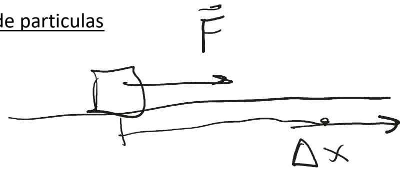
Energía de una colección de particulas



$$W = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

si es conservativa

$${}_A\Delta U_B = -{}_A W_B$$

1 carga →

q_1 $\quad U = 0$

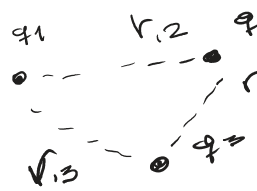
2 cargas →

$q_1 \quad r_{12} \quad q_2$

$$U_{12} = -\int_\infty^{r_{12}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\infty^{r_{12}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} dr$$

$$\boxed{U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}}}$$

3 carga →



$$\rightarrow U = U_{12} + U_{23} + U_{13}$$

$$\boxed{U_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}}}$$

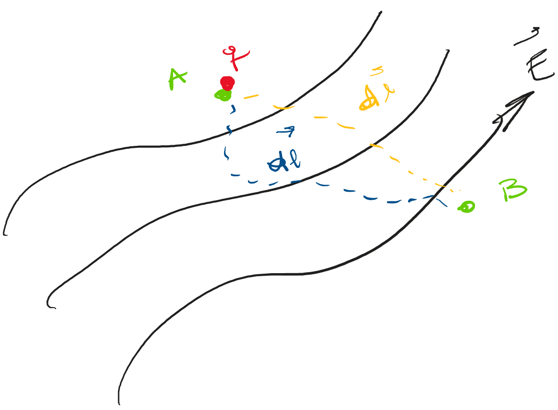
⋮

N cargas →

$$\boxed{U = \sum_{j>i}^{N} \sum_{i=1}^{N} U_{ij}}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{U_{11}} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & \cdots \\ \cancel{U_{21}} & \cancel{U_{22}} & U_{23} & \cdots & \\ \cancel{U_{31}} & \cancel{U_{32}} & \cancel{U_{33}} & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix}$$

Energía en un campo electrico (arbritario)

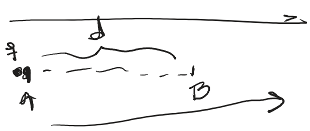


$$\vec{F} = q\vec{E} \rightarrow {}_A\Delta U_B = -{}_A W_B = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\cancel{\Delta V_{AB}}$

$U_B - U_A$

Ej Colineal $\vec{E}$ cte $\quad q > 0$

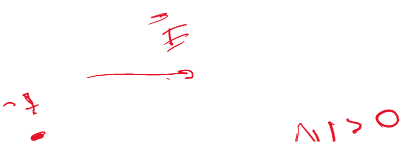


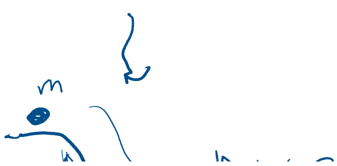
$${}_A\Delta U_B = -\int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_A^B qE\, dl$$

E cte

$$= -qEd < 0$$





Diferencia de potencial (ΔV)

$$_A\Delta U_B = -q\int \vec{E}\cdot d\vec{l} \Rightarrow$$

dividimos por q

$$_A\Delta V_B = \frac{_A\Delta U_B}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

op inversa de la int. es la derivada

$$\rightarrow E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = -\vec{\nabla} V}$$

Ej. carga puntual) q . . . r . . . q_0

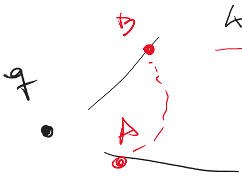
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q q_0}{r}$$

$V(\infty) = 0$

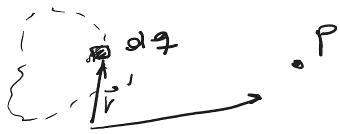
$$V = \frac{\Delta V}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}$$

$$_A\Delta V_B = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$



Distribuciones continuas de carga



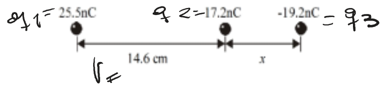
$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, dr'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}')\, d^3r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- también $dq = \sigma\, d^2r'$, $dq = \lambda\, dr'$

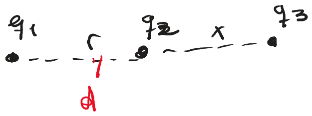
Ejercicio 1

Las cargas mostradas en la figura están fijas en el espacio. Determine el valor de la distancia x de modo que la energía potencial eléctrica del sistema sea cero.



