

# Curso: HORMIGÓN ESTRUCTURAL 1

## MÓDULO 4: CORTANTE

Agustin Spalvier (aspalvier@fing.edu.uy)

1<sup>er</sup> Semestre - 2025

Universidad de la República - Uruguay



## • Introducción

- Formas de rotura / Condiciones de diseño / Ejemplos / Mecanismos resistentes
- Disposición de las armaduras transversales

## • Reticulado de Ritter-Mörsch

- Cortante resistido por las armaduras / Compresión en el hormigón del alma

## • Procedimiento de comprobación EC (piezas CON armadura de corte)

- Planteo General
  - Agotamiento por compresión oblicua del alma:  $V_{Rd,max}$
  - Agotamiento por tracción de piezas sin armadura a cortante:  $V_{Rd,c}$
  - Agotamiento por tracción de piezas con armadura a cortante:  $V_{Rd,s}$
- Disposiciones, cuantías y separaciones de estribos.

## • Tracción adicional debido al cortante

- Decalaje de la ley de momentos

**ACLARACIÓN:** Estas transparencias se preparan únicamente como una guía para las clases, las cuales cumplen la función de ser una presentación de los temas que el estudiante debe aprender para aprobar el curso, indicados en la bibliografía.

**Bibliografía:** Jiménez Montoya – 15<sup>a</sup> Ed. – Cap. 21.1; 21.3; 21.5; 21.6; 21.8; 21.9  
EC2 – Capítulo 6.2

- **Mecanismos resistentes:**

[https://www.youtube.com/watch?v=Pt1\\_SkKCz5M&t=10s](https://www.youtube.com/watch?v=Pt1_SkKCz5M&t=10s)

- **Elementos sin armadura de corte:**

<https://www.youtube.com/watch?v=bumcqW3H7hc>

- **Elementos con armadura de corte:**

<https://www.youtube.com/watch?v=tyw1GINA9w0>

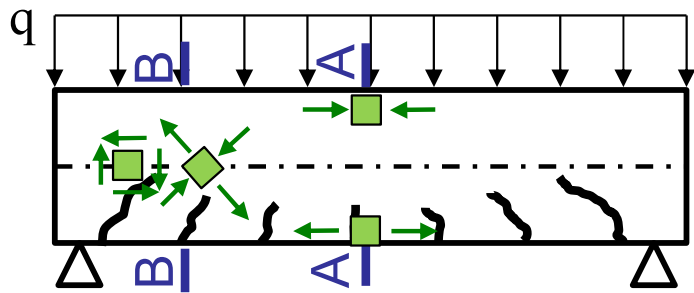
- **Disposición de armaduras:** <https://www.youtube.com/watch?v=fySZk-LG7uw>

## • Comportamiento complejo cuando se consideran esfuerzos transversales

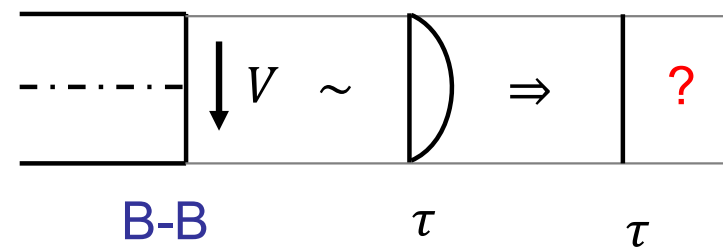
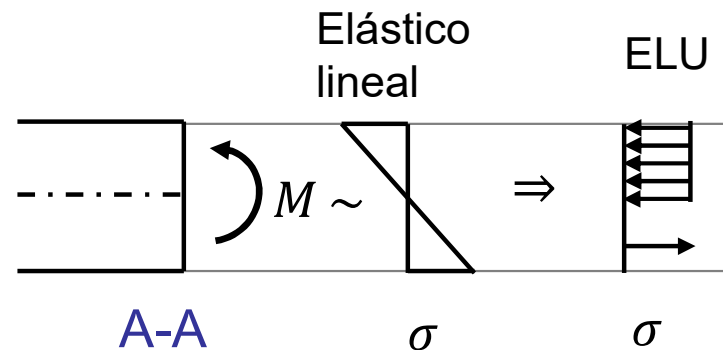
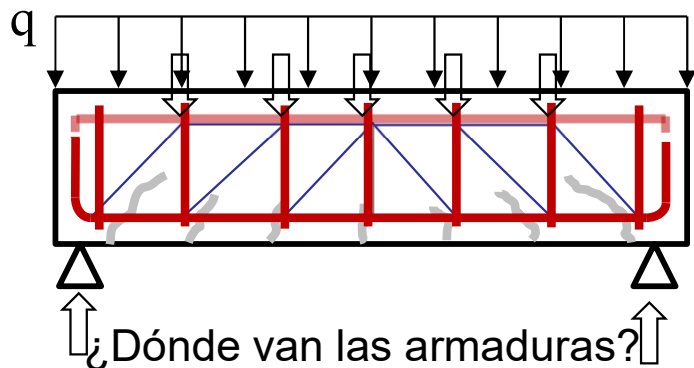
- Para cargas pequeñas, hasta que el hormigón fisura, el comportamiento se puede asumir elástico-lineal. Pero luego de que fisura, se produce un complejo reajuste de tensiones, que se puede desarrollar de diversas maneras hasta conducir a la rotura.
- No es posible un estudio sección a sección, es necesario un estudio a nivel del elemento, puesto que los mecanismos resistentes son espaciales (no planos).

*El efecto de las tensiones tangenciales creadas por el cortante es inclinar las tensiones principales de tracción (y/o compresión) con respecto a la directriz de la pieza. Al aumentar las cargas, luego de fisurar, el complejo reajuste de tensiones lleva a la rotura.*

LEER  
SECCIÓN  
21.1 DEL  
J-M



Reticulado de Ritter-Morsch:



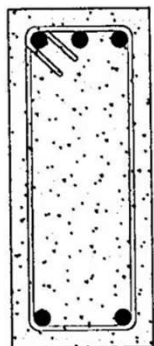
*En ELU de córtate, el objetivo es verificar que las bielas de compresión resistan y verificar que los tirantes resistan (diseñar los estribos) con una seguridad razonable.*



