

Curso: HORMIGÓN ESTRUCTURAL 1

MÓDULO 5: ANÁLISIS DEL PROCESO DE ROTURA

Agustin Spalvier (aspalvier@fing.edu.uy)

1^{er} Semestre - 2025

Universidad de la República - Uruguay



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

- **Análisis del proceso de carga y rotura de una viga a flexión**
- **Relación Momento-Curvatura**
- **Armadura mínima**
- **Proceso de rotura en una viga**
- **Importancia de la ductilidad**
- **Redistribución de momentos**

ACLARACIÓN: Estas transparencias se preparan únicamente como una guía para las clases, las cuales cumplen la función de ser una presentación de los temas que el estudiante debe aprender para aprobar el curso, indicados en la bibliografía.

Bibliografía: Jiménez Montoya – 15^a Ed. – Cap. 14 y 15. (Estos capítulos abarcan temas de los módulos referidos a dimensionado ante sollicitaciones normales)

- **Consideraciones generales:**

- Ejemplo con viga “bien diseñada”

- Veremos más adelante que tenemos límites inferiores y superiores para la armadura que se puede disponer, si la armadura es inferior a un valor mínimo (viga sub-armada) o mayor a un valor máximo (viga sobre-armada), podremos tener comportamientos no deseados.

- En el proceso de carga, la sección más solicitada pasa por tres estados diferentes:

- **Estado I (materiales en comportamiento elástico-lineal):** Tensiones proporcionales a las deformaciones. El hormigón colabora a tracción.
- **Estado II (hormigón fisurado):** Cuando se alcanza la resistencia a tracción del hormigón, la pieza se fisura. Nuevo equilibrio, con la sección fisurada (el **hormigón no colabora a tracción**).

- *Este estado se sub-divide en dos:*

- » Estado IIa: Fase inicial, cuando ambos materiales continúan en el tramo lineal.
- » Estado IIb: Cuando por lo menos uno de los materiales sale del tramo lineal.

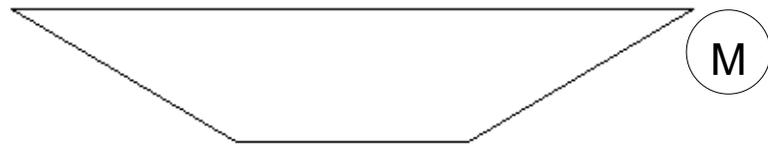
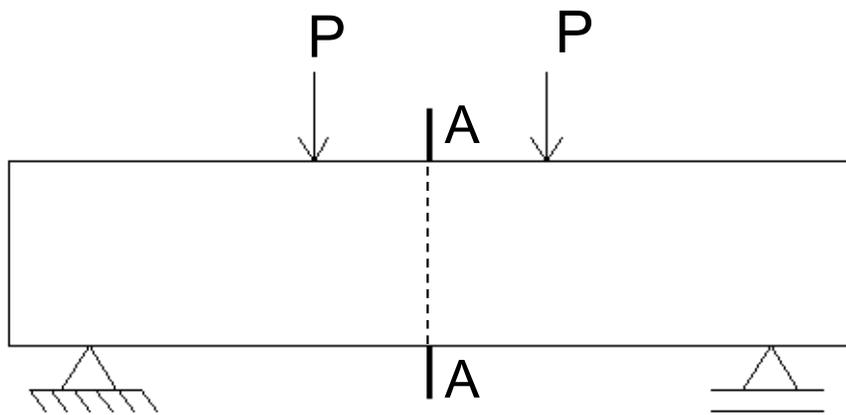
- **Estado III (pre-rotura):** límite del estado anterior, con uno de los materiales en su deformación máxima. Normalmente, la línea neutra sube lo máximo posible, y se alcanza el brazo de par máximo (z máximo).



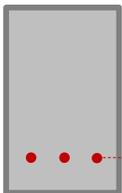
ANÁLISIS DEL PROCESO DE ROTURA

• Desarrollo del proceso de rotura:

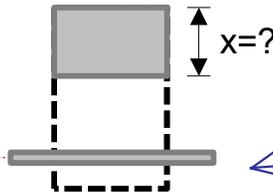
- Viga de hormigón armado, simplemente apoyada, sometida a flexión pura.



