Semestre I-25
CDIVV

Tema: Número Complejo.

Clase 1: 05/03/25

Motivación:

Surgen como una herramienta para resolver ecuaciones polinómicas mediante fórmulas con radicales

libro Cardano

$$x^3 = 3px + 2q \qquad p, q \in \mathbb{N}$$

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

(XVIII) Gauss estableció una base lógica para los números imaginarios.

Unidad Imaginaria $\quad i = \sqrt{-1}$

$$i^2 = -1.$$

Definición: Un número complejo es cualquier número de la forma $z = a + ib$ donde a y b son números reales.

Unidad imaginaria

$$z = a + ib$$

reales

Notación:

$$z = a + ib = a + bi$$

Parte real de z : $Re(z) = a$
Parte Imaginaria de z : $Im(z) = b$

Para cada $z = a + ib$ $Re(z), Im(z) \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$$z = 4 - 9i$$

$$Re(z) = 4$$
$$Im(z) = -9$$

Si $Re(z) = 0$, $z = ib$ $\rightarrow$ Imaginarios puros.

Ejemplo $z = 6i$

Definición (Igualdad de Complejos)

Dos números complejos $z_1 = a_1 + b_1 i$ y $z_2 = a_2 + b_2 i$ son iguales si $a_1 = a_2$ y $b_1 = b_2$

$$z_1 = z_2 \longleftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$$

$$z_1 = z_2 \longleftrightarrow \begin{cases} Re(z_1) = Re(z_2) \\ Im(z_1) = Im(z_2) \end{cases}$$

Notación:

El conjunto de todos los números complejos es denotado por $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{C} = \{ z : z = a + ib, \ a, b \in \mathbb{R} \}$$

Cada número real a lo puedo expresar como $z = a + 0i$, diremos que $\mathbb{R}$ es un "subconjunto" de los números complejos

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$$

$$+ : (\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z_1 + z_2 \longrightarrow \quad z_1 = a_1 + b_1 i$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

$$\cdot : (\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(z_1, z_2) \longrightarrow z_1 \cdot z_2$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 \\ &= a_1 a_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i - b_1 b_2 \\ &= a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i \end{aligned}$$

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Buenas Propiedades $\quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Conmutativos $\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \end{cases}$

Asociativas $\begin{cases} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{cases}$

Distributivas $\{ \; z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$

Ejemplo:

$$z_1 = 2 + 4i$$
$$z_2 = -3 + 8i$$

$$z_1 + z_2 = (2+4i) + (-3+8i)$$
$$= -1 + 12i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+4i)(-3+8i)$$
$$= -6 + 16i - 12i - 32$$
$$= -38 + 4i$$

Cero y Unidad

El cero en el cuerpo $\mathbb{C}$ es el número $0 + 0i$.

La unidad es $1 + 0i$

$$z + 0 = z \qquad\qquad 0 + 0i = 0$$
$$z \cdot 1 = z \qquad\qquad 1 + 0i = 1$$

$z = a + ib \qquad -z = -a + (-b)i$

$$z + (-z) = 0$$

$0 \neq z = a + ib \qquad \boxed{z^{-1} = \, ?}$

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

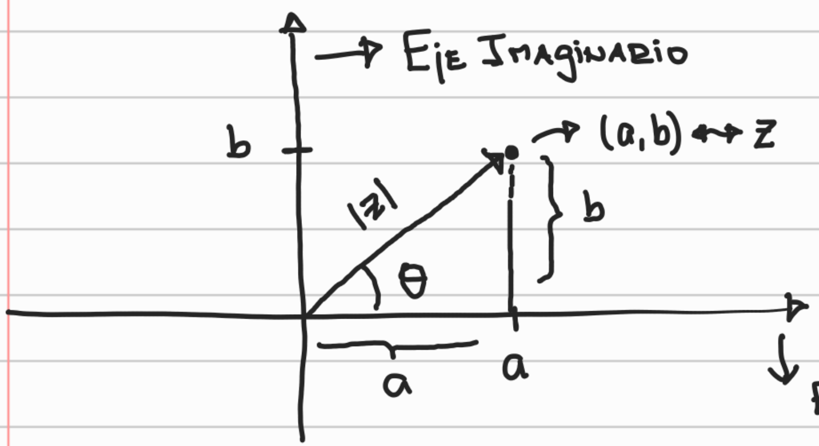
Plano Complejo

$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
CUERPO ORDENADO	CUERPO
DADOS $x, y \in \mathbb{R}$ $x = y, \quad x > y, \quad x < y$	?

