Clase 10 28/03/25

Sucesiones

Criterios

Definición: Diremos que dos sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ambas con límite 0 o ∞, son equivalentes $(a_n)\sim(b_n)$ si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Ejemplo: $a_n = 4n^3+2n+1$ $\quad b_n = 4n^3$ son equivalentes.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3+2n+1}{4n^3} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{4n^3}{4n^3}}_{1} + \underbrace{\frac{2n}{4n^3}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{4n^3}}_{0} = 1$$

Subsucesiones

Definición: Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales (n_k) una sucesión estrictamente creciente de números naturales.
A la sucesión

(a_{n_k}) se le conoce como subsucesión de (a_n).

Ejemplos:

$$a_n = (-1)^n$$

$$\big(\underset{a_1}{-1}, \underset{a_2}{1}, \underset{a_3}{-1}, \underset{a_4}{1}, \underset{a_5}{-1}, \underset{a_6}{1}, \underset{a_7}{-1}, \dots\big)$$

$n_k = 2k \quad k\in\mathbb{N}$

$n_1 = 2 \qquad n_3 = 6$

$n_2 = 4$

$$(a_{n_k}) = (a_{2k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, \dots)$$

$n_k = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

$n_1 = 3$

$n_2 = 5$

$n_3 = 7$

$$(a_{n_k}) = (a_{2k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (-1, -1, -1, \ldots)$$

$n_k = 3k+1 \quad k \in \mathbb{N}$

$n_1 = 4$

$n_2 = 7$

$n_3 = 10$

$$(a_{n_k}) = (a_{3k+1})_{k \in \mathbb{N}} = (1, -1, \ldots)$$

<u>Proposición</u>: Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente a $L \in \mathbb{R}$, entonces toda subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a L.

<u>Demostración</u>:

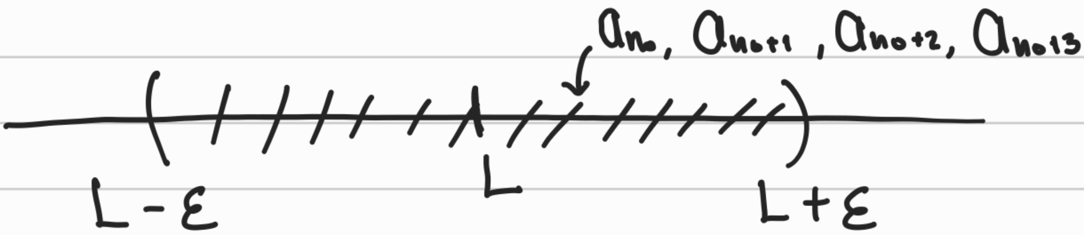
Sea $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ una subsucesión de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

<u>Obj</u>: Mostrar que $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \to L$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$

$$|a_{n_k} - L| < \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$. Como $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \to L$



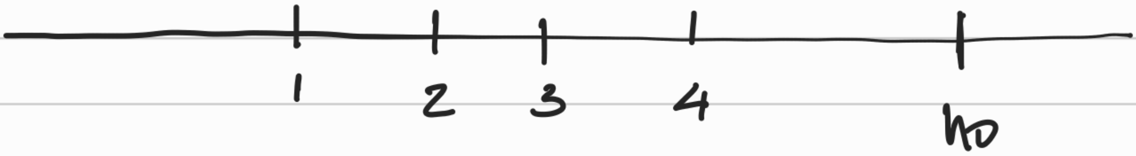
Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

<u>Obj</u>: Encontrar un $k_0 \in \mathbb{N}$

La sucesión $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es estrictamente creciente de naturales

existe un k_0 tal que $k_0 > n_0$



Basta con tomar

$$k_0 = \min \{ k \in \mathbb{N} : n_k \geq n_0 \}.$$

$$\forall k \geq k_0 \quad | a_{n_k} - L | < \varepsilon$$

Sucesión Acotada $\rightarrow$ Convergente $\rightarrow$ Todo subsucesión es convergente

Sucesión Acotada $\rightarrow$ No convergente $\xrightarrow[\text{(B-W)}]{\text{Teorema}}$ Podemos garantizar al menos una subsucesión sea convergente

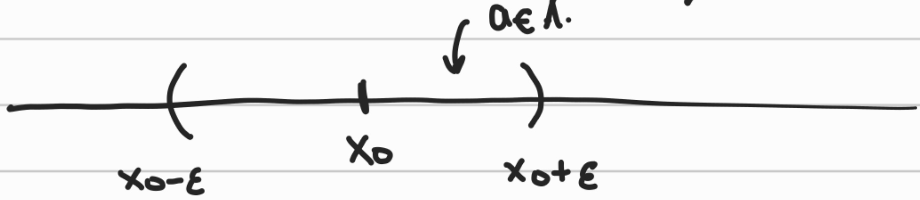
Definición: (Pto de acumulación).

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y $A \subseteq \mathbb{R}$ (Subconjunto de $\mathbb{R}$).

x_0 es un Pto de Acumulación de A. si $\forall \varepsilon > 0$ se cumple

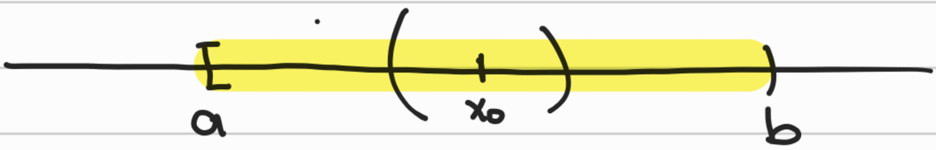
$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) - \{x_0\} \cap A \neq \emptyset.$$

$$(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)^* \cap A \neq \emptyset.$$

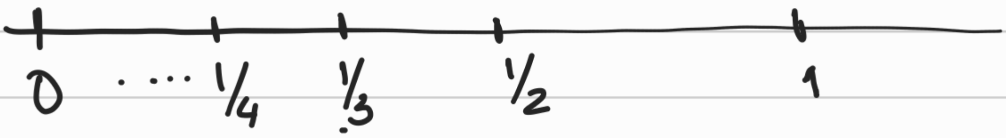


Ejemplo: $A = [a,b)$.

Los puntos de acumulación de A es $[a,b]$.



$A = \{ 1/n : n \in \mathbb{N} \}$



El único punto de acumulación de A es 0.

$A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$

Los puntos de acumulación de $A = [0,1]$

Teorema: (Bolzano - Weierstrass) Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito y acotado tiene al menos un pto de acumulación.

Teorema: (Bolzano- Weierstrass sucesiones)
Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

Resumen

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, y $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales. A la sucesión $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ se le llama <u>subsucesión</u> de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

<u>Prop</u>: Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión que converge a $L\in\mathbb{R}$, entonces todo subsucesión de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

<u>Herramienta</u>: Sea $x_0\in\mathbb{R}$ y $S\subseteq\mathbb{R}$ un subconjunto de reales.

x_0 es un Pto de acumulación de S

$$\iff \forall \varepsilon>0 \text{ se cumple } (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)^* \cap S \neq \emptyset.$$

<u>Idea</u>: Todo entorno de x_0 contiene al menos un punto de S diferente de x_0

Sucesiones Acotada → Convergente → Todo subsucesión es convergente

Sucesiones Acotada → No Convergente → Al menos una subsucesión es convergente.

Bolzano Weierstrass.

Teorema: Todo subconjunto de $\mathbb{R}$ infinito y acotado tiene al menos un punto de acumulación.

Teorema: Toda sucesión ACOTADA tiene una subsucesión convergente