Sección bruta

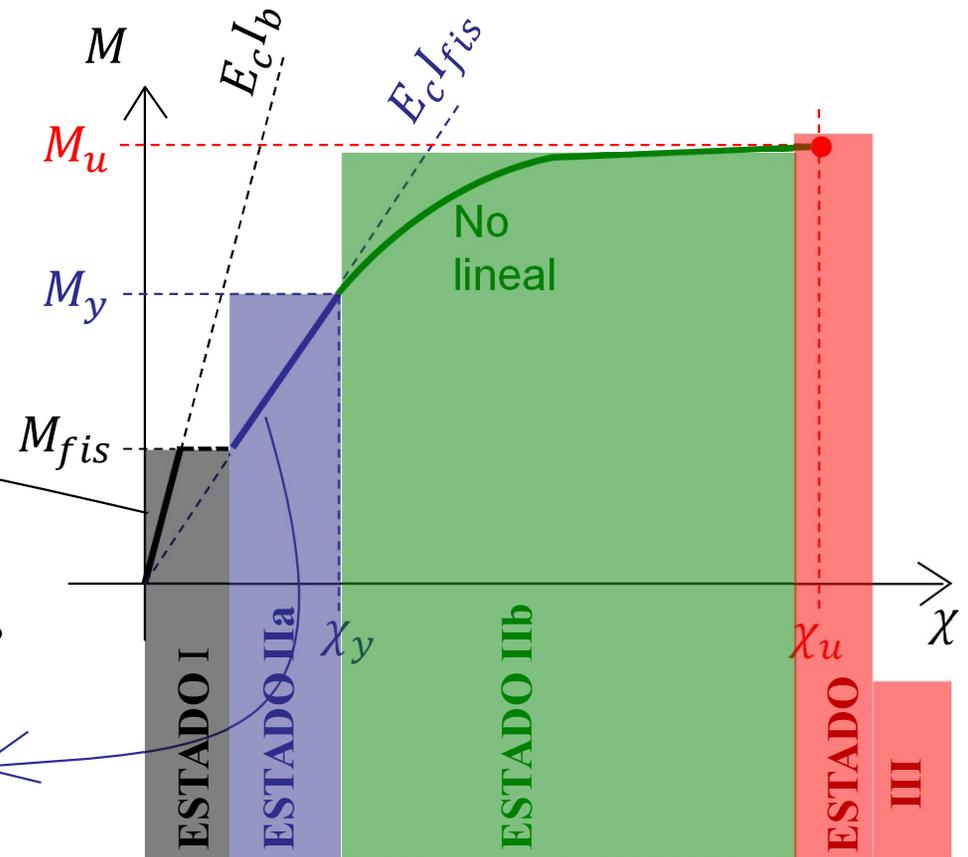


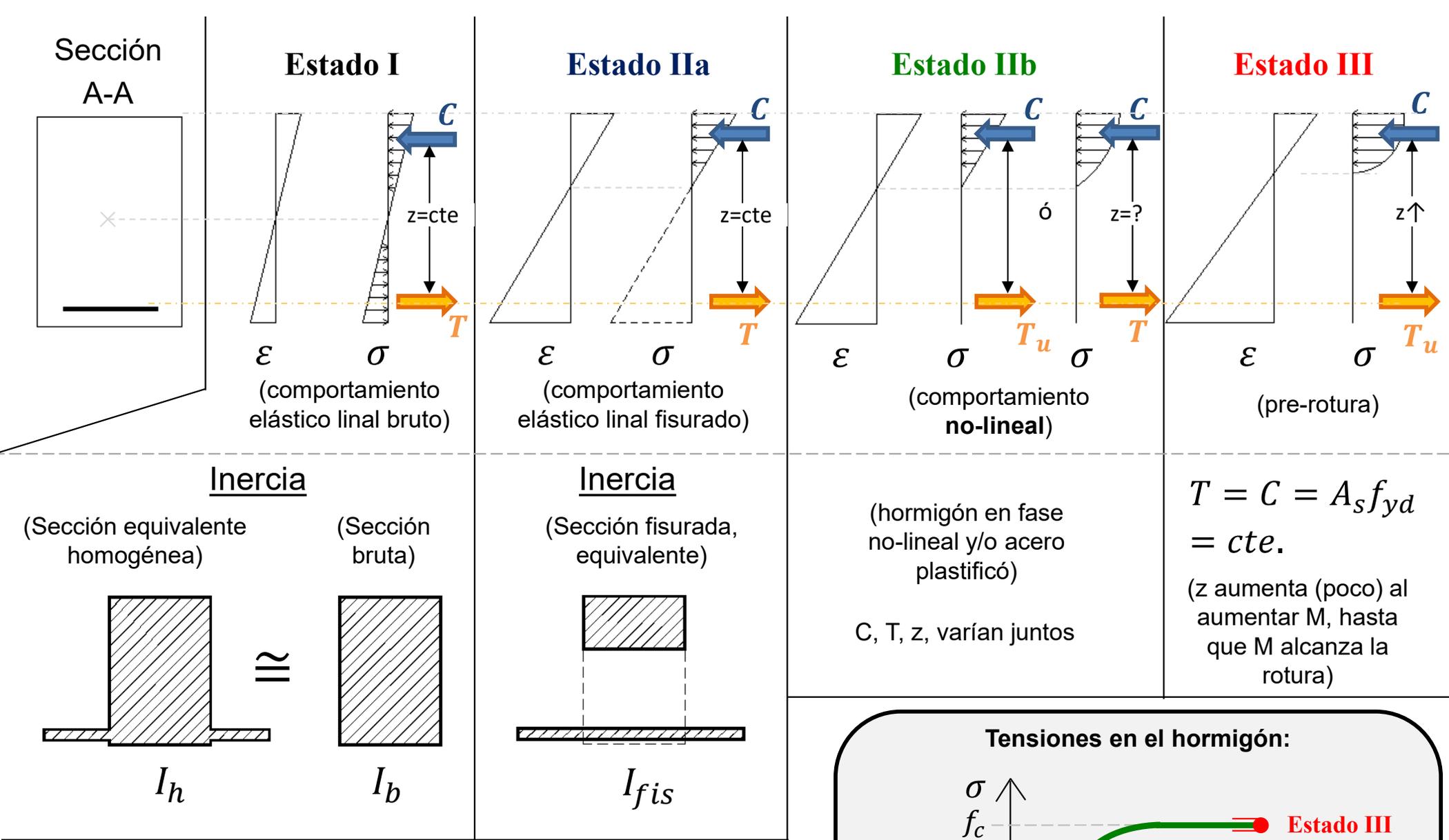
Sección fisurada (equivalente)



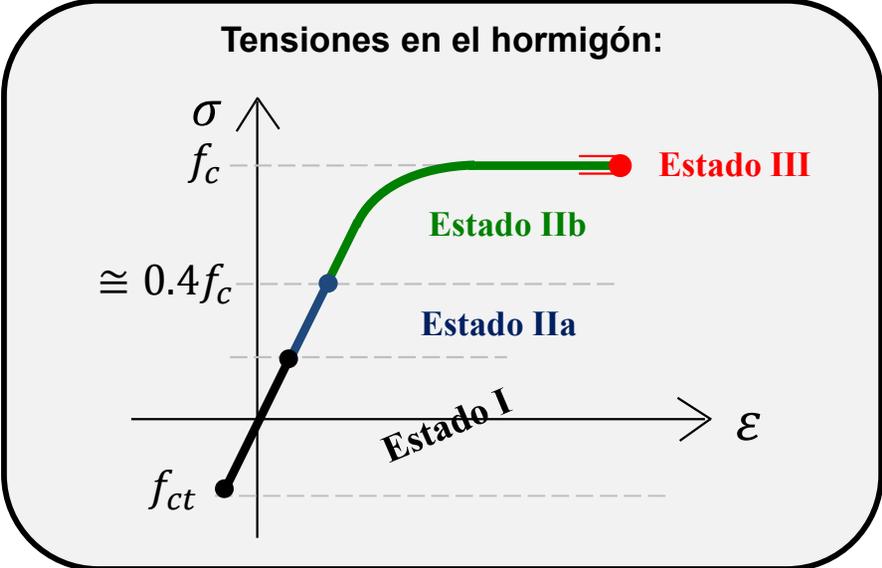
Relación Momento-Curvatura

$$\chi = \frac{M}{EI}?$$





• Fórmula de JM de I_{fis} tiene error (exponente debería ser 2, no 3)



