Ejemplos

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 3x+1$

x	$f(x)$
0	1
-1	-2
1	4

$f(0) = 3.0+1$

$f(-1) = 3(-1)+1$

$f(1) = 4$

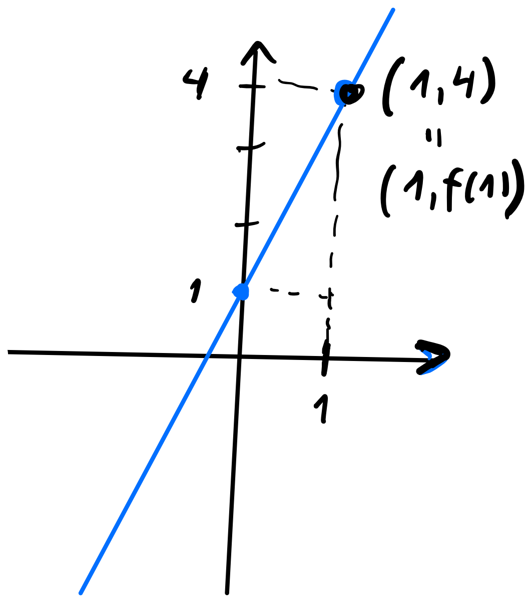


gráfico de f

$\boxed{\begin{array}{l} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{función} \\ \text{El gráfico de } f \text{ es} \\ \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = f(x)\} \end{array}}$

Ejemplo :

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

x	$f(x)$
1	1
$\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)$
$\vdots$	

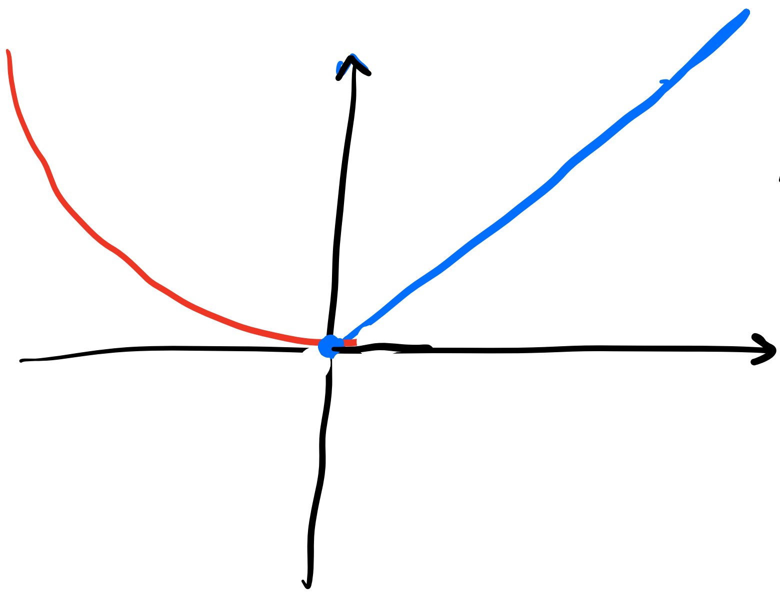
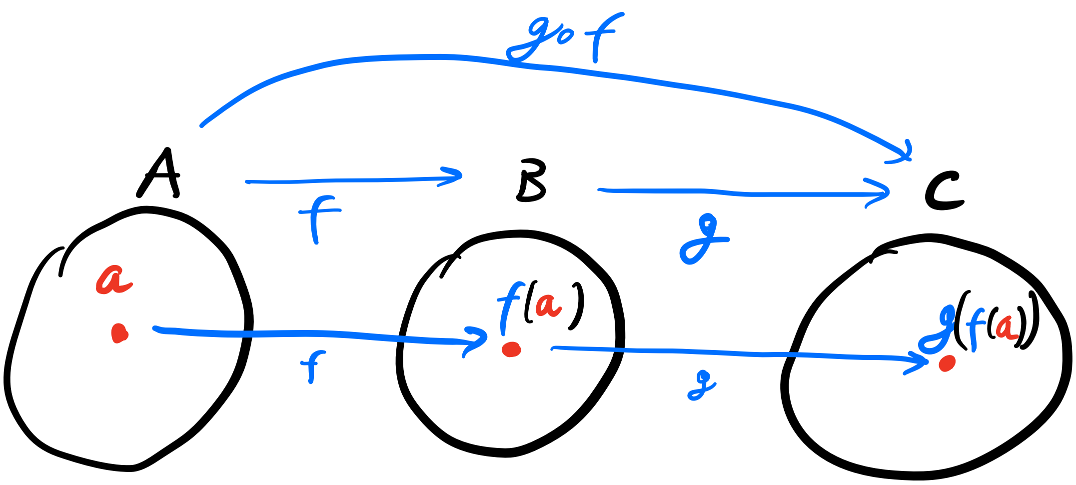


gráfico de g

Composición de funciones



$(g \circ f) : A \longrightarrow C$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