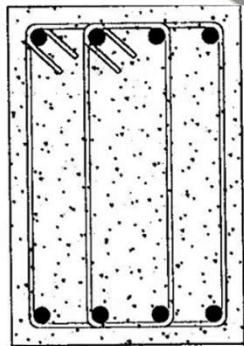
# Ejemplos – Armado básico

1<sup>er</sup> Semestre 2025 Agustin Spalvier Curso: Hormigón Estructural 1

5



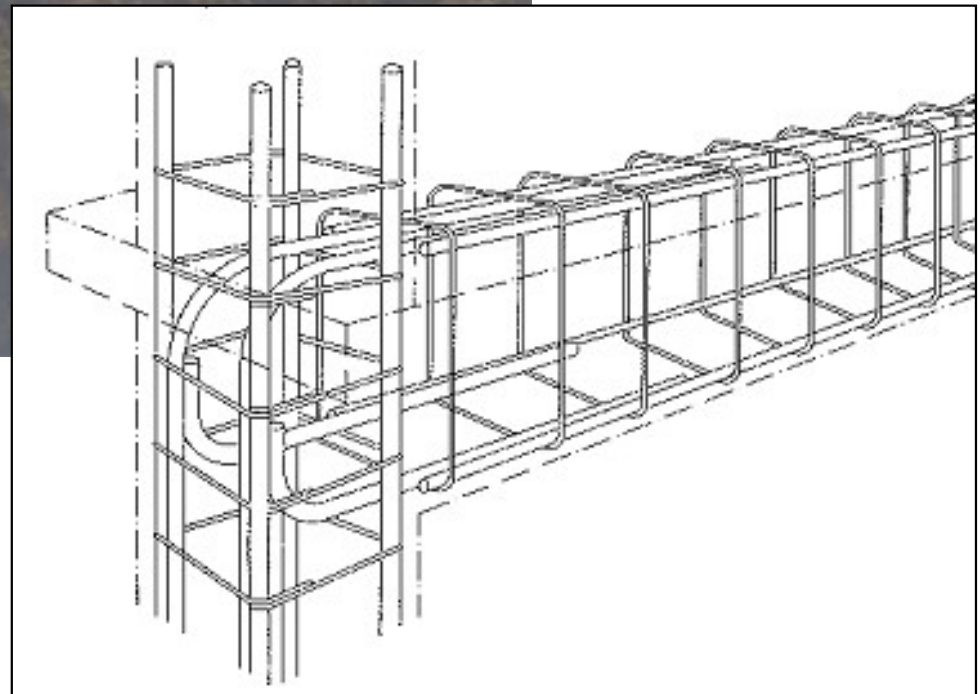
2 ramas



4 ramas



# Ejemplos

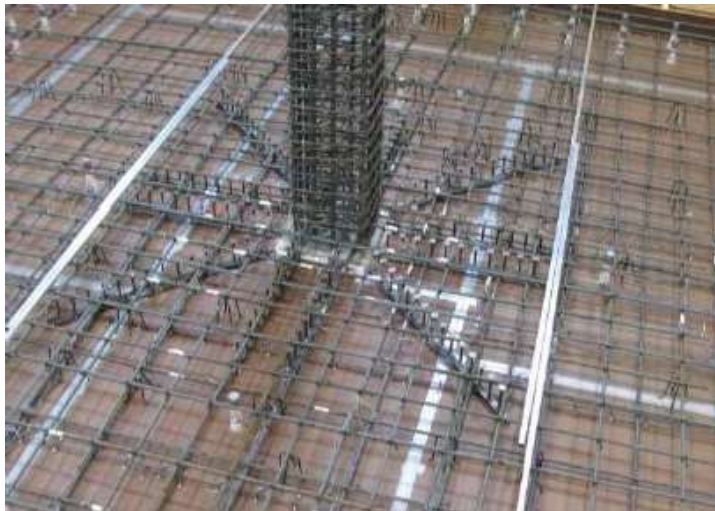




# Ejemplos - losas

1<sup>er</sup> Semestre 2025 Agustin Spalvier Curso: Hormigón Estructural 1

7



# Ejemplos – tipos de falla

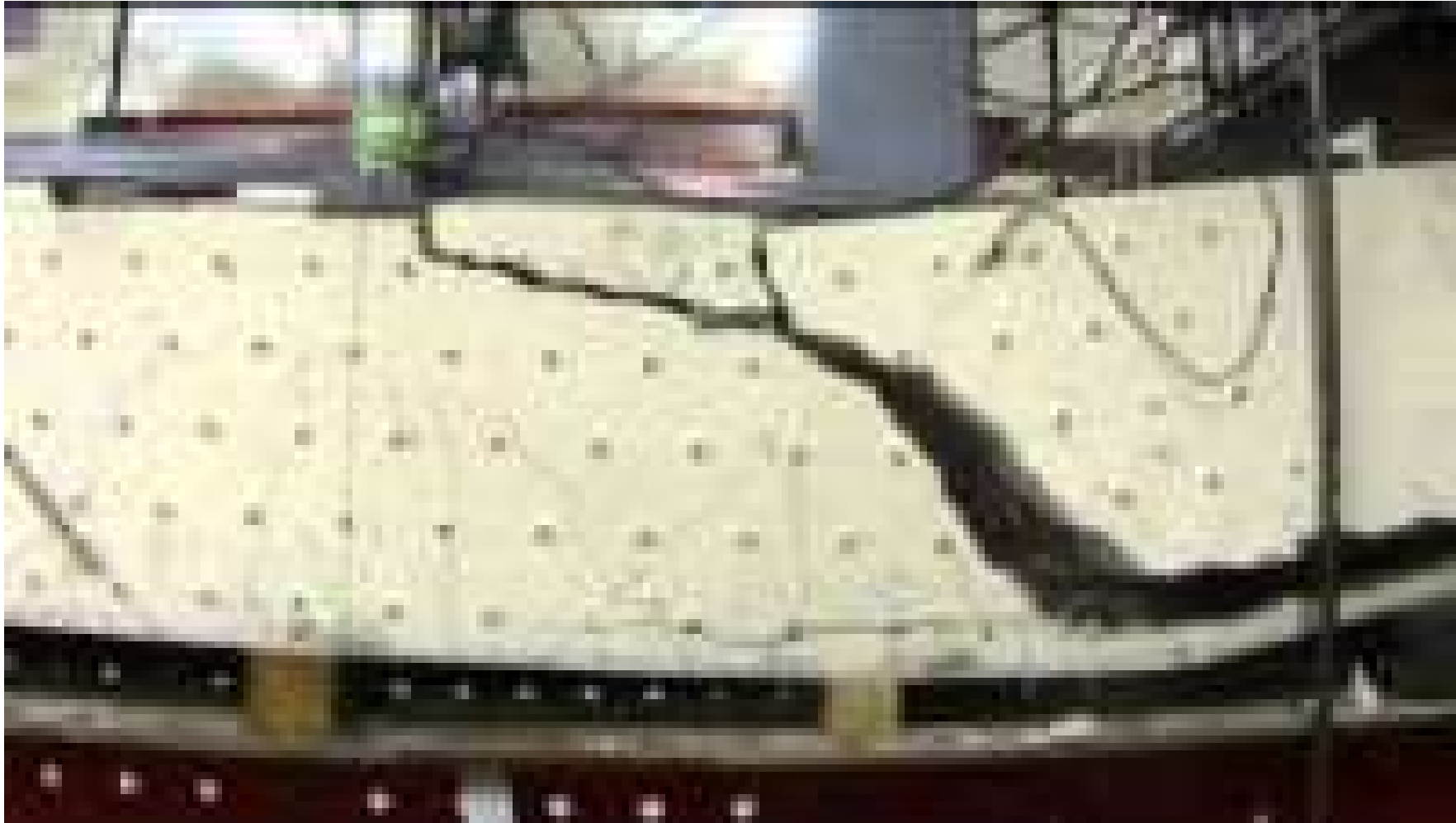
- **Ejemplo 1** (sin armadura de cortante, falla frágil por cortante)
- <https://youtu.be/GHMCG4fUUpM>





# Ejemplos – tipos de falla

- **Ejemplo 2** (sin armadura de cortante, falla frágil por cortante)
- <https://youtu.be/bymlX2fkCOw>



# Ejemplos – tipos de falla

- **Ejemplo 3** (con armadura de cortante, falla dúctil por cortante)
- <https://youtu.be/zn3-VM9Eurw>



# Ejemplos – tipos de falla

- **Ejemplo 4** (con armadura de cortante, falla frágil por compresión del alma)
- <https://youtu.be/etTum442-wI>





## 1. Por flexión pura (no es cortante)

- Visto en los módulos anteriores

## 2. Por cortante.

- Con armadura transversal insuficiente para cubrir las tensiones principales de tracción. La fisura puede atravesar la cabeza de compresión.

## 3. Por flexión y cortante.

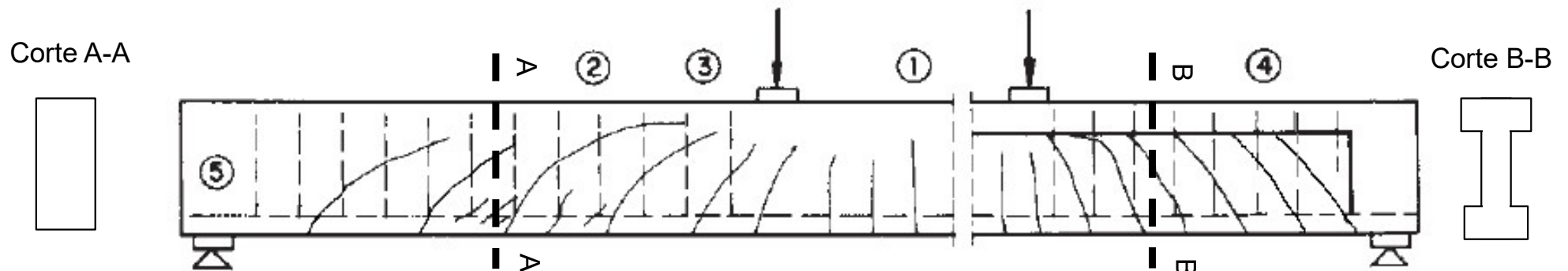
- Con armadura transversal ligeramente insuficiente. Las compresiones se concentran en la zona de compresión, pudiendo alcanzar el aplastamiento.

## 4. Compresión del alma.

- Si las tensiones de compresión superan la resistencia del hormigón. Raro en vigas rectangulares. Puede producirse en vigas T, donde la sección del alma es menor.

## 5. Deslizamiento de las armaduras.

- El aumento de las tensiones en la armadura se producen gracias a la adherencia hormigón-acero. La viga puede fallar si las barras no soportan este aumento, que es proporcional al cortante.