$\rightarrow$)

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r}$$



$$U_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_3}{x}$$

$$U_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{(r+x)}$$

$$U = 0 = U_{12} + U_{23} + U_{13} \Rightarrow \frac{q_1 q_2}{r} + \frac{q_2 q_3}{x} + \frac{q_1 q_3}{r+x} = 0$$

multiplicamos por $(r = d)$

$(r)(x)(r+x)$ $\rightsquigarrow$ $q_1 q_2 \, x(x+d) + q_2 q_3 \, d(d+x) + q_3 q_1 d \cdot x = 0$

$\rightsquigarrow \quad a x^2 + b x + c = 0$

$\hookrightarrow \boxed{x = 20{,}5 \text{ cm}}$

$a = q_1 q_3 = 438 (nC)^2$

$b = (q_1 q_2 + q_2 q_3 + q_3 q_1) d$

$= -5566 \, nC^2 \, cm$

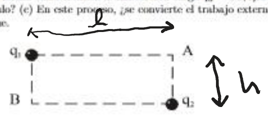
$c = q_2 q_3 d^2 = -70 \, nC^2 cm^2$

P3 Ej5

martes, 25 de marzo de 2025 9:54

Ejercicio 5

En el rectángulo mostrado en la figura, los lados tienen una longitud de 5,0 cm y 15 cm, $q_1 = -5,0\mu C$ y $q_2 = +2,0\mu C$. (a) ¿Cuáles son los potenciales eléctricos en la esquina B y en la esquina A? (b) ¿Cuánto trabajo externo se requiere para mover de forma cuasi estática a una tercera carga $q_3 = +3,0\mu C$ desde B hasta A a lo largo de una diagonal del rectángulo? (c) En este proceso, ¿se convierte el trabajo externo en energía potencial electrostática o viceversa? Explique.



$k = 1/4\pi\epsilon_0$

a) $V_A^{(1)} = \frac{k q_1}{\ell}$ $\qquad V_A^{(2)} = \frac{k q_2}{h}$

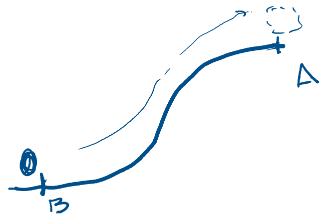
$$\rightarrow V_A = V_A^{(1)} + V_A^{(2)} = \frac{k q_1}{\ell} + \frac{k q_2}{h} = \underline{\underline{59,9\,kV}}$$

idem $\quad V_B = \frac{k q_1}{h} + \frac{k q_2}{\ell} = \underline{\underline{-779\,kV}}$

$${}_B\Delta U_A = q_3\,{}_B\Delta V_A = \underbrace{q_3}_{>0}\underbrace{(V_A - V_B)}_{>0} = 2,52 \text{ Joules}$$

" (C · Volt)

b)

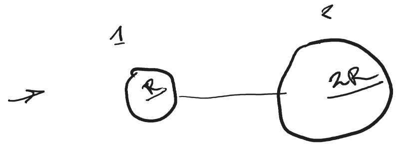


P3 Ej7

martes, 25 de marzo de 2025 10:01

Ejercicio 7

Considérense dos esferas conductoras separadas por una gran distancia, teniendo, la segunda, el doble de diámetro que la primera. La esfera más pequeña tiene inicialmente una carga positiva q y la más grande está inicialmente sin carga. Se conectan ahora las esferas con un alambre delgado largo y rectilíneo (a) ¿Cómo se relacionan los potenciales finales V_1 y V_2 de las esferas? (b) Halle las cargas finales q_1 y q_2 sobre las esferas en términos de q.



a) $\boxed{V_1 = V_2}$

b) $\boxed{V_{ESFERA} = V_{PUNTUAL} = \frac{kq}{R}}$

$$\boxed{V_0 = \frac{kq}{R}}$$

$\vec{E} = \vec{E}_{puntual}$ de (Gauss)

$$V_P = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}\,\vec{dl} = -\int_{\infty}^{P} \vec{E}_{puntual}\,\vec{dl} = V_{puntual}\,P$$

$$V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{\cancel{k} q_1}{\cancel{R}} = \frac{\cancel{k} q_2}{2\cancel{R}} \Rightarrow \boxed{q_2 = 2q_1}$$

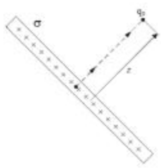
P3 Ej11

martes, 25 de marzo de 2025 9:55

Ejercicio 11

La figura muestra, de canto, una lámina "infinita" de densidad de carga positiva σ. (a) ¿Cuánto trabajo realiza el campo eléctrico de la lámina cuando una pequeña carga de prueba positiva q_0 se lleva desde una posición inicial, sobre la lámina, hasta una posición final, ubicada a una distancia perpendicular z de la lámina? (b) Use el resultado de (a) para demostrar que el potencial eléctrico de una lámina infinita de carga puede escribirse como $V = V_0 - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} z$

donde V_0 es el potencial en la superficie de la lámina.