Ej: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 3x+1$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = x^2$

$(g \circ f): \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+1) = (3x+1)^2 = 9x^2+6x+1$$

Conjunto imagen o recorrido

$f: A \longrightarrow B$ función

El conjunto imagen de f

$$\operatorname{Im}(f) = \{ f(x) \,/\, x \in A \}$$

De otra manera:

$$\operatorname{Im}(f) = \{ b \in B \,/\, b = f(a) \text{ para algún } a \in A \}$$

Otra manera:

$$\operatorname{Im}(f) = \{ b \in B \,/\, (\exists a \in A \,/\, b = f(a)) \}$$

" es el conjunto de los b en B tales que :

existe un $a \in A$ tal que $b = f(a)$"

Ejemplo:

$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{a, b, c, d\}$

$f: A \longrightarrow B$ definida como $\begin{cases} f(1) = a \\ f(2) = b \\ f(3) = c \end{cases}$

$Im(f) = \{a, b, c\}$

Ejemplo:

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 + 1$

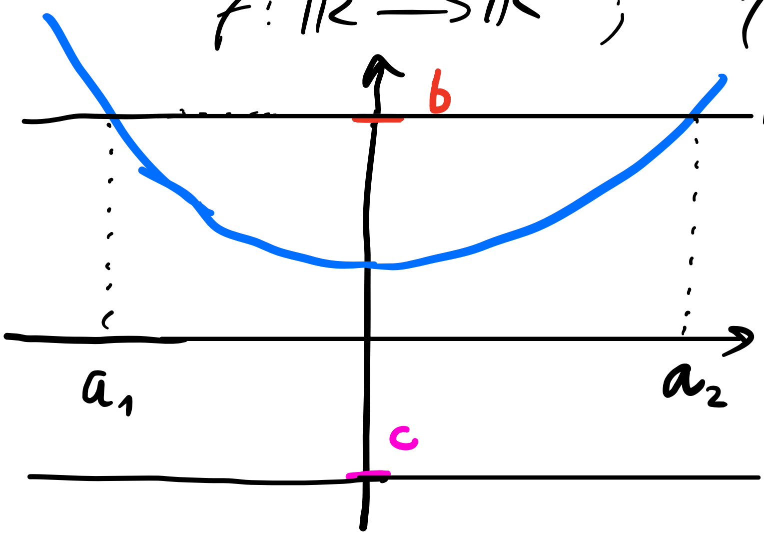


gráfico de f

$b \in Im(f)$

$c \notin Im(f)$

¿Qué tiene que cumplir $b \in \mathbb{R}$ para pertenecer a la imagen de f?

$f(x) = b$ tiene que tener solución

$x^2 + 1 = b \iff x^2 = b - 1$

$\exists x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 = b - 1 \iff b - 1 \geq 0 \iff \boxed{b \geq 1}$

Entonces $Im(f) = \{b \in \mathbb{R} \,/\, b \geq 1\} = [1, +\infty)$

Sea $f : A \to B$, decimos que f es **sobreyectiva** si

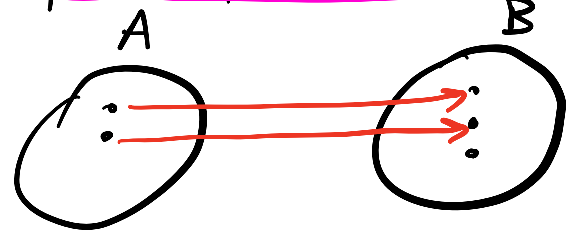
- $Im(f) = B$

Otra forma:

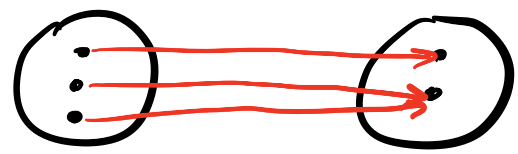
- Todo elemento de B tiene al menos una preimagen

Otra forma:

- $\forall b \in B, \exists a \in A \,/\, f(a) = b$



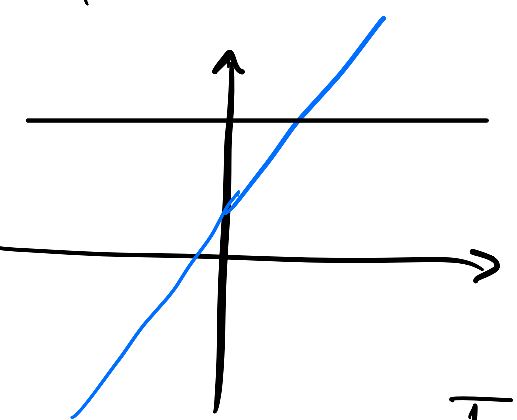
NO ES SOBREYECTA



SI ES SOBREYECTIVA

Ejemplo:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; f(x) = 3x + 1$



$3x + 1 = b \iff$

$3x = b - 1 \iff \boxed{x = \dfrac{b-1}{3}}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

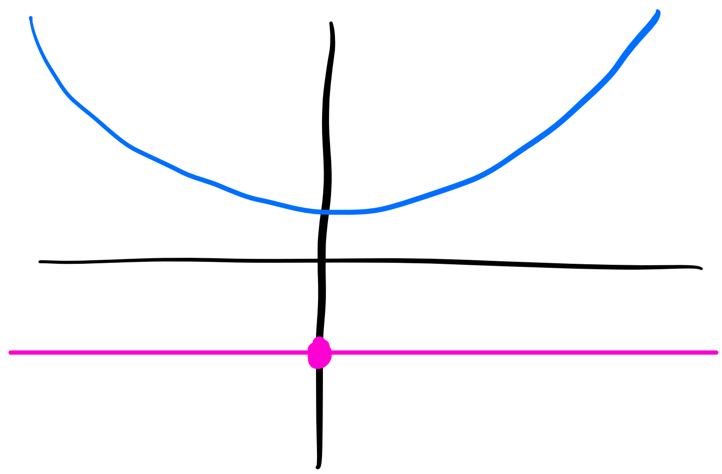
Entonces f es sobreyectiva

Ejemplo:

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 1$

$Im(g) = [1, +\infty) \neq \mathbb{R}$

Entonces g NO es sobreyectiva



Restricción de codominio

Si redefinimos $g: \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty)$ /

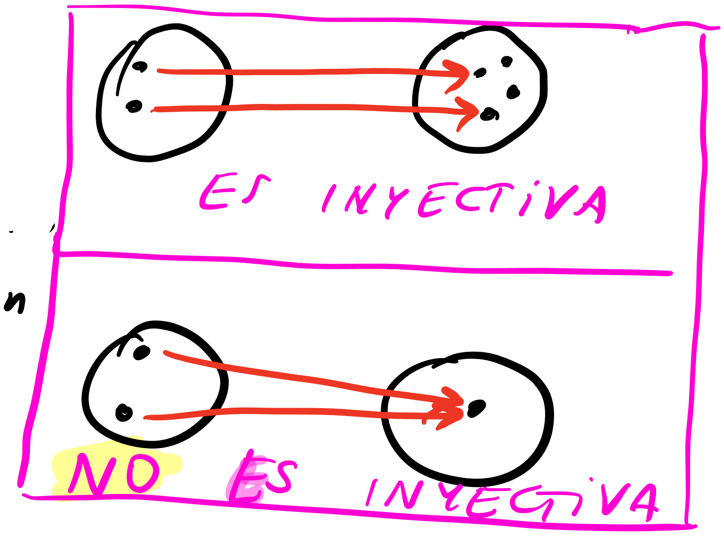
$$g(x) = x^2 + 1$$

Ahora $Im(g)$ y el codominio de g coinciden. Entonces es sobreyectiva.

El proceso de cambiar el codominio por la imagen se llama restricción de codominio.