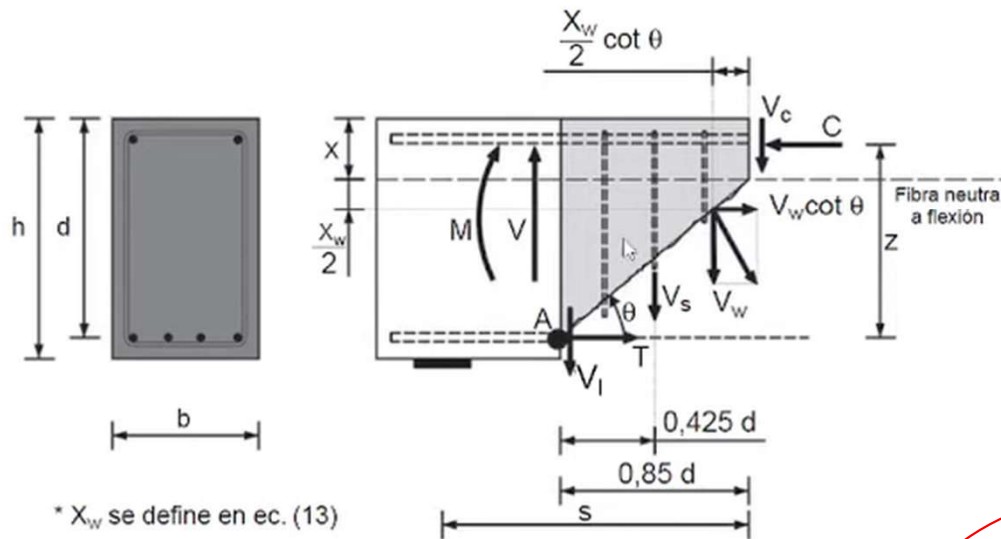
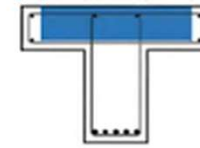


# Mecanismos resistentes

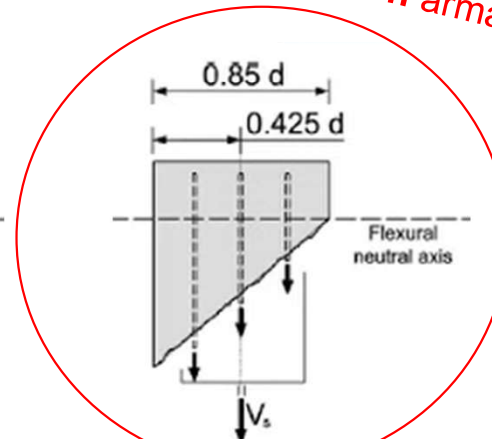
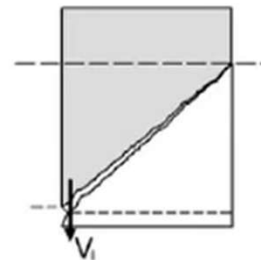
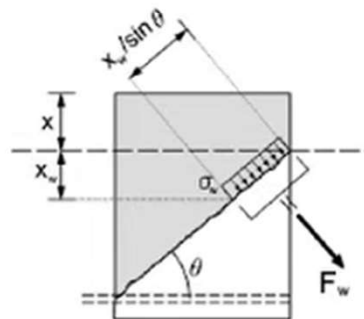
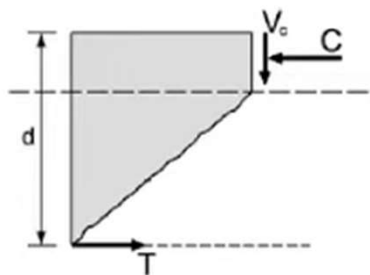


## Contribuciones a la resistencia a cortante:

- Tensiones tangenciales en la cabeza comprimida,  $V_c$
- Cortante transferido en la superficie de la fisura,  $V_w$  (tensiones residuales de tracción transmitidas en la zona más cerrada de la fisura o engranaje de áridos)
- Efecto dovela o pasador,  $V_l$  (resistencia a la cizalladura de la armadura longitudinal)
- Contribución de la armadura a cortante,  $V_s$ .



Este es el único mecanismo resistente que la CE2021 considera para elementos **con** armadura de corte

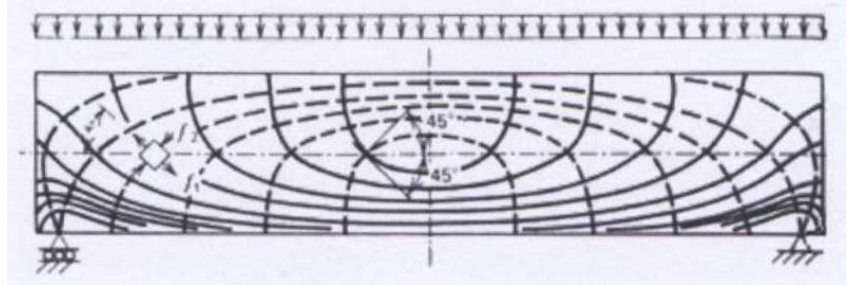


- **En el cálculo a cortante, se deben tener en cuenta los distintos tipos de rotura vistos, y proporcionar una seguridad suficiente para evitar su aparición.**
- **Diseño según la normativa:**
  - Las distintas normas admiten que la **contribución de las armaduras transversales** se puede determinar a través de la **analogía del reticulado de Ritter-Mörsch**.
  - Sin embargo, no hay acuerdo pleno de cuál es la contribución del hormigón a las tensiones de tracción.
    - Como en todo el curso, a nivel práctico nos basaremos en lo estipulado en el Eurocódigo
    - Esta norma admite, después de la fisuración, la contribución de un término debido a las armaduras transversales, y otro debido a diversos fenómenos desarrollados en el hormigón.
  - Además, el diseño de secciones ante esfuerzos de corte y flexión se realiza de forma “casi” independiente. Se toma en cuenta el cortante en el diseño a flexión, y viceversa.
    - La armadura de flexión influye en la resistencia a cortante (solo cuando no se coloca armadura de cortante).
    - El cortante modifica las solicitaciones de flexión (*decalaje*)



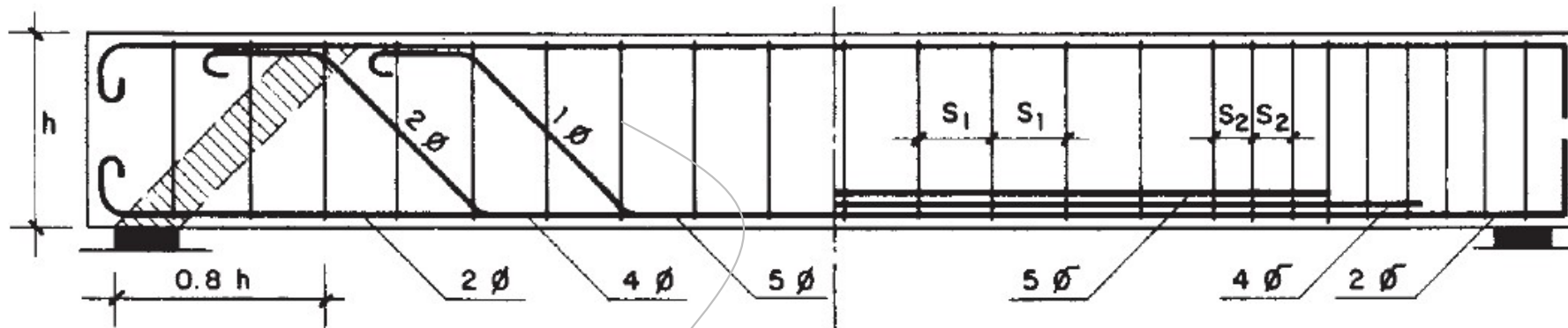
# Disposición de las armaduras transversales

- La disposición de las armaduras transversales condiciona la forma en que la pieza resiste.
- Disponer las armaduras según las tensiones principales podría ser estructuralmente más eficiente, pero es constructivamente inviable.
- Disposición habitual:
  - Armaduras transversales (estribos):
    - *Perpendiculares al eje, rodeando las armaduras longitudinales, normalmente de menor diámetro.*
  - Excepcionalmente: barras levantadas en ángulo (Hoy en día en desuso).
    - *Son las barras de tracción que, cuando dejan de ser necesarias, se levantan a  $45^\circ$  y se anclan, o se prolongan para formar la armadura de compresión.*
  - Ejemplo:

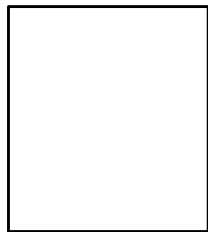


Barras levantadas

Estribos



Siempre estribado mínimo



# Reticulado de Ritter-Mörsch

- **El elemento se puede modelar como un reticulado virtual:**

- Caso de modelo de “bielas y tirantes”:

- Se llaman “bielas” a las barras en compresión (materializadas por el hormigón)
- “Tirantes”, a las barras en tracción (materializadas por la armadura).

