2. *a*) Calcular la parte real e imaginaria de los complejos $\frac{1}{a+bi}$, $(a+bi)^2$.

$$\frac{1}{a+bi}\cdot\frac{a-bi}{a-bi}=\frac{a-bi}{a^2-(bi)^2}=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$$

$$z+\bar{z} \text{ "=" } 2\,Re(z) \Rightarrow Re(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$z-\bar{z} \text{ "=" } 2i\,Im(z) \Rightarrow Im(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}$$

$$Re:\mathbb{C}=\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$

$z\in\mathbb{R}^2$, $\bar{z}\in\mathbb{R}^2$ $\xrightarrow{+}$ $\mathbb{R}$? $\to \mathbb{R}\times\{0\}\cong\mathbb{R}$

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

$$(a+bi)^2=a^2+2abi+(bi)^2=a^2-b^2+2abi$$

4. Definimos $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(z)=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y)$. Probar que:

e) $e^z=1$ sii $z=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$.

$(\Rightarrow)$

$$e^x\cos y+e^x\sin y\, i=1 \Rightarrow \begin{cases} e^x\cos y=1\\ \cancel{e^x}\sin y=0\end{cases}$$

$$\alpha_1 V_1+\beta_1 V_2=\alpha_2 V_1+\beta_2 V_2 \Leftrightarrow$$

$$\underbrace{(\alpha_1-\alpha_2)}_{0}V_1+\underbrace{(\beta_1-\beta_2)}_{0}V_2=0$$

$$\sin y=0\Rightarrow y=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow e^x\cos(n\pi)=1$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^x}_{>0}(-1)^n=\underbrace{1}_{>0} \Rightarrow n \text{ par} \Rightarrow (-1)^n=1$$

$$\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0\Rightarrow z=n\pi i,\ n \text{ par}$$

$$\Rightarrow z=2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}$$

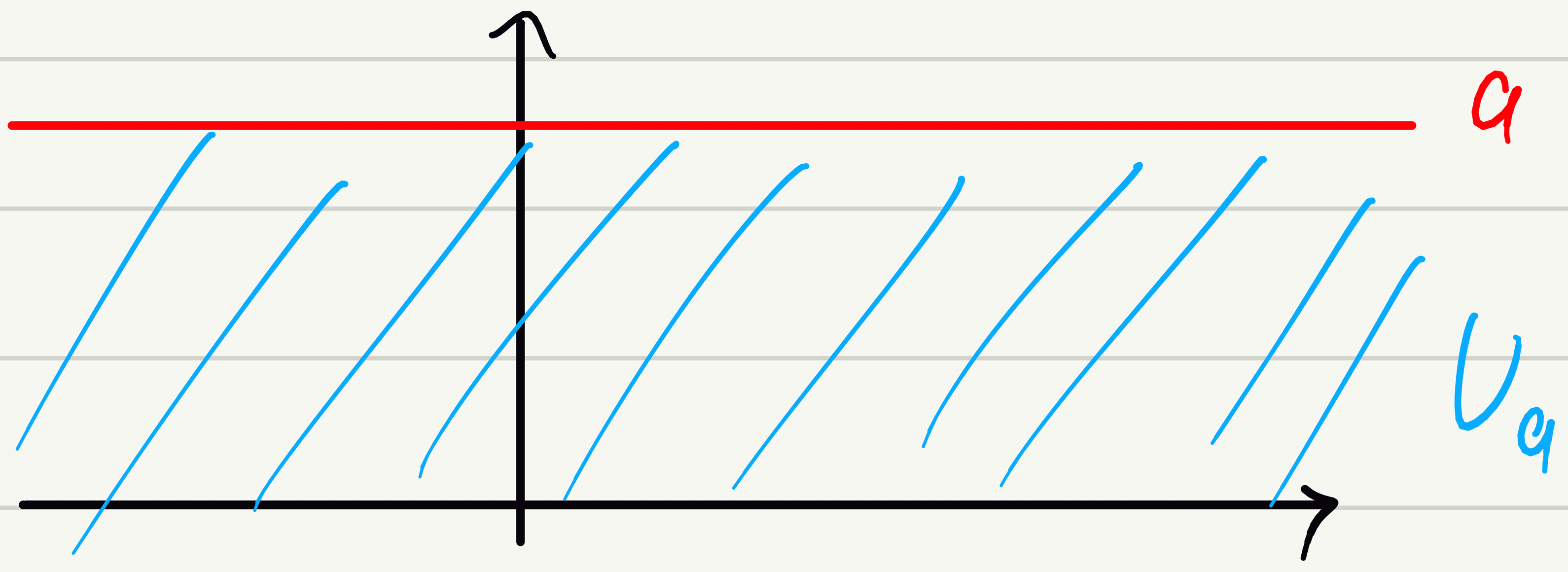
$(\Leftarrow)$

$$e^{2k\pi i}=\overset{1}{\cancel{e^0}}(\overset{1}{\cos(2k\pi)}+i\overset{0}{\cancel{\sin(2k\pi)}})=1$$

b)

$$U_a = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < a\}, \ f(z) = e^z.$$

Discutir según a si f es inyectiva. Determinar y graficar la imagen para distintos valores de a. Hallar las imágenes de las rectas paralelas a los ejes coordenados. Observar que si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio con $a_n \neq 0$, entonces $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. De esto concluir que la función exponencial $f(z) = e^z$ no puede ser un polinomio ni un cociente de dos polinomios $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$.