Sea $f: A \longrightarrow B$ decimos que f

es inyectiva si :



- todo $b \in B$ tiene a lo sumo una preimagen

Otra forma:

- $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

Otra forma:

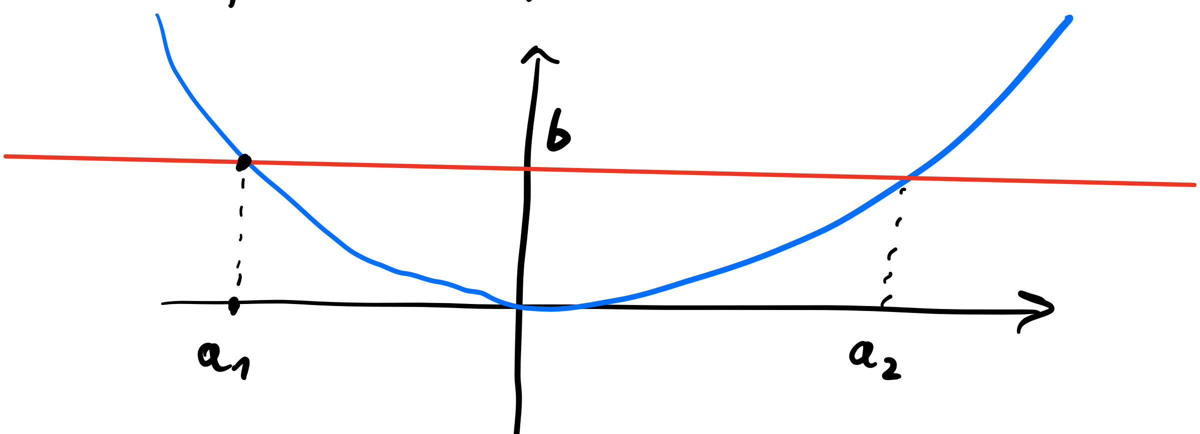
- $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