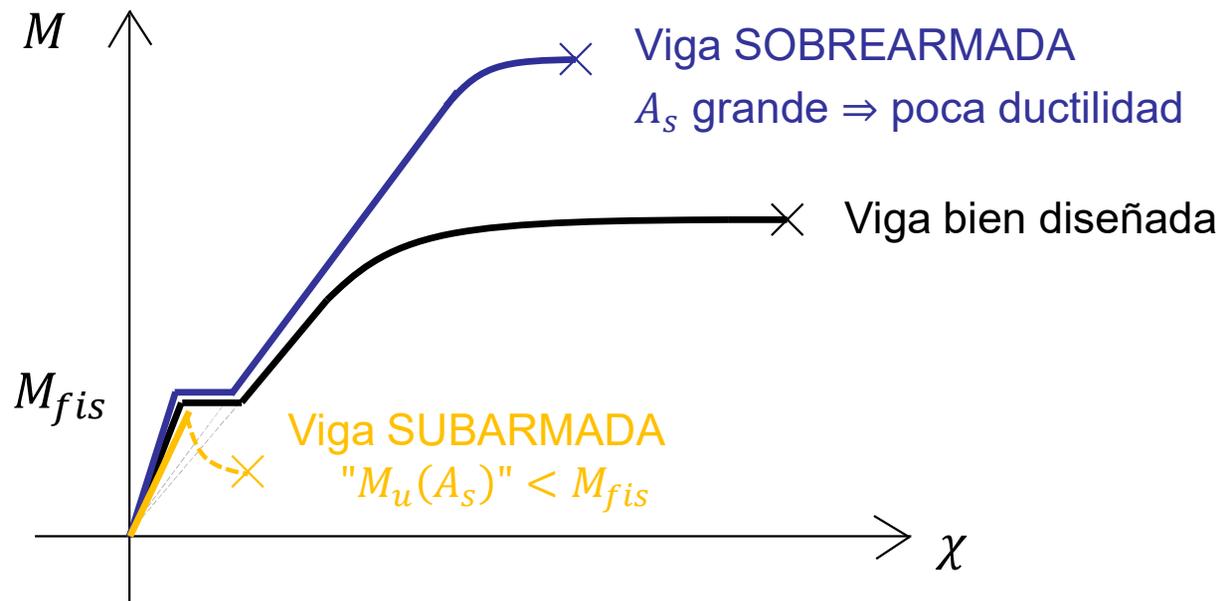
Vigas a flexión “mal diseñadas”

- **Viga con poca armadura (viga sub-armada)**

- La pieza rompe bruscamente al alcanzar las tensiones de tracción en el hormigón.
 - Por lo tanto, el armado mecánico mínimo se determina para asegurar que la sección de hormigón armado (M_U) resiste más que el momento en que la pieza se fisura (M_{fis}) $\Rightarrow M_U \geq M_{fis}$

- **Viga con mucha armadura (viga sobre-armada)**

- La pieza rompe bruscamente al alcanzar el M_U , bajando la línea neutra, y aumentando la cabeza de compresión del hormigón hasta que éste estalla.
 - Por lo tanto, se debe diseñar la pieza para que “rompa” en el dominio 2 o 3 recomendado. Esto nos asegura un tramo de plastificación antes de la rotura.



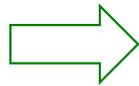
Cuantía mínima mecánica en flexión

- $A_{s,min}$ para evitar que la pieza rompa bruscamente al fisurar (pasaje de EI a EII).

$$M_u \geq M_{fis} \begin{cases} M_u = A_s f_{yd} z \text{ (ELU)} \\ M_{fis} = W_1 f_{ct,m,fl} \text{ (estado I)} \end{cases}$$

$f_{ct,m,fl}$ Resistencia media a flexotensión del hormigón.

$$\Rightarrow A_{s,min} f_{yd} z \geq W_1 f_{ct,m,fl}$$



$$A_{s,min} \geq \frac{W_1 f_{ct,m,fl}}{f_{yd} z}$$

Fórmula general para despejar $A_{s,min}$

(Art. 9.2.1.1 Anexo Español)

Cuantía mínima mecánica en flexión

- Cálculo “exacto” para una sección rectangular siguiendo las definiciones de las características del hormigón establecidas en el Anexo Español del EuroCódigo.

$$A_{s,min} f_{yd} z \geq W_1 f_{ct,m,fl}$$

$$A_{s,min} f_{yd} \overset{z}{0,8 h} \geq \overset{W_1}{\frac{bh^2}{6}} \overset{f_{ct,m,fl}}{f_{ct,m}}$$

$$\Leftrightarrow A_{s,min} f_{yd} 0,8 \geq \frac{bh}{6} f_{ct,m}$$

$$A_{s,min} \geq \frac{bh}{6} \frac{f_{ct,m}}{f_{yd} 0,8} \overset{\cong 1,1 d}{\cong} \frac{1,15 \cdot 1,1 f_{ct,m}}{6 \cdot 0,8} \underset{= f_{yk}/1,15}{f_{yk}} bd$$

Tabla A19.3.1 CE2021

$$f_{cm}(t) = f_{ck}(t) + 8 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

$$f_{ct,k} = 0,70 f_{ct,m}$$

$$f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{(2/3)} \leq f_{ck} \text{ 50 N/mm}^2$$

$$f_{ctm} = 2,12 \cdot \ln(1 + (f_{cm}/10)) > f_{ck} \text{ 50 N/mm}^2$$

Sección A19 3.1.8 CE2021

$$f_{ct,m,fl} = \max \{ (1,6 - h/1.000) f_{ct,m}; f_{ct,m} \}$$

$$A_{s,min} \geq 0,264 \frac{f_{ct,m}}{f_{yk}} bd$$

Esto es exactamente lo que especifica el EC2 y Cod.Est. 2021:

$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t d \quad \text{Pero no menos que } 0,0013 b_t d \quad (9.1N)$$

Donde:

b_t indica la anchura media de la zona de tensión; para una viga en T con el ala comprimida, sólo se considera la anchura del alma para el cálculo del valor de b_t ;

Cuantía mín en flexión según EC



$$A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t d \quad \text{Pero no menos que } 0,0013 b_t d \quad (9.1N)$$

Donde:

b_t indica la anchura media de la zona de tensión; para una viga en T con el ala comprimida, sólo se considera la anchura del alma para el cálculo del valor de b_t ;

Esto es lo que se denomina la armadura mínima mecánica

Veamos cómo expresar este mínimo en términos de cuantía (ω) para facilitar las cuentas:

Esta es la armadura mínima geométrica para vigas (que establece el CE2021)

(luego profundizaremos)

