentido!

Escribiremos

$$s = \lim_{n \to +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Como este límite puede existir o no, tendremos series convergentes y divergentes.

Objetivo: Clasificarlas.

A partir de una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales dada formamos una NUEVA sucesión $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ donde

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Se llaman sumas parciales de la serie $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$

a_n el término general de la serie.

Si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, diremos que $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i$ converge.

Condición necesaria de Convergencia

Prop: Si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.