$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

$$|e^z| = e^x, \quad \arg(e^z) = y \mod 2\pi$$

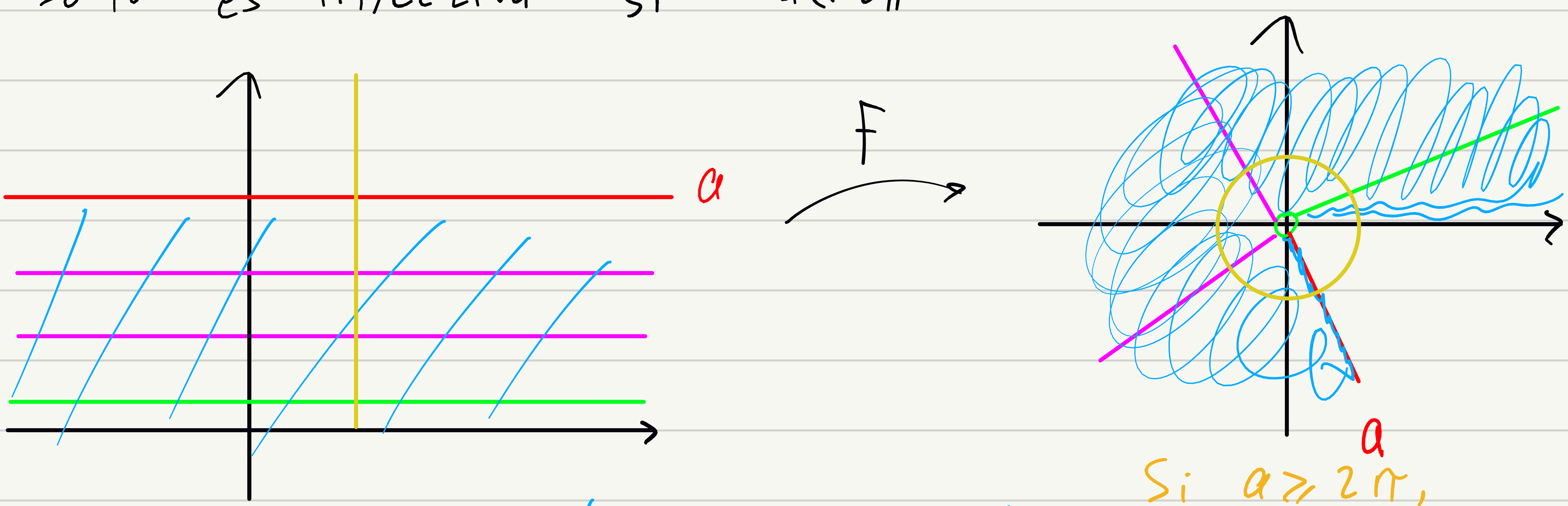
$$e^{x+iy} = e^{a+bi} \Rightarrow e^x = e^a \Rightarrow x = a$$

$$\Rightarrow e^{iy} = e^{bi} \Rightarrow y \ (\text{mod } 2\pi) = b \ (\text{mod } 2\pi)$$

También: $e^{iy} \cdot e^{-bi} = 1 \Rightarrow e^{i(y-b)} = 1$

$$\Rightarrow \cancel{i}(y-b) = 2k\pi\cancel{i} \Rightarrow y = b + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Sólo es inyectiva si $a \leq 2\pi$



Si $a \geq 2\pi$, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{C} - \{0\}$

$$(\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$
$$\rho > 0$$

$$(r, \theta) \longmapsto (e^r\cos\theta, e^r\sin\theta)$$

$$r = \ln(\rho) \qquad (\ln(\rho), \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

$$\lim_{z\to\infty} a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$$

$$= \lim_{z\to\infty} \underbrace{z^n}_{\to\infty} \underbrace{\left(\underbrace{a_n}_{\to a_n} + \cdots + \underbrace{\frac{a_1}{z^{n-1}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{a_0}{z^n}}_{\to 0} \right)}_{\to a_n} = \infty$$

$P = \sum a_k z^k$ Si $gr(P) > gr(Q)$, $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \infty$

$Q = \sum b_k z^k$

Si $gr(P) = gr(Q)$, $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n}{b_n}$

Si $gr(P) < gr(Q)$, $\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = 0$

$\lim_{y\to+\infty} e^{iy}$ no existe $\Rightarrow$ $\lim_{z\to\infty} e^z$ no existe

10. **Criterio del mayorante de Weirestrass en espacios de Banach**

Definición: Un espacio de Banach es un par $(V, |\cdot|)$ donde V es un espacio vectorial, $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ es una norma en V y se cumple que todas las sucesiones de Cauchy son convergentes (es decir, V es completo).

Teorema: (Mayorante de Weirestrass)

Sean $(V, |\cdot|)$ un espacio de Banach, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en V, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \underbrace{|v_n| < a_n}_{a_n > 0}$ y además $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge.

Para probar el resultado anterior se sugiere seguir los siguientes pasos

a) Considerar la suma parcial de término a_n y probar que es de Cauchy.

b) Usar lo anterior para probar que la suma parcial de término general v_n es de Cauchy.

c) Concluir.

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, |v_n - v_m| < \varepsilon$

$\mathbb{Q}$

3

3,1

3,14

3,141

3,1415

3,14159

3,141592

3,141926

Sean $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ S_n es creciente

Como S_n converge, es de Cauchy

Sea $\varepsilon > 0$. Para ese ε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m \geq n_0, |S_n - S_m| < \varepsilon$

$n \geq m$

$$\underset{\varepsilon >}{|S_n - S_m|} = \sum_{k=m+1}^{n} a_k > \sum_{k=m+1}^{n} |v_k| \geq \left| \sum_{k=m+1}^{n} v_k \right| = |T_n - T_m|$$

Es decir, T_n es de Cauchy

Como V es completo, T_n converge ■