Un número complejo $z = x + iy$ está determinado únicamente por un par ordenado (x, y)

$$z = 2 - 3i \longleftrightarrow (2, -3)$$

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2$$



$z = a + ib$

<u>Definición:</u> Sea $z = a+bi$ un complejo.
Llamamos módulo a la distancia de z al origen: $\sqrt{a^2+b^2}$ y se denota $|z|$.

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

El ángulo θ que forma el vector (a,b) con el eje Real lo denominamos argumento de z

$$\mathrm{Arg}(z) = \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\begin{tikzcd} z \arrow[r] \arrow[d] & (a,b) \\ (|z|, \mathrm{Arg}(z)) & \end{tikzcd}$$

$|z| \geq 0 \qquad |z| = 0 \leftrightarrow z = 0$

<u>Obs:</u> Que hay varios argumentos posibles, dado que el ángulo está determinado a menos de múltiplos de 2π.

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } \boxed{a>0,\ b=0} \\ \pi & a<0 \quad b=0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) & a>0,\ b>0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & a<0 \quad b>0 \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)-\pi & a<0 \quad b<0 \end{cases}$$

RESUMEN

$$\mathbb{C} = \{a+bi : a, b \in \mathbb{R}\} \qquad i^2 = -1$$

$$\mathbb{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot)$$ Estructura de Cuerpo.

$z_1 = a_1 + b_1 i$ $\qquad z_1 + z_2 := a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$

$z_2 = a_2 + b_2 i$ $\qquad z_1 \cdot z_2 := a_1 a_2 - b_1 b_2 + (b_1 a_2 + a_2 b_1)i$