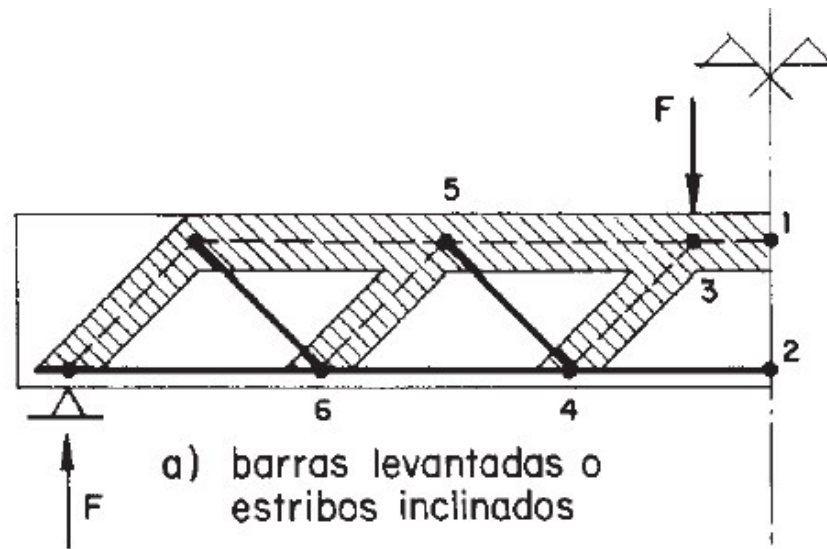
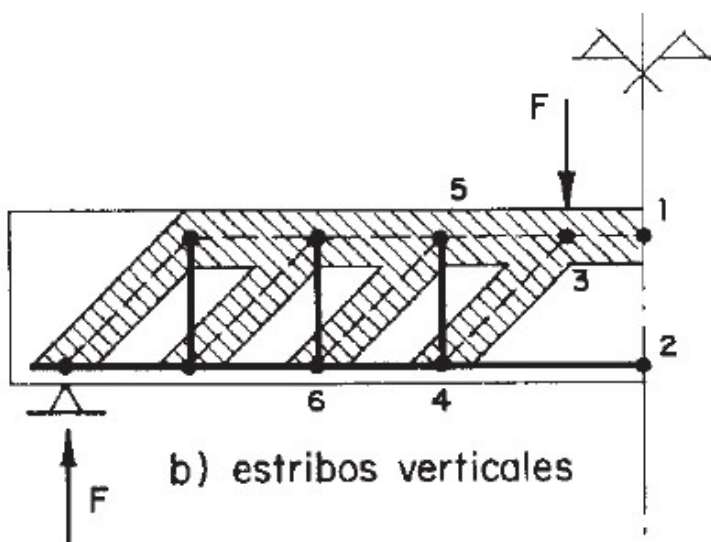
- Para llevar el cortante, serán necesarios **tirantes**, formados por los estribos y la armadura longitudinal, y **bielas**, formadas por el hormigón que los vincula.

- Normalmente, los estribos se colocan a distancias más cortas que  $d$ .

- » El mecanismo real, es más próximo a la superposición de varios reticulados como los mostrados.

- Para estudiar el cortante:

- Tradicionalmente bielas inclinadas  $45^\circ$ . Se pueden variar entre  $26^\circ$  y  $68^\circ$  según Anexo Español del EC (el EC en sí recomienda entre  $45^\circ$  y  $60^\circ$ ).
- Tirantes a  $90^\circ$  (en algunos casos pueden ir a  $45^\circ$  o  $60^\circ$ )



EHE-08:

$$0.5 \leq \cot\theta \leq 2$$

EC-2:

$$1 \leq \cot\theta \leq 2.5$$

CodE-21:

$$0.5 \leq \cot\theta \leq 2$$

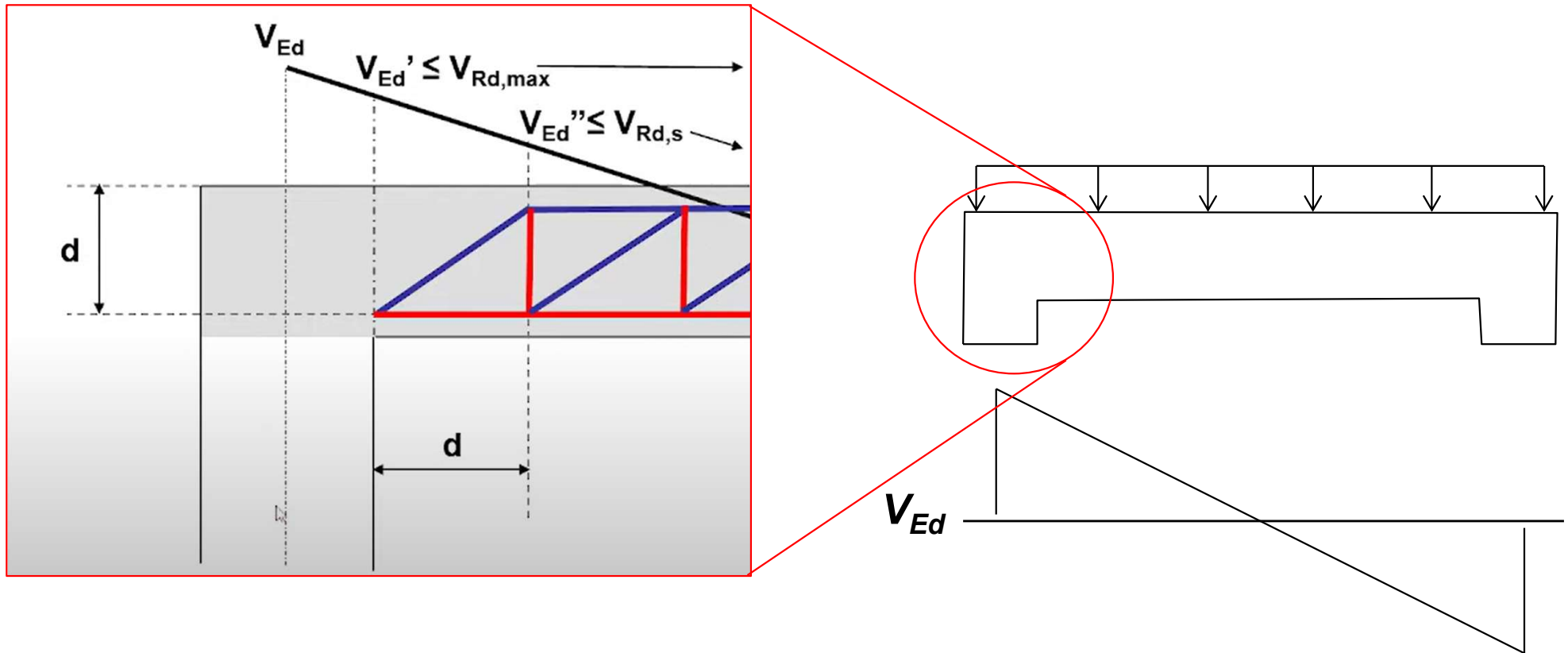
# Procedimiento de comprobación

## • Elementos con armadura de cortante (EC Cap. 6.2.3)

Debemos realizar dos comprobaciones: Solicitación  $\leq$  Resistencia

(1) Verificar biela comprimida:  $V'_{Ed} \leq V_{Rd,max}$

(2) Verificar el tirante traccionado:  $V''_{Ed} \leq V_{Rd,s}$





# Procedimiento de comprobación

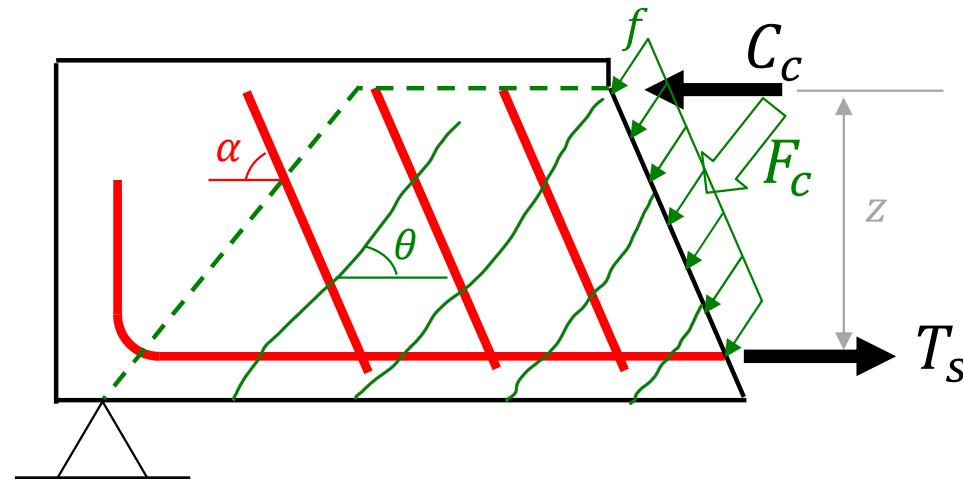
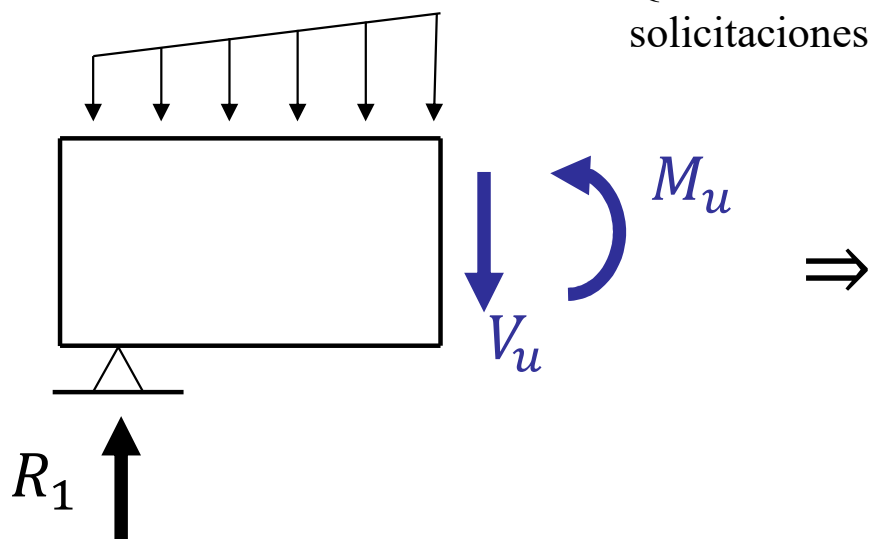
- **Obtención de  $V_{Rd,max}$**  (le llamo " $V_u$ " en los diagramas)

La máxima tensión  $\sigma_c$  que soporta la biela comprimida es  $v_1 f_{cd} \Rightarrow \sigma_c \leq v_1 f_{cd}$

Para encontrar el valor de  $\sigma_c$  debido al cortante  $V_u$ , primero obtenemos la relación entre  $V_u$  y la fuerza en la biela comprimida  $F_c$ :

Quiero saber qué tensiones aparecen en la biela comprimida debido a las sollicitaciones V y M, entonces realizo un corte favorable para ello:

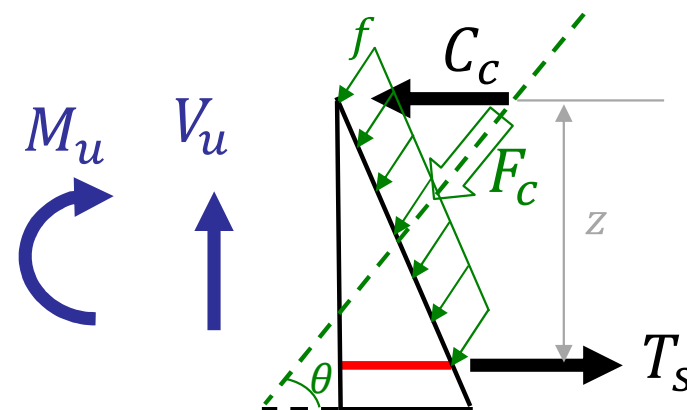
es un coeficiente de reducción de la resistencia del hormigón



Aparecen las tensiones  $f$  sobre la cara cortada, cuya resultante es la fuerza  $F_c$  y actúa sobre el centro de gravedad de dicha cara.

Para que exista equilibrio entre las tensiones internas  $C_c$ ,  $T_s$  y  $F_c$  con las sollicitaciones  $V_u$  y  $M_u$ , debe ocurrir que:

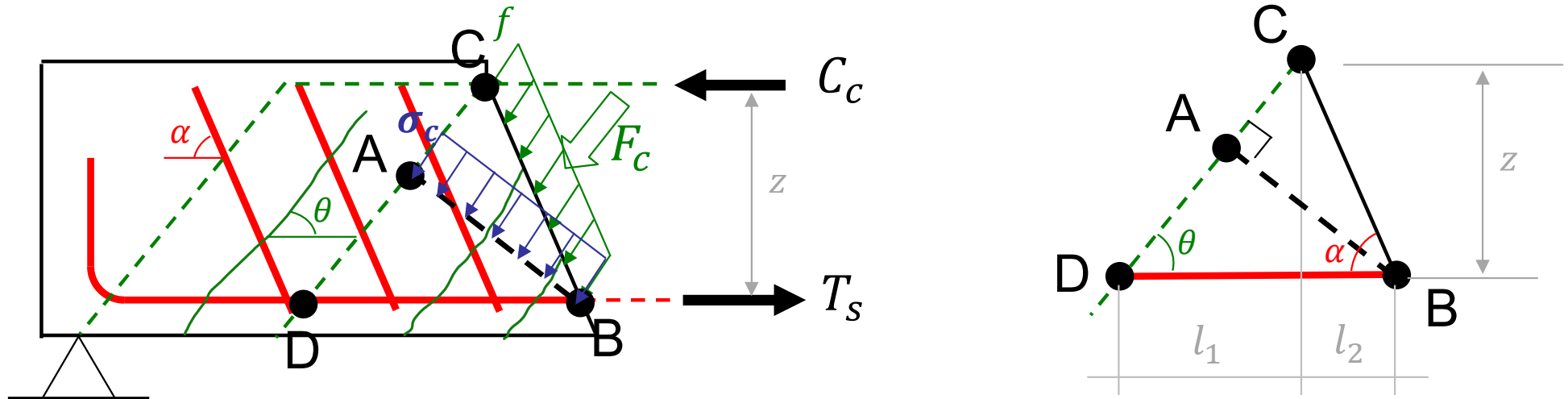
$$V_u = F_c \sin \theta$$



# Procedimiento de comprobación

## • Obtención de $V_{Rd,max}$ (le llamo " $V_u$ " en los diagramas)

Sabemos que las bielas comprimidas llevan una fuerza  $F_c = V_u / \sin \theta$ , por lo tanto, la tensión normal en las bielas vale  $\sigma_c = F_c / (b_w AB)$ , con  $b_w$  el ancho de la biela.



Quiero hallar AB en función de variables conocidas:

$$\tan \theta = \frac{z}{l_1} \Rightarrow l_1 = z \cot \theta$$

$$\tan \alpha = \frac{l_2}{z} \Rightarrow l_2 = z \cot \alpha$$

$$l = l_1 + l_2 \Rightarrow \sin \theta = \frac{AB}{l} \Rightarrow$$

$$AB = \sin \theta (\cot \theta + \cot \alpha) z$$

$$\sin \theta F_c = V_u \Rightarrow V_u = \sin \theta \sigma_c (b_w AB) \Rightarrow$$

$$V_u = \sigma_c b_w z (\sin \theta)^2 (\cot \theta + \cot \alpha) = \frac{1}{1 + \cot^2 \theta} (\cot \theta + \cot \alpha)$$

$$V_u = V_{Rd,max} = v_1 f_{cd} b_w z \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

# Procedimiento de comprobación

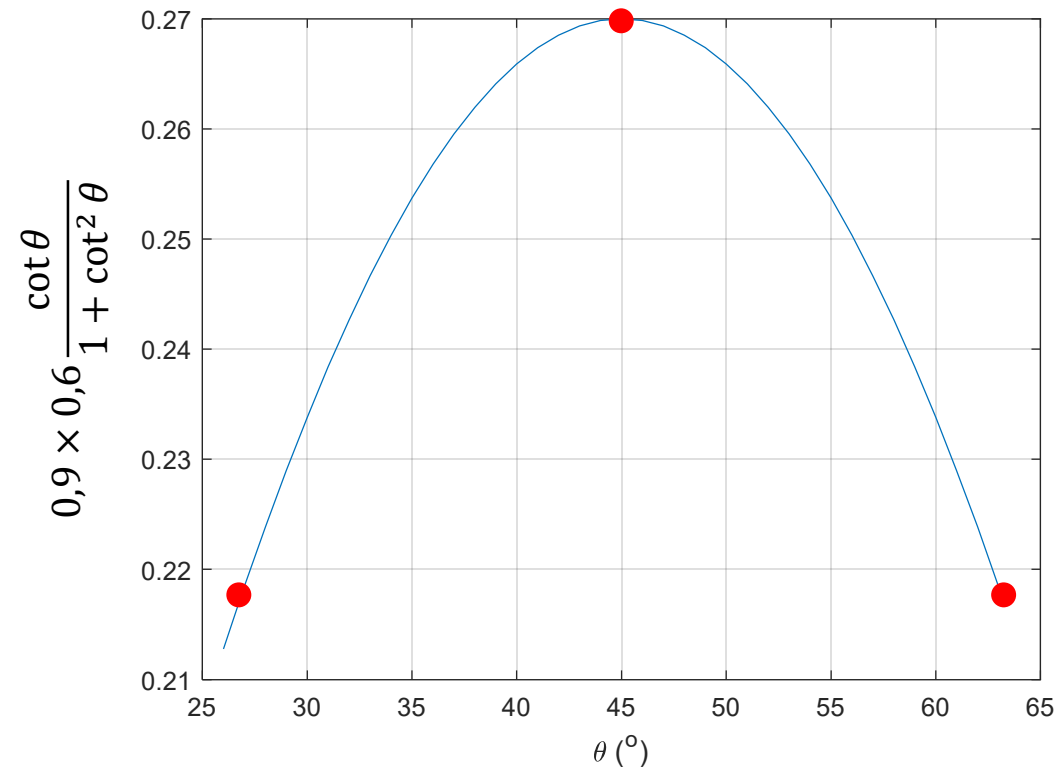
$$V_u = V_{Rd,max} = v_1 f_{cd} b_w z \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta}$$