Ejemplo

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = x^2$

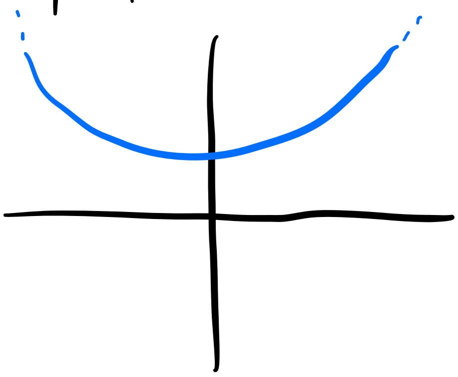
NO es inyectiva, por ejemplo

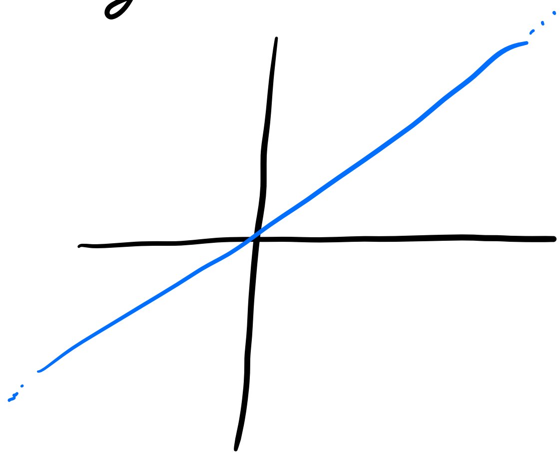
$f(2) = f(-2) = 4$

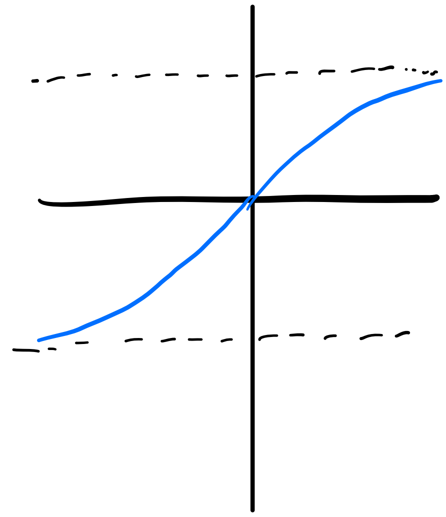


$f(a_1) = f(a_2) = b$

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$







- f no es sobreyectiva ni inyectiva
- g es sobreyectiva e inyectiva

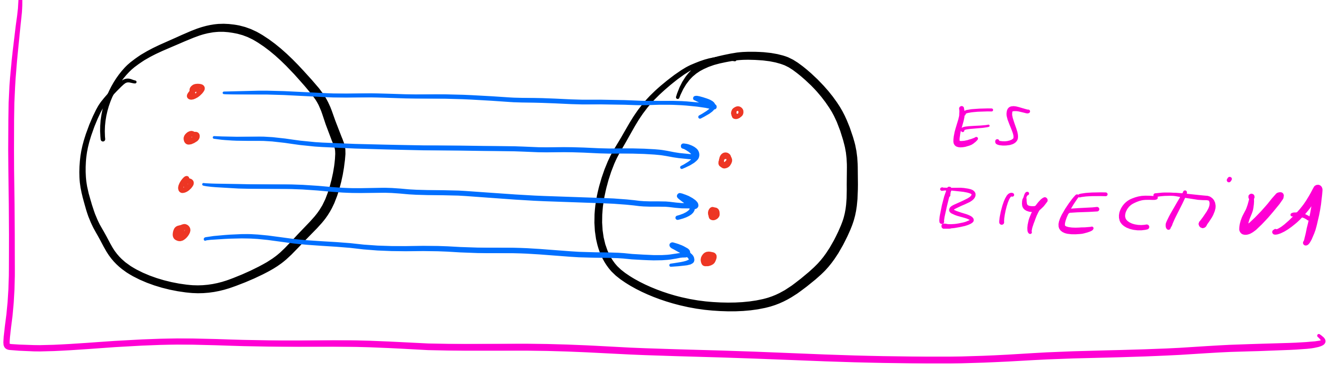
a esto lo llamamos ser **biyectiva**

- h no es sobreyectiva pero sí es inyectiva.

$f: A \longrightarrow B$ es **biyectiva** si

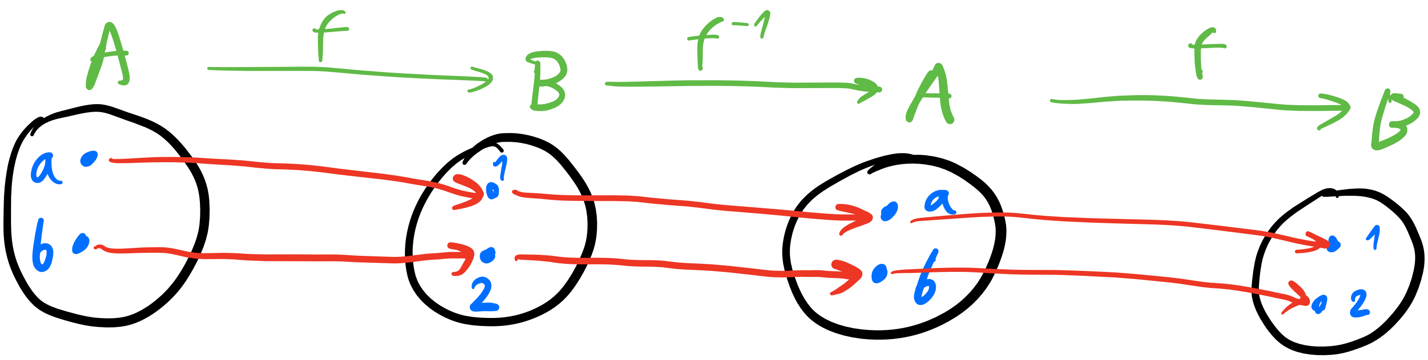
- es inyectiva y sobreyectiva
- todo $b \in B$ tiene exactamente una preimagen
- $\forall b \in B, \ \exists! \, a \in A \ / \ f(a) = b$

"para todo b en B, existe un único a en A tal que $f(a) = b$"



Cuando $f: A \to B$ es biyectiva

¡¡¡ podemos dar vuelta las flechas !!!
y queda función



Si $f: A \to B$ es biyectiva

$f^{-1}: B \to A$ $\quad$ $f^{-1}(b)$ es la única preimagen de b por f

Observar que $(f^{-1} \circ f)(a) = a \quad \forall a \in A$

$$(f \circ f^{-1})(b) = b \quad \forall b \in B$$

$$f^{-1} \circ f : A \to A$$

$f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$