CERO DEL CUERPO $\qquad 0 = 0 + 0i$

UNIDAD DEL CUERPO $\qquad 1 = 1 + 0i$

$$z = \underbrace{a}_{\mathrm{Re}(z)} + \underbrace{b}_{\mathrm{Im}(z)} i$$

Identificación

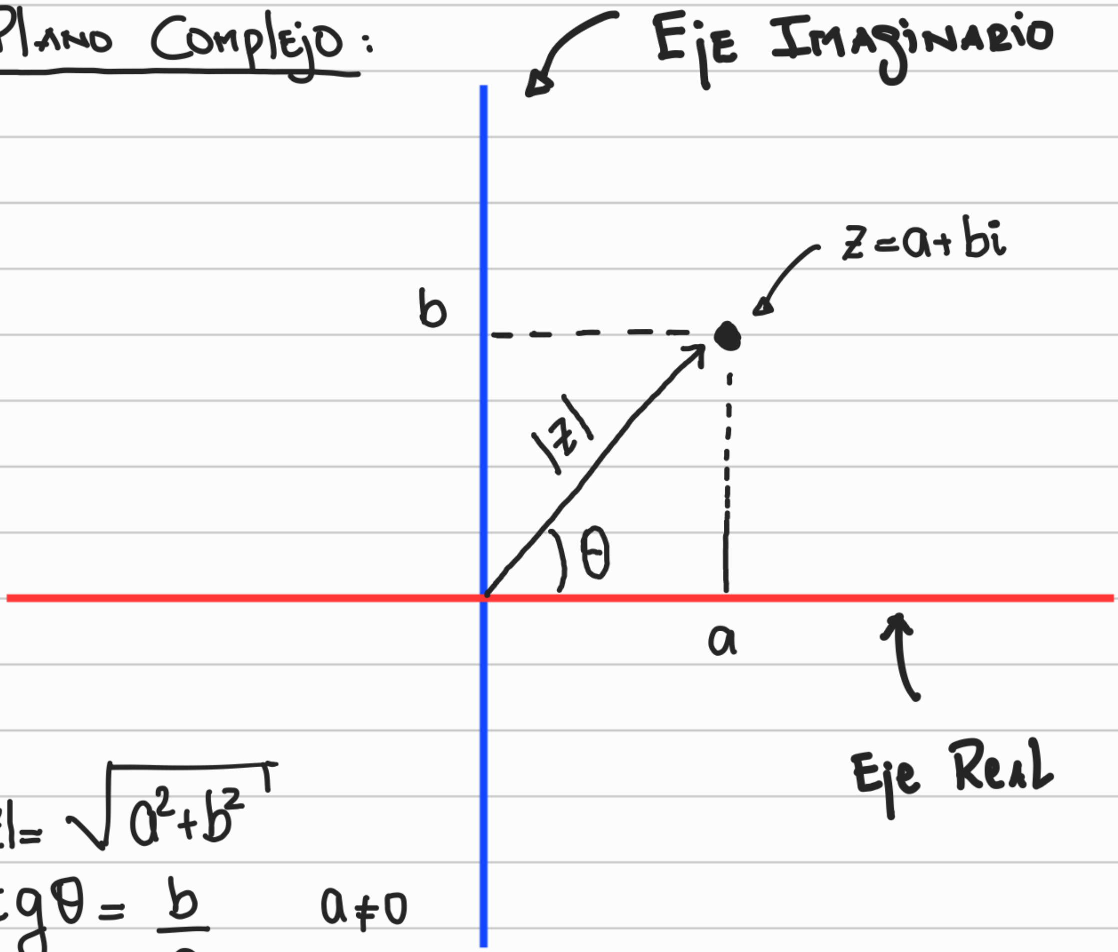
$$\mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

$$z = \underbrace{a + bi}_{\text{Número Complejo}} \longleftrightarrow \underbrace{(a, b)}_{\text{Par ordenado}}$$

Copia de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$

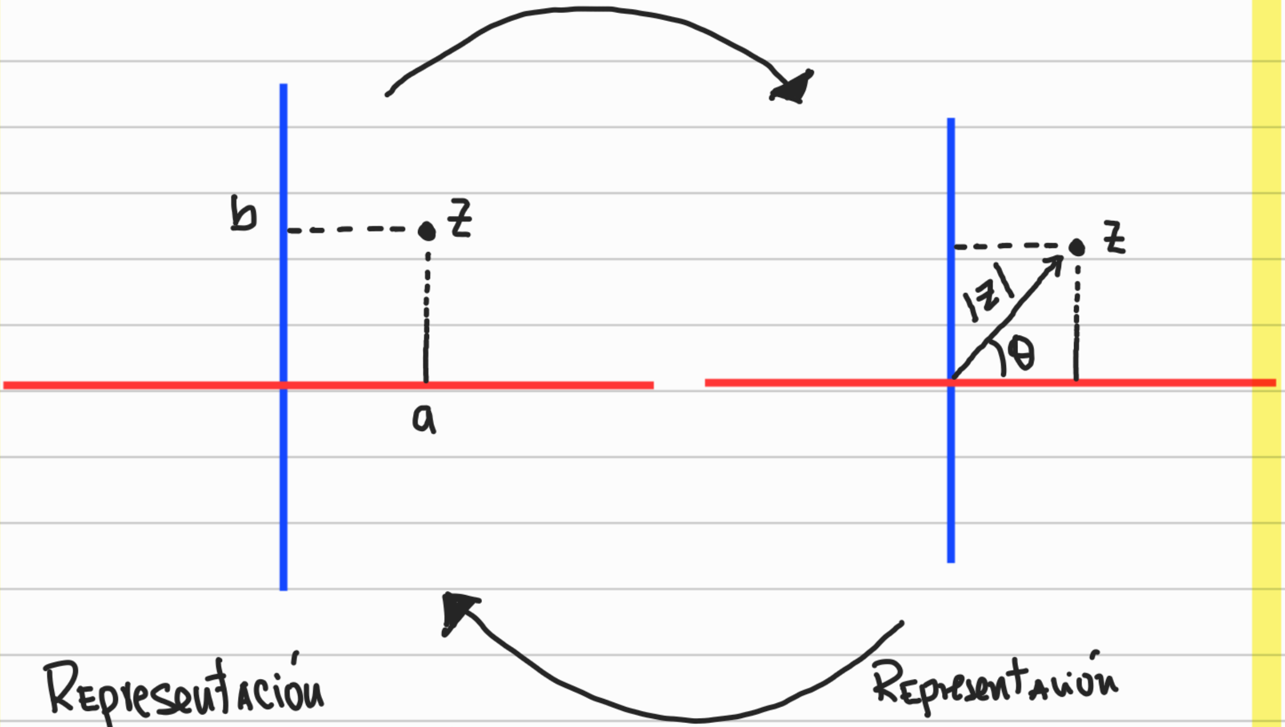
$$\mathbb{R} \text{ ``}\subseteq\text{''} \mathbb{C}$$