Según norma $f_{ctm} = 0,30 \times f_{ck}^{(2/3)}$. Tomamos $f_{ctm} \cong 0.1 f_{ck}$ que nos facilita las cuentas (nos deja con una diferencia de +/- 10 % del valor "exacto")

$$f_{ctm} \cong 0.1 f_{ck}$$

$$A_{s,min} \cong 0,026 \frac{f_{ck} b d}{f_{yk}} = 0,026 \frac{1,5 f_{cd} b d}{1,15 f_{yd}} \Rightarrow A_{s,min} = 0,034 \frac{f_{cd} b d}{f_{yd}} \Rightarrow \frac{A_{s,min} f_{yd}}{f_{cd} b d} = 0,034$$

$$\Rightarrow \frac{A_{s,min} f_{yd}}{f_{cd} b d} \equiv \omega_{min} = 0,034$$

Esta es la cuantía mecánica mínima calculada con estas aproximaciones. Basándonos en la Norma EHE, para este curso tomaremos:

$$\frac{A_{s,min} f_{yd}}{f_{cd} b h} \equiv \omega_{min(h)} = 0,04$$

$$\frac{A_{s,min} f_{yd}}{f_{cd} b d} \equiv \omega_{min} = 0,045$$

Armaduras mínimas y máximas

- **Cuantías:**

Cuantía
mecánica:
$$\omega = \frac{A_{s1} \cdot f_{yd}}{b \cdot d \cdot f_{cd}}$$

Cuantía
geométrica:
$$\rho_s = \frac{A_s}{A_c}$$

- **Límites inferiores:**

- Evitar la rotura frágil:
 - Cuantía mínima mecánica

$$\omega_{\min} = 0,045$$

- Evitar la fisuración por retracción y efectos térmicos:

- Cuantía mínima geométrica

EC2 establece $A_s \geq 0,0013 bd$ y además verificar ELS fisuración mediante apartado 7.3. Por lo tanto, para este curso, de forma simplificada tomaremos las cuantías mínimas de la EHE2008

(siguiente diapositive)

- **Límite superior:**

- Evitar la rotura poco dúctil y favorecer redistribución de esfuerzos:
 - Sección doblemente armada para asegurar $\xi \leq 0,45$.
- Evitar susceptibilidad al fuego y favorecer llenado:
 - Cuantía máxima geométrica

$$\rho_{s,\min} = 0,04$$

- **Cuantía geométrica mínima (EHE 42.3.5)**
 - (leer artículo en norma, pie de páginas, y comentarios)

Tabla 42.3.5

Cuantías geométricas mínimas, en tanto por 1.000, referidas a la sección total de hormigón ⁽⁶⁾

Tipo de elemento estructural		Tipo de acero	
		Aceros con $f_y = 400 \text{ N/mm}^2$	Aceros con $f_y = 500 \text{ N/mm}^2$
Pilares		4,0	4,0
Losas ⁽¹⁾		2,0	1,8
Forjados unidireccionales	Nervios ⁽²⁾	4,0	3,0
	Armadura de reparto perpendicular a los nervios ⁽³⁾	1,4	1,1
	Armadura de reparto paralela a los nervios ⁽³⁾	0,7	0,6
Vigas ⁽⁴⁾		3,3	2,8
Muros ⁽⁵⁾	Armadura horizontal	4,0	3,2
	Armadura vertical	1,2	0,9

⁽¹⁾ Cuantía mínima referida al espesor de la capa de compresión normigonada *in situ*.

⁽⁴⁾ Cuantía mínima correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opuesta una armadura mínima igual al 30% de la consignada.

⁽⁵⁾ La cuantía mínima vertical es la correspondiente a la cara de tracción. Se recomienda disponer en la cara opues-

Fisuración por efectos higrotérmicos



Recordar cuantías geométricas mínimas en muros

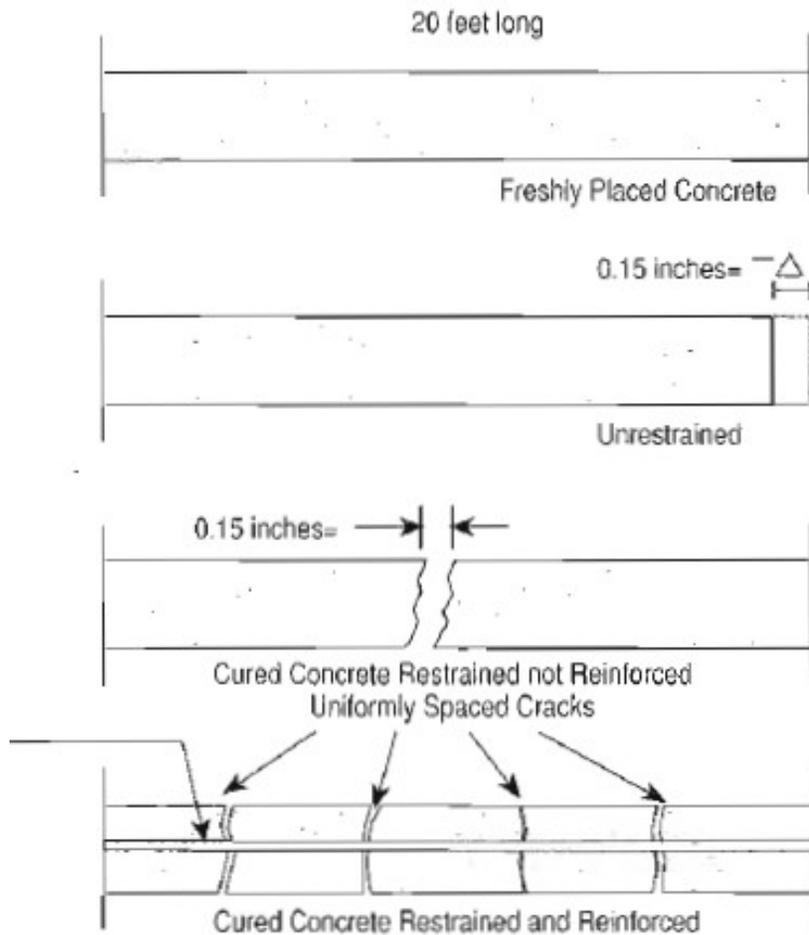
Armadura horizontal	4,0	3,2
Armadura vertical	1,2	0,9

Muchos efectos higrotérmicos pueden generar fisuras en estructuras de hormigón:

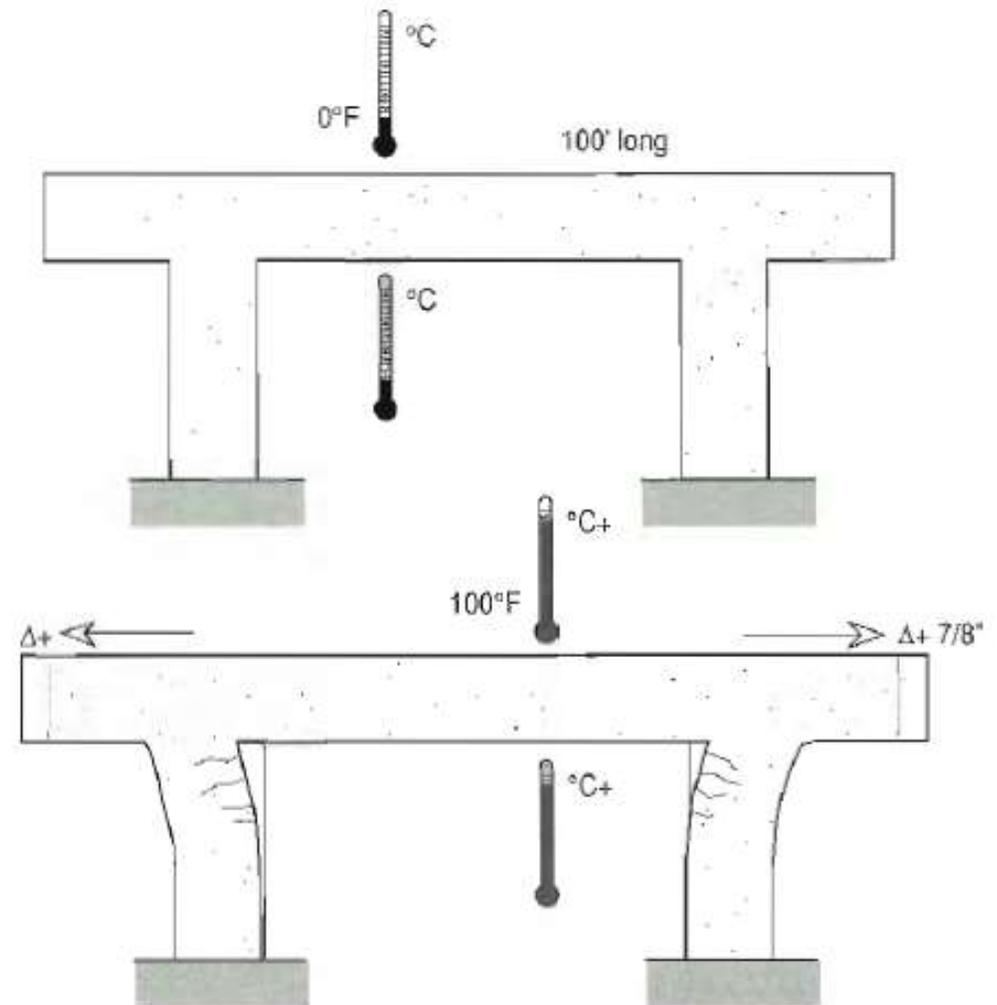
- Retracción por secado
- Retracción plástica
- Dilatación/contracción térmica,
- Otros...

Fisuración por efectos higrotérmicos

Ej. de retracción por secado



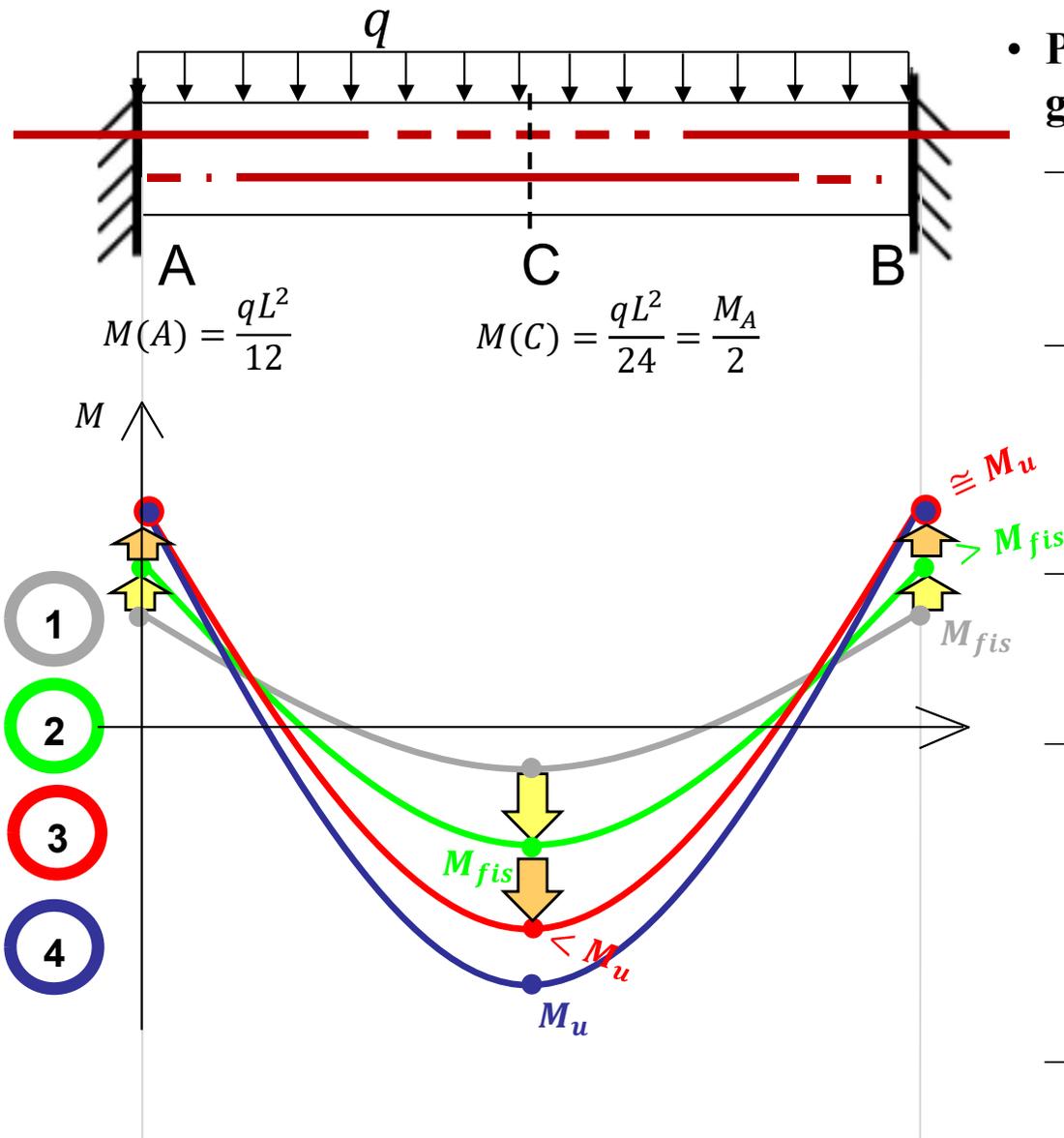
Ej. de dilatación térmica



Proceso de rotura en una viga

• Ejemplo: viga bi-empotrada

- Carga uniformemente distribuida q



• Elección de armadura

- Armamos la sección C con igual armadura que las secciones A y B. Elegimos $4\phi 16$ (8 cm^2).