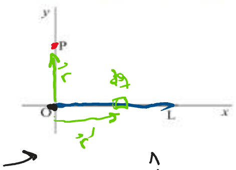
$$\vec{E}_{plano} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$$\Delta V_{A}^{B} = -\int_A^B \vec{E}\, d\vec{l} =$$

martes, 25 de marzo de 2025 9:56

Ejercicio 12

En una varilla, de longitud L, que se encuentra a lo largo del eje x con uno de sus extremos en el origen (x=0), como se muestra en la figura, existe una distribución de carga por unidad de longitud dada por $\lambda = kx$, donde k es una constante. (a) Si se considera que el potencial electrostático en el infinito sea cero, encuentre V en el punto P sobre el eje y (b) Determine la componente vertical, E_y, del campo eléctrico en P a partir del resultado de la parte (a) y también por cálculo directo. (c) ¿Por qué no puede determinarse E_x, la componente horizontal del campo eléctrico en P, usando el resultado de la parte (a)? (d) ¿A qué distancia de la varilla, a lo largo del eje y, el potencial es igual a la mitad del valor en el extremo izquierdo de la varilla?



si $V_\infty = 0$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\lambda(x')\,dx'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\lambda(x) = kx$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{r} &= y\,\hat{j} \\ \vec{r}' &= x'\,\hat{i} \end{aligned}\right\} \quad |\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{x'^2+y^2}$$

$$V_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{kx'\,dx'}{\sqrt{x'^2+y^2}} = \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\int_0^L \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y^2}}\,dx' = \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\sqrt{x'^2+y^2}\Big|_0^L$$

$$= \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{L^2+y^2} - \sqrt{y^2}\right)$$

$$= \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\left(\sqrt{L^2+y^2} - |y|\right)$$

$|y|$

b) $$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{4\pi\epsilon_0}\left(|y| - \sqrt{L^2+y^2}\right)\right)$$

$$= \frac{k}{4\pi\epsilon_0}\left(\mathrm{sg}(y) - \frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right)$$

$E_x = ?$ No podemos porque supusimos x, z fijo $V(y)$

$E_z = ?$ Necesitamos $V(x,y,z)$ es decir tomar $\vec{r} = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$

d) $$\overset{(b)}{V(y=0)} = \frac{kL}{4\pi\epsilon_0} = V_0$$

$$V(y) = \frac{V_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{\cancel{k}L}{\cancel{4\pi\epsilon_0}} = \frac{\cancel{k}}{\cancel{4\pi\epsilon_0}}\left(\sqrt{L^2+y^2} - |y|\right)$$

dividimos por L

$$L/2 = \sqrt{L^2+y^2} - |y| \to 1/2 = \sqrt{1+\underbrace{\left(y/L\right)^2}_{x^2}} - \underbrace{\left|\tfrac{y}{L}\right|}_{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} - |x| = 1/2$$

$$(1/2 + |x|)^2 \quad 1/4 + |x| + \cancel{x^2}$$

$\Rightarrow \quad \sqrt{1+x^2} = |x| - 1/2$

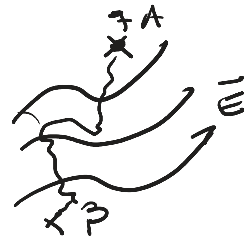
$\Rightarrow \quad 1+\cancel{x^2} = (1/2+|x|)^2 = 1/4 + |x| + \cancel{x^2}$

$\Rightarrow \quad |x| = 3/4 \xrightarrow{x = 1/L} \boxed{|y| = \frac{3}{4}L}$

- Colección de cargas $U = \sum_{j>i}\sum_{i} U_{ij}$ con $U_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$

- Mover una carga q por un campo $\vec{E}$: desde $A \to B$

$$\Delta_A U_B = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



Es conservativo
→ No importa el camino solo los puntos de salida y llegada.

- $$\Delta_A V_B = \frac{\Delta_A U_B}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

nos independiza de la carga

- carga puntual q (y $V_\infty = 0$)

$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r}}$$

- Lo que viene: Aplicación de los temas hasta ahora en **CONDENSADORES** (y ALGO DE CIRCUITOS)

- Recomendación para terminar el practico: Ejs 2, 6, 11 y 10