Caso típico: Sección rectangular  $b \times h$   
estribos verticales ( $\cot \alpha = 0$ )  
 $v_1 = 0,6$  y  $z = 0,9d$

$$V_{Rd,max} = 0,6 \times 0,9d \frac{\cot \theta}{1 + \cot^2 \theta} f_{cd} b_w$$

$\cot \theta = 2$  ( $\theta \cong 26^\circ$ ):  $V_{Rd,max} = 0,22 f_{cd} b d$   
 $\cot \theta = 1$  ( $\theta = 45^\circ$ ):  $V_{Rd,max} = 0,27 f_{cd} b d$   
 $\cot \theta = 0,5$  ( $\theta \cong 63^\circ$ ):  $V_{Rd,max} = 0,22 f_{cd} b d$

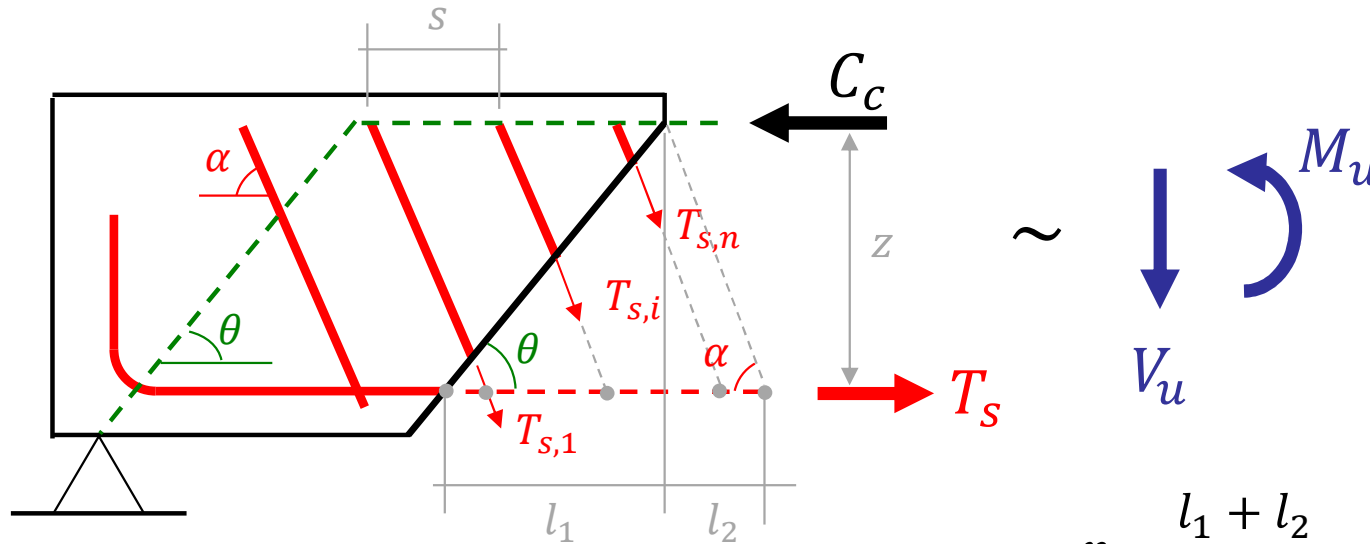
Grandes variaciones de  $\theta$  producen  
pequeños cambios en la resistencia  
de la biela comprimida



# Procedimiento de comprobación

## • Obtención de $V_{Rd,s}$ (le llamo " $V_u$ " en los diagramas)

Corto de forma paralela a una biela comprimida para que solo aparezcan fuerzas en tirantes:



$$n = \frac{l_1 + l_2}{s} = \frac{z(\cot \theta + \cot \alpha)}{s} \Rightarrow$$

$$V_u = V_{Rd,s} = \frac{A_{s,i}}{s} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

Hay  $n$  estribos cortados,  
cada uno:  $T_{s,i} = \sigma_{s,i} A_{s,i} \Rightarrow$

$$V_u = n T_{s,i} \sin \alpha = n \sigma_{s,i} A_{s,i} \sin \alpha$$

El ELU se da cuando  $\sigma_{s,i} = f_{yd} \leq 0,8 f_{yk}$   
(limite al 80% de  $f_{yk}$  por control indirecto de fisuración del hormigón y evitar modo 3 de rotura)

$$V_u = n f_{yd} A_{s,i} \sin \alpha \Rightarrow (\text{y } \zeta n?)$$

con  $f_{yd} \leq 0,8 f_{yk}$



# Procedimiento de comprobación

$$V_u = V_{Rd,s} = \frac{A_{s,i}}{s} z f_{yd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

Caso típico: Sección rectangular  $b \times h$   
estribos verticales ( $\cot \alpha = 0$ )  
 $z = 0,9d$

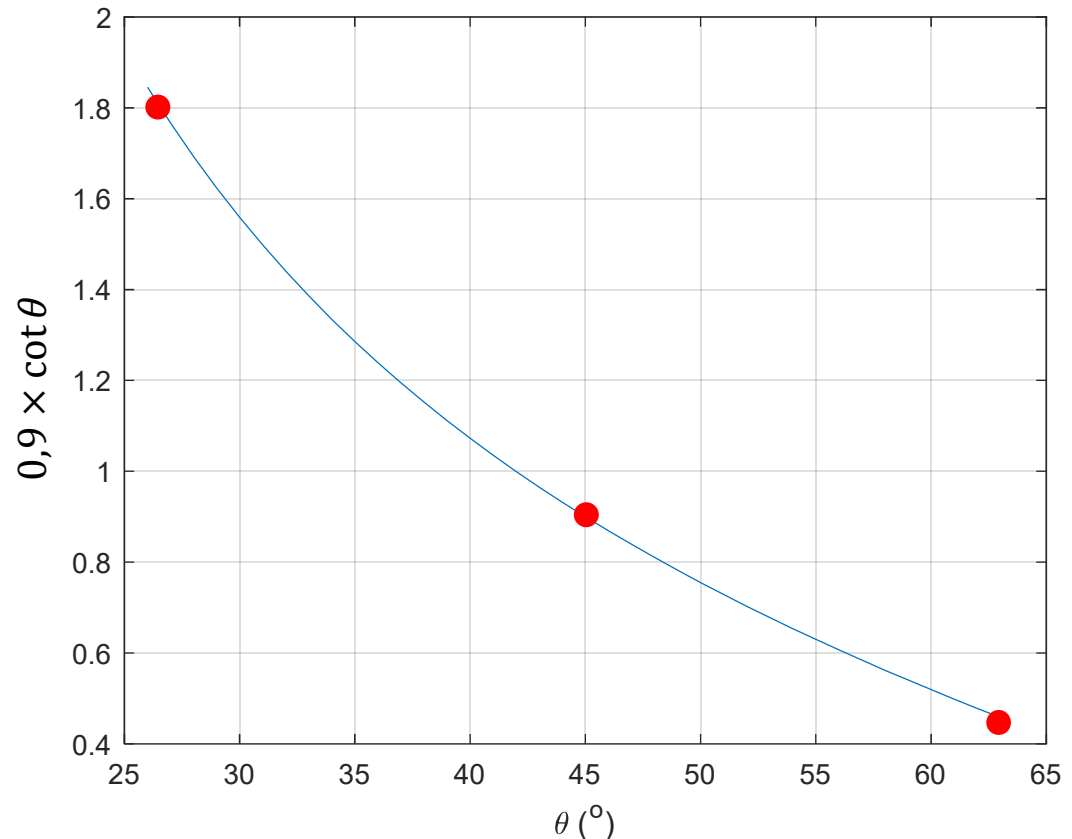
$$\Rightarrow V_{Rd,s} = 0,9 \cot \theta \frac{A_{s,i}}{s} d f_{yd} \quad \text{con } f_{yd} \leq 0,8 f_{yk}$$

$$\cot \theta = 2 (\theta \cong 26^\circ) : V_{Rd,s} = 1,8 \frac{A_{s,i}}{s} d f_{yd}$$

$$\cot \theta = 1 (\theta = 45^\circ) : V_{Rd,s} = 0,9 \frac{A_{s,i}}{s} d f_{yd}$$

$$\cot \theta = 0,5 (\theta \cong 63^\circ) : V_{Rd,s} = 0,45 \frac{A_{s,i}}{s} d f_{yd}$$

Grandes variaciones de  $\theta$  producen  
grandes cambios en la resistencia  
de la biela traccionada



# Resumen del procedimiento de diseño

## Para elementos se sección rectangular que deben llevar armadura de corte:

(Siguiendo diapositiva)

1. ¿Hormigón solo resiste biela traccionada? ( $V'_{Ed} \leq V_{Rd,c}$ ?)