• Para analizar la rotura hacemos crecer gradualmente la carga q de cero hasta la rotura.

- Primero todas las secciones se comportan de forma elástico-lineal, hasta que en A y B alcanzamos el momento de fisuración.
- Las secciones A y B fisuran, perdiendo rigidez, por lo que para nuevos incrementos de q , tomarán menores momentos que si no hubiera fisurado.
- Al aumentar q , ahora la sección C toma mayores momentos ya que no ha fisurado todavía, hasta que C fisura (análisis elástico lineal válido).
- Con nuevos incrementos de carga, el proceso se repite pero ahora A y B alcanzan la “rotura” antes que C. Si las secciones son dúctiles, éstas plastifican formando rótulas plásticas de giro limitado. Nuevos incrementos de q serán tomados casi exclusivamente por C hasta romper en $M(C)=M_u$.
- Esto es un análisis plástico de la viga.

- **Redistribución de esfuerzos:**

- Cuando en la sección más solicitada de una estructura hiperestática se produce plastificación de la armadura principal de flexión, la rigidez de la sección disminuye enormemente, convirtiéndose en una rótula plástica (zona cercana a Estado III).
- A partir de ese momento, la distribución de esfuerzos bajo un aumento de carga es totalmente distinta a la elásticamente predicha.
- Ocurre que la zona plastificada no absorbe más momento y lo “traspasa” a zonas contiguas menos solicitadas, hasta generar otras rótulas plásticas, y eventualmente el colapso (siempre que exista suficiente ductilidad: secciones que se deformen, o sea que giren, manteniendo el momento constante).
- Este análisis depende de la formación de rótulas plásticas (análisis de plasticidad) en donde se asume que dichas rótulas pueden girar de forma ilimitada. Pero esto no es así en hormigón, debido a su fragilidad. Por eso tomamos aproximaciones prácticas comprobadas experimentalmente.
- La aplicación de la redistribución de esfuerzos se realiza solamente para las verificaciones de ELU. La misma se realiza porque los resultados obtenidos son más parecidos a la realidad.

• EHE:

- Propone una redistribución máxima “r” en porcentaje del momento máximo a redistribuir (calculado mediante análisis elástico-lineal), en donde:

$$r = \max\left(56 - 125 \frac{x}{d}, 0\right)$$

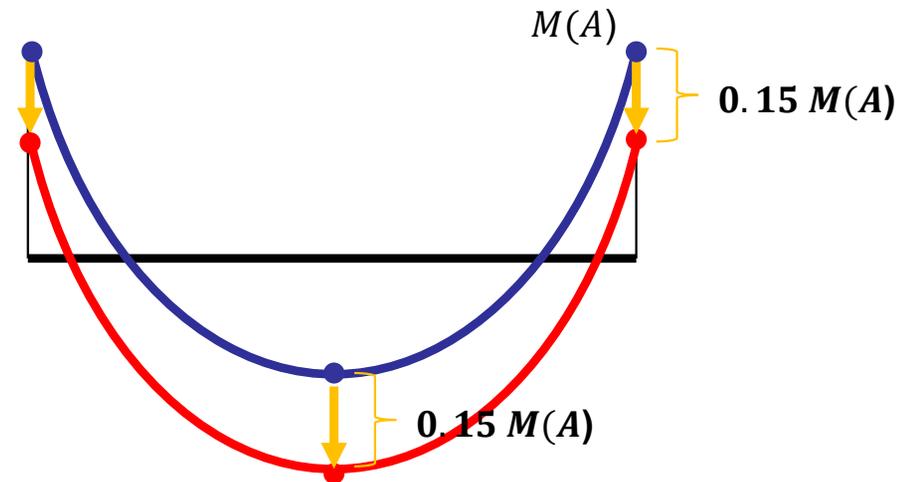
- Observar que cuando $x/d = 0,45$ o mayor, $r=0$, por lo que no se permite redistribución de momentos.

$r \geq 30\%$, acero de alta ductilidad
 $r \geq 20\%$, acero de ductilidad normal

• UNIT:

- Se admite una redistribución de momentos flectores negativos, de hasta un 15% del máximo momento flector negativo, siempre que x de la sección sometida al momento redistribuido, obtenida en el cálculo del ELU, sea inferior a $0,45d$.

• Cálculo:



• Comentarios:

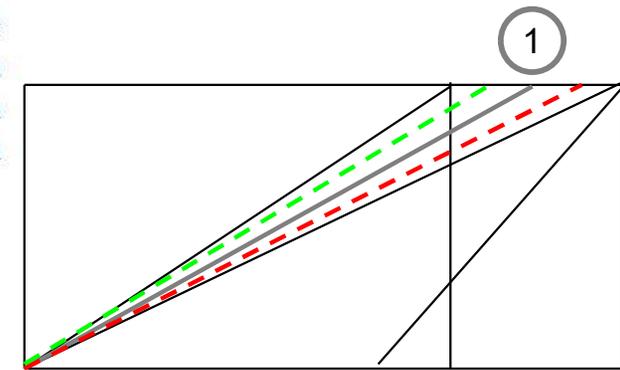
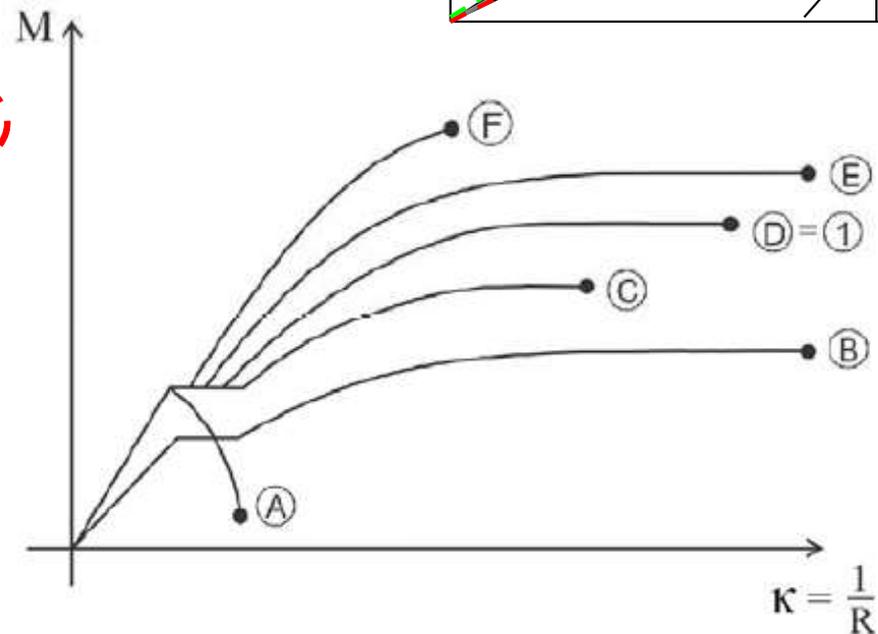
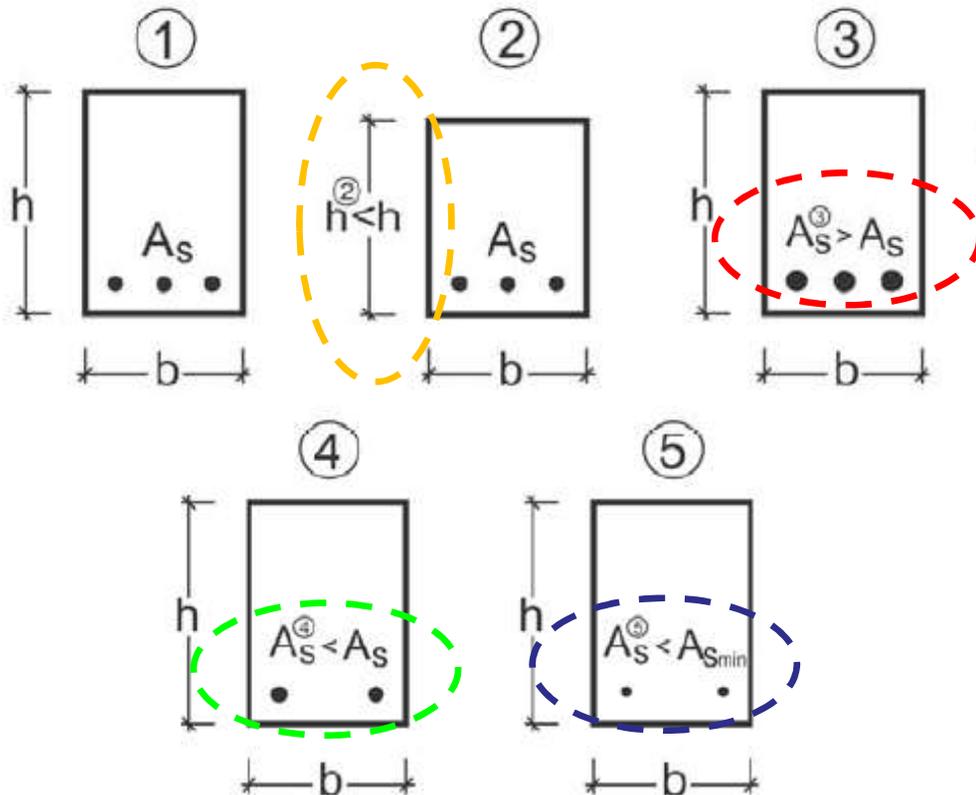
- **Redistribución \neq Decalaje**
- En H1 **no** se pedirá aplicar redistribución de esfuerzos para la resolución de ejercicios

Ejemplo de pregunta teórica:

- Trazar el diagrama Momento-Curvatura para el proceso de carga hasta rotura de una viga "bien diseñada", detallando los puntos característicos.
- Indicar el estado tensional de la sección para los distintos estados.
- ¿Cuál es el valor de la pendiente del diagrama en los tramos elástico-lineales?
- La *Figura 1* contiene 5 secciones de hormigón armado. Todas las secciones son de igual material (f_{ck} y f_{yk}), el mismo ancho, el mismo recubrimiento mecánico, y en todas ocurre que el ELU por solicitaciones normales se da en el 2º dominio de deformación. Las diferencias entre las secciones se muestran en la *Figura 1*. La *Figura 2* contiene 6 posibles curvas de comportamiento de Momento-Curvatura, en donde se indica la curva que corresponde a la sección 1 (curva D). Se pide conectar cada una de las restantes secciones (2, 3, 4 y 5) con una de las curvas (A, B, C, D, E o F). Observar que una de las curvas no se corresponde con ninguna sección. Justificar brevemente (en una oración) la respuesta.

Solución:

- Diapositiva 5
- Diapositiva 6
- Diapositiva 5



Ejemplo de ejercicio:

1^{er} Semestre 2025 Agustin Spalvier Curso: Hormigón Estructural 1

19



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

-
- Hormigón armado:

<https://www.youtube.com/watch?v=cZINeaDjisY>

- Viga sobre-armada:

https://www.youtube.com/watch?v=3xw9_33uNJA

Fin



Recursos didácticos y formato

- **Se valorará que se utilicen recursos didácticos.**
- **En particular, intentar realizar una exposición interactiva.**
- **Para plantear una pregunta a la clase:**
 - Recuadro con fondo verde

¿Pregunta?

- **Para resaltar algo que se considere importante:**
 - utilizar un recuadro con fondo salmón.

IMPORTANTE

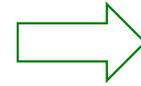
- **Aspectos complementarios a resaltar:**
 - Recuadro simple

Recuadro

- **Normalmente, muchas de las variables de diseño de elementos de H.A. quedan determinados en las etapas iniciales de proyecto:**
 - Geometrías (h , b) y resistencias de materiales (f_{yk} , f_{yd}) se definen con el esquema estructural. Altura útil (d) y recubrimientos (d') se definen al considerar las “acciones químicas”.
- **Dimensionado:**
 - Por lo general, en el dimensionado, conocemos las solicitaciones actuantes (M_d , N_d) y determinamos el armado de la sección (A_{s1} , A_{s2}) para que resista esas acciones, y la posición de la línea neutra (x) correspondiente (y con ella, las deformaciones últimas).
- **Comprobación:**
 - En las comprobaciones, conocemos completamente la sección (A_{s1} , A_{s2}), y comprobamos que es capaz de soportar las solicitaciones actuantes $(M_u, N_u) \geq (M_d, N_d)$.
 - Es el caso, por ejemplo, cuando en una estructura existente se cambian las condiciones de uso.
- **Problema indeterminado**
 - Tenemos, generalmente, 5 incógnitas (x , A_{s1} , A_{s2} , M_d , N_d), y 2 ecuaciones de equilibrio (ΣM , ΣF), por lo que tendremos que realizar algunas consideraciones adicionales para poder dimensionar las secciones.