Plano Complejo:



$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

$$tg\theta = \frac{b}{a} \qquad a \neq 0$$



Representación usando notación binómica

Representación usando el modulo y el argumento

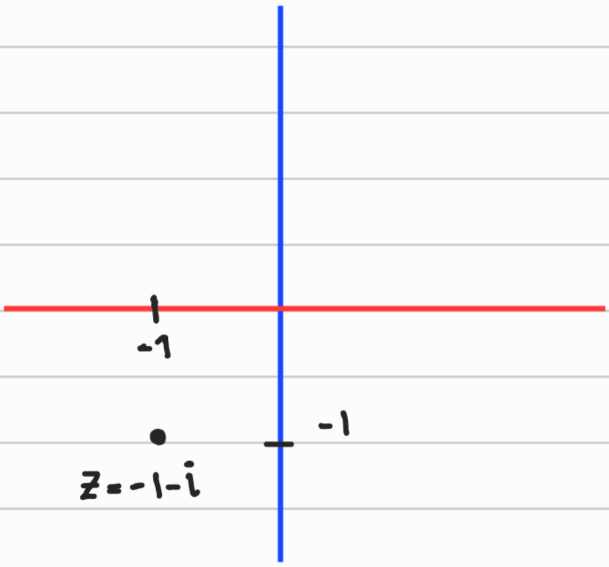
$(\Rightarrow)$ $z = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$! Cuidado.

Ejemplo: (Ejemplo 1.5 Notas)

$z = -1-i$

① Representamos

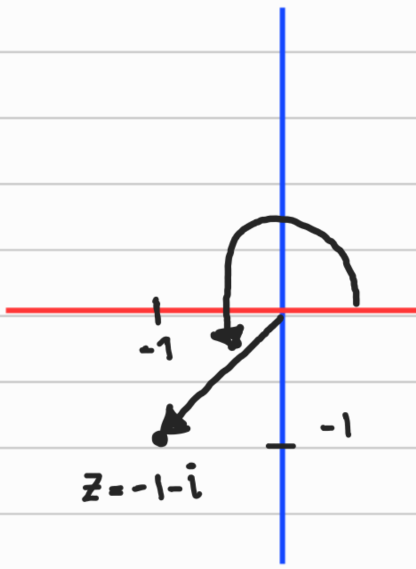


② Calculamos sin cuidado

$|z| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$ ✓

$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$?

③ Verificamos:



$\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$ ✓

$= 5\pi/4$

$z = x + iy$

$$\theta = \begin{cases} 0 & x > 0,\ y = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) & x > 0,\ y > 0 \\ \pi/2 & x = 0 \quad y > 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi & x < 0 \quad y > 0 \\ \pi & x < 0 \quad y = 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi & x < 0 \quad y < 0 \\ -\pi/2 & x = 0 \quad y < 0 \\ \operatorname{arctg}(y/x) & x > 0 \quad y < 0 \end{cases}$$