- Si: Colocar armadura de corte mínima
- No: Diseñar armadura de corte

Resistencia al corte  
sin armadura de corte

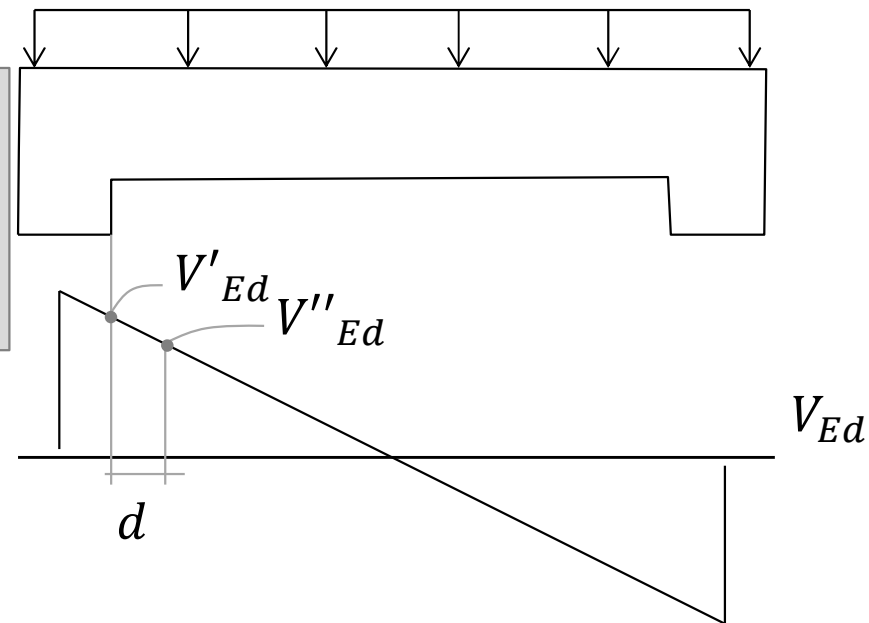
2. Elegimos  $\cot \theta = 2$  ( $\theta \cong 26^\circ$ ) para minimizar armadura de corte  $\Rightarrow$  Primero verificamos biela comprimida:

$$V'_{Ed} \leq V_{Rd,max} = 0,22 f_{cd} b d$$

Si no cumple, podemos aumentar el ángulo de la biela a  $\theta \cong 45^\circ$ , o directamente agrandar sección.

3. **Mantenemos el mismo ángulo  $\theta$  que en el paso 2**, ya sea  $\cot \theta = 2$  ( $\theta \cong 26^\circ$ ), o el modificado, y luego diseñamos armadura para verificar biela traccionada

4. Finalmente verificamos armadura mínima



$$V''_{Ed} \leq V_{Rd,s} = 1,8 \frac{A_{s,i}}{s} d f_{yd} \Rightarrow \frac{A_{s,i}}{s} \geq \frac{V''_{Ed}}{1,8 d f_{yd}}$$

con  $f_{yd} \leq 0,8 f_{yk}$

# Breve: Elementos SIN armadura de corte

- Ciertos elementos bi-direccionales (muros o losas) no tienen por qué llevar armadura de corte, si es que se garantiza la distribución lateral de los esfuerzos.
- Además, para elementos que sí deben llevar armadura de corte, se realiza la siguiente verificación y si se satisface, solo se coloca armadura mínima.

Verificación:  $V'_{Ed} \leq V_{Rd,c}$

Ver verificación exacta en EC Cap. 6.2.2

(consideramos la verificación para elementos fisurados)

Ver fundamentación física en JM

$$V_{Rd,c} = \left[ \frac{0,18}{\gamma_c} k(100\rho_l f_{ck})^{1/3} + 0,15\sigma_{cp} \right] b_w d \quad \text{con un mínimo de}$$

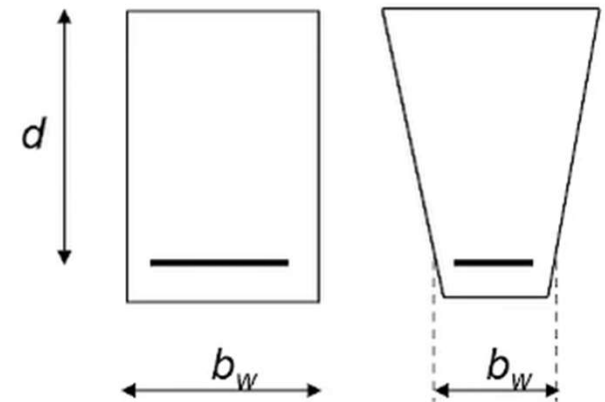
$$V_{Rd,c} = \left( 0,035k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2} \right) b_w d$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,0 \quad d \text{ en mm, } f_{ck} (\leq 60 \text{ N/mm}^2)$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} \leq 0,02 \quad \text{Armadura longitudinal correctamente anclada (ver 6.2.2)}$$

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} < 0,2f_{cd} \quad \text{Compresión positivo}$$

0,3f<sub>cd</sub> en EHE-08



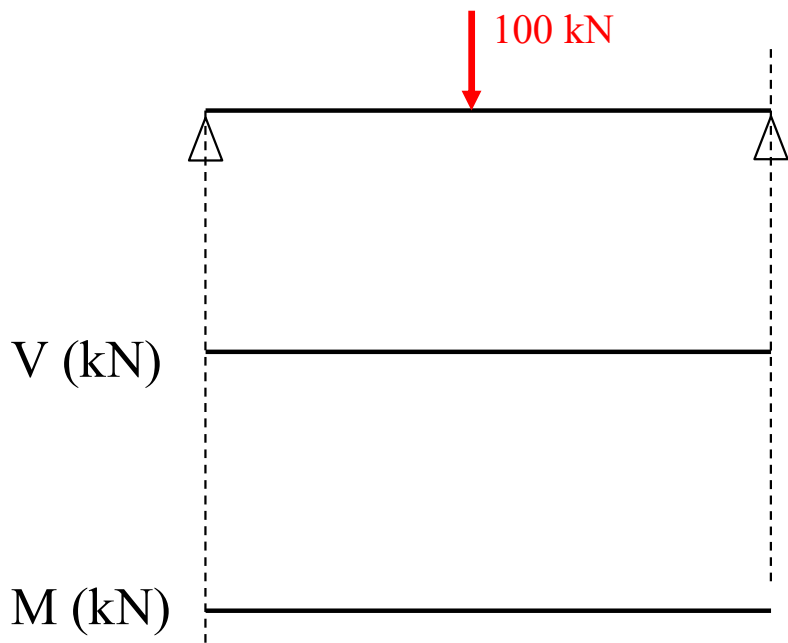
Ver que las tracciones axiales son desfavorables y se deben considerar sí o sí. Compresiones, al ser favorables, pueden no considerarse.

# Ejemplo

Diseñar las armaduras estructurales para ELU de solicitaciones normales y de cortante.

Viga simplemente apoyada de luz 4,5 m, con carga puntual  $P_d = 100$  kN aplicada al centro.