Cuantía mínima mecánica en flexión

$$M_u \geq M_{fis} \begin{cases} M_u = A_s f_{yd} z \text{ (ELU)} \\ M_{fis} = W_1 f_{ct,m,fl} \text{ (estado I)} \end{cases}$$



$$A_{s,min} f_{yd} z \geq W_1 f_{ct,m,fl}$$

– Para **secciones rectangulares**, se utiliza una fórmula basada en algunas simplificaciones:

- Brazo de par estimado (“números gordos”): $z \approx 0,9.d$ $z \approx 0,8.h$

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$$

$$f_{ct,m,fl} = f_{ctm} \cong 0,1 f_{ck} = 0,1 \times 1,5 f_{cd} = 0,15 f_{cd}$$

$$W_1: \sigma = M \frac{h/2}{I_b} = \frac{M}{\frac{bh^2}{6}} \Rightarrow W_1 = \frac{bh^2}{6}$$

$$A_s f_{yd} z \geq W_1 f_{ct,m,fl} \Leftrightarrow$$

$$A_s f_{yd} 0,8h \geq \frac{bh^2}{6} 0,15 f_{cd} \Leftrightarrow$$

$$z \cong 0,8 h$$

$$\frac{A_s f_{yd}}{bh f_{cd}} \geq \frac{0,15}{6 \times 0,8} = 0,0406 \Leftrightarrow \omega_{min,(h)} \geq 0,04$$

$$\omega_{(h)} h = \omega_{(d)} d \Rightarrow \omega_{min,(d)} = \frac{h}{d} \omega_{min,(h)} = \frac{0,9}{0,8} 0,04 = \mathbf{0,045}$$

Para sección rectangular: $\omega_{min,(h)} = 0,04$

Cuantía mínima mecánica en flexión

- Cálculo “exacto” para una sección rectangular siguiendo las definiciones de las características del hormigón establecidas en el Anexo Español del EuroCódigo.

$$f_{ct,m} = 0,30 f_{ck}^{2/3} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ct,m} = 0,58 f_{ck}^{1/2} \quad \text{para } f_{ck} > 50 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{ct,k} = 0,70 f_{ct,m}$$

$$f_{ct,m,fl} = \max \{ (1,6 - h/1.000) f_{ct,m}; f_{ct,m} \}$$

$$\omega(h),min = \frac{1,5 \times f_{ct,m,fl} / f_{ck}}{6 \times 0,8}$$

(ver código para generar imagen al final de la presentación) →

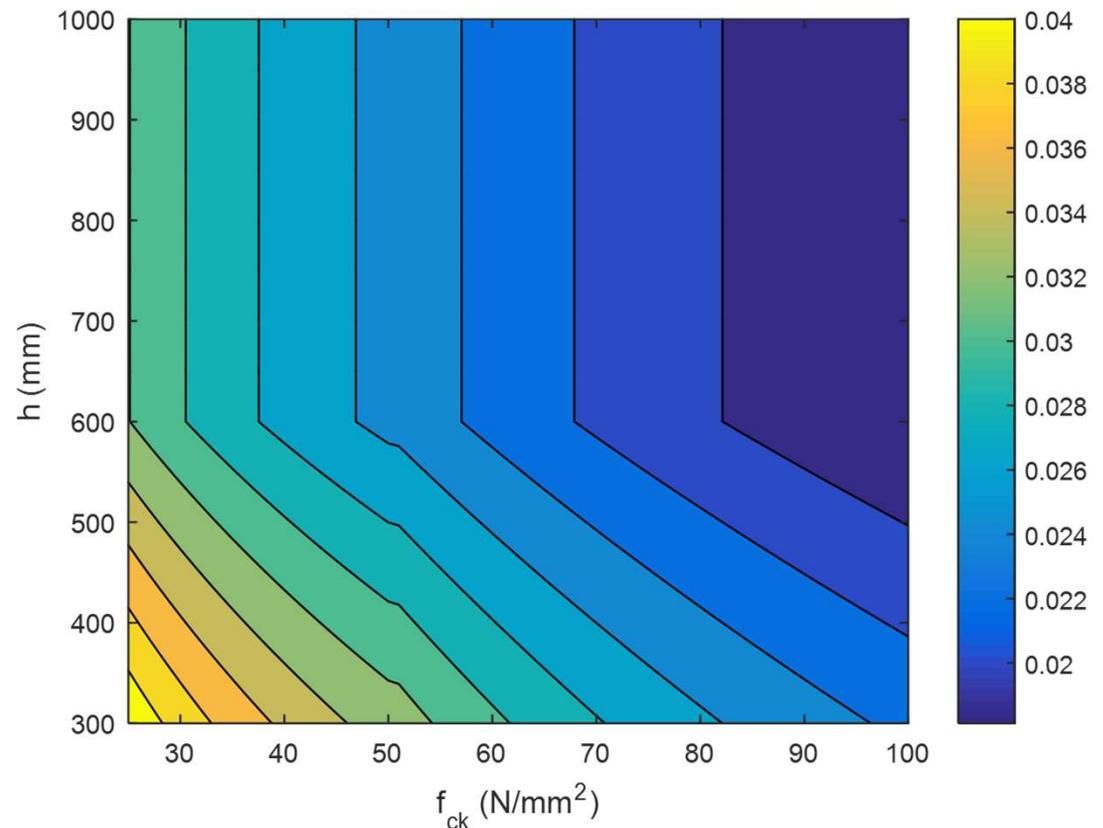


Figura: ω_{min} según Anexo Español

Código de figura “ ω_{min} según Anexo Español”

1^{er} Semestre 2025 Agustin Spalvier Curso: Hormigón Estructural 1

25



```
clear all; clc; close all
h_vec = [300:50:1000]';
fck_vec = [25:100]';

for i = 1:length(h_vec); % altura de viga en mm
    h = h_vec(i);

    % Resistencia característica a compresión:
    for j = 1:length(fck_vec); % N/mm2
        fck = fck_vec(j);

        % Resistencia media a tracción directa:
        if fck <= 50
            fctm = 0.3*fck^(2/3);
        else
            fctm = 0.58*fck^(1/2);
        end
    end
end
```

```
% Resistencia característica a tracción directa:
fctk = 0.7*fctm;

% Resistencia media a flexotracción:
fctmfl = max((1.6-h/1000)*fctm,fctm);

% Cuantía:
w = fctmfl/fck*1.5/6/0.8;

% Resultados
Mat(i,j) = w;
end
end

contourf(fck_vec,h_vec,Mat)
xlabel('f_{ck} (N/mm^2)')
ylabel('h (mm)')
colorbar
```