Sección:  $20 \times 45$  cm<sup>2</sup>. Rec.Mec = 5 cm. Materiales:  $f_{ck} = 30$  MPa,  $f_{yk} = 500$  MPa



$$V'_{Ed} =$$

$$V''_{Ed} =$$

**ELU de solicitaciones normales:**  $M_d = 112,5$  kNm

$$\mu = 0,176 \Rightarrow \omega = 0,195 \Rightarrow$$

$$A_s = 7,17 \text{ cm}^2 \Rightarrow \text{coloco } 4\phi 16 \text{ (falta verificar armaduras mínimas)}$$

**ELU de cortante:**  $V'_{Ed} = V''_{Ed} = 50$  kN

Paso 1: ¿hormigón sin armar resiste biela de tracción?

$$V_{Rd,c} = \left[ \frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho_l f_{ck})^{1/3} + 0,15 \cancel{\sigma_{cp}} \right] b_w d = 200 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$$

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1,5 (< 2,0)$$

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w d} = \frac{7,17 \text{ cm}^2}{20 \times 40 \text{ cm}^2} = 0,00896 (< 0,002)$$

$$V_{Rd,c} = 43 \text{ kN} \text{ con un mínimo de } (0,035 k^{3/2} \cdot f_{ck}^{1/2}) b_w d = 28 \text{ kN}$$

$V'_{Ed} = 50 \text{ kN} > 43 \text{ kN} = V_{Rd,c} \Rightarrow$  necesito calcular armadura de cortante (no basta con la mínima)



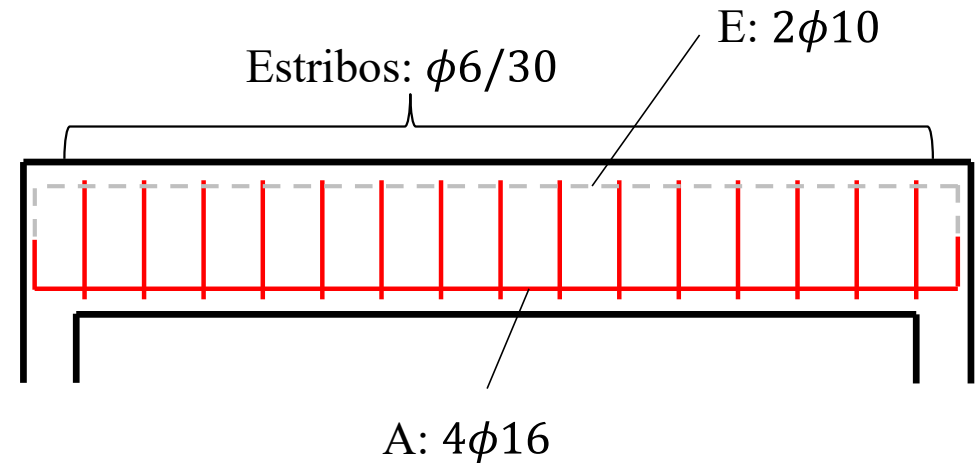
## Paso 2: verificación de biela de compresión

Considero  $\cot \theta = 2$

$$V_{Rd,max} = 0,22 f_{cd} b d = 352 \text{ kN}$$

$$V_{Rd,max} = 352 \text{ kN} < 50 \text{ kN} = V'_{Ed}$$

Biela comprimida satisface



## Paso 3: verificación de biela de tracción

Considero  $\cot \theta = 2$

$$V''_{Ed} \leq V_{Rd,s} = 1,8 \frac{A_{s,i}}{s} d f_{yd} \Rightarrow \frac{A_{s,i}}{s} \geq \frac{V''_{Ed}}{1,8 d f_{yd}} = \frac{50 \text{ kN}}{1,8 \times 40 \text{ cm} \times 400 \text{ MPa}}$$

$$\frac{A_{s,i}}{s} \geq 1,7 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \quad \text{Coloco: } \phi 6/30 \left( 1,9 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \right)$$

$$f_{yd} = \frac{500 \text{ MPa}}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

no mayor que  $0,8 f_{yk} = 400 \text{ MPa}$

**IMPORTANTE:** falta el Paso 4: verificar cuantía mínima y separación máxima

## • Cap. 9.2.2 del EC

(5) La cuantía de armadura de cortante se establece mediante la expresión (9.4):

$$\rho_w = A_{sw} / (s \cdot b_w \cdot \text{sen } \alpha) \quad (9.4)$$

donde:

$\rho_w$  es la cuantía de armadura de cortante;  $\rho_w$  no debe ser inferior a  $\rho_{w,min}$ ,

$A_{sw}$  es el área de la armadura de cortante en la longitud  $s$ ,

$s$  es la separación entre las armaduras de cortante medidas a lo largo del eje longitudinal del elemento,

$b_w$  es el ancho del alma del elemento,

$\alpha$  es el ángulo entre la armadura de cortante y el eje longitudinal (véase el apartado 9.2.2 (1)).

$$\rho_{w,min} = \frac{0,08\sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \quad (9.5)$$

- **Cap. 9.2.2 del EC**

(6) La separación longitudinal máxima entre los diferentes tipos de armaduras de cortante no debe exceder  $s_{l,max}$ , cuyo valor se establece a continuación.

$$s_{l,max} = 0,75 d (1 + \cot g \alpha) \quad (9.6)$$

donde  $\alpha$  es la inclinación de la armadura de cortante respecto al eje longitudinal de la viga.

(7) La separación longitudinal máxima de las barras levantadas no debe exceder el valor de  $s_{b,max}$  establecido mediante la expresión (9.7).

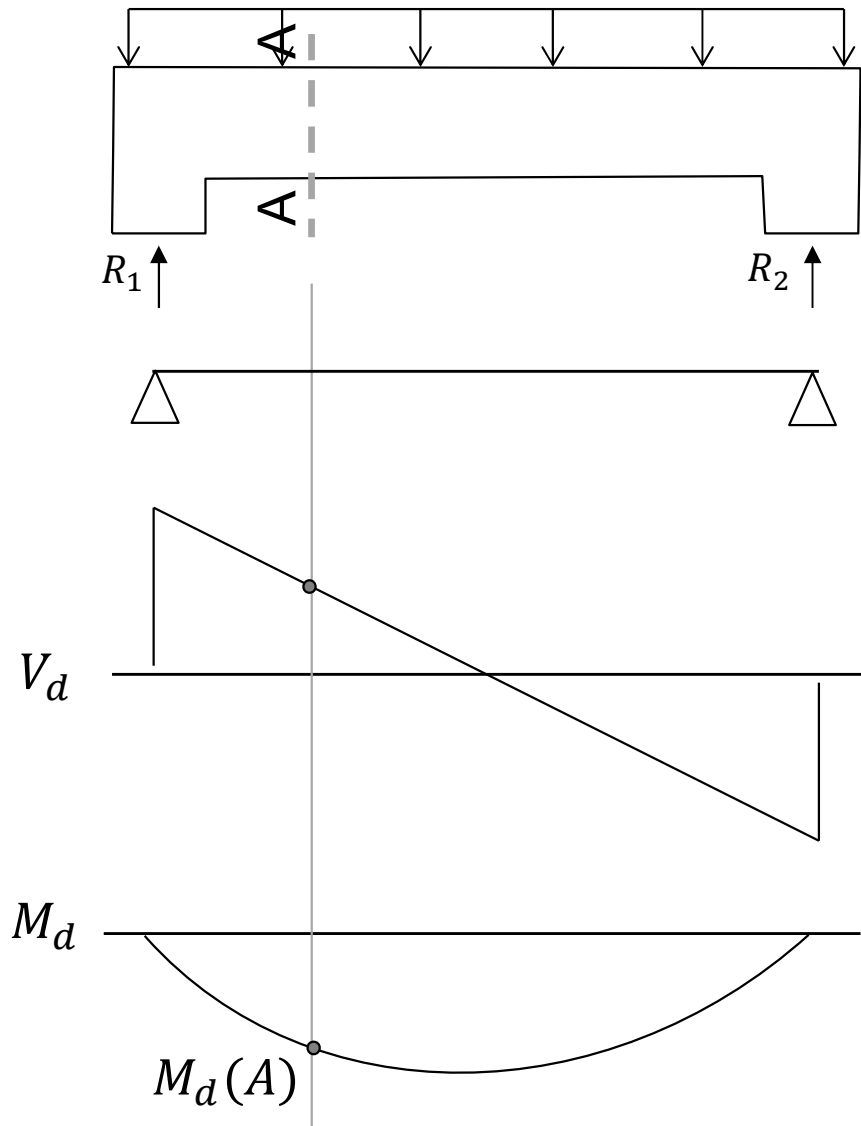
$$s_{b,max} = 0,6 d (1 + \cot \alpha) \quad (9.7)$$

(8) La separación transversal de las ramas en una serie de cercos no debe exceder el valor  $s_{t,max}$ , definido en la expresión (9.8).

$$s_{t,max} = 0,75d \leq 600 \text{ mm} \quad (9.8)$$

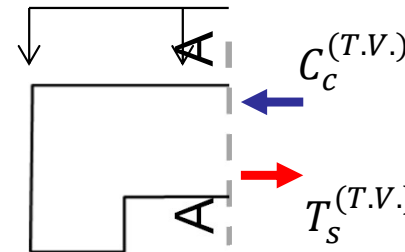
# Tracción adicional debido al cortante

## • Motivación



Dados los diagramas de sollicitación, queremos determinar la armadura longitudinal (ELU de sollicitaciones normales) en la sección A-A.

Elegimos utilizar el modelo de teoría de vigas  $\Rightarrow$



$$\Rightarrow T_s^{(TV)} = M_d(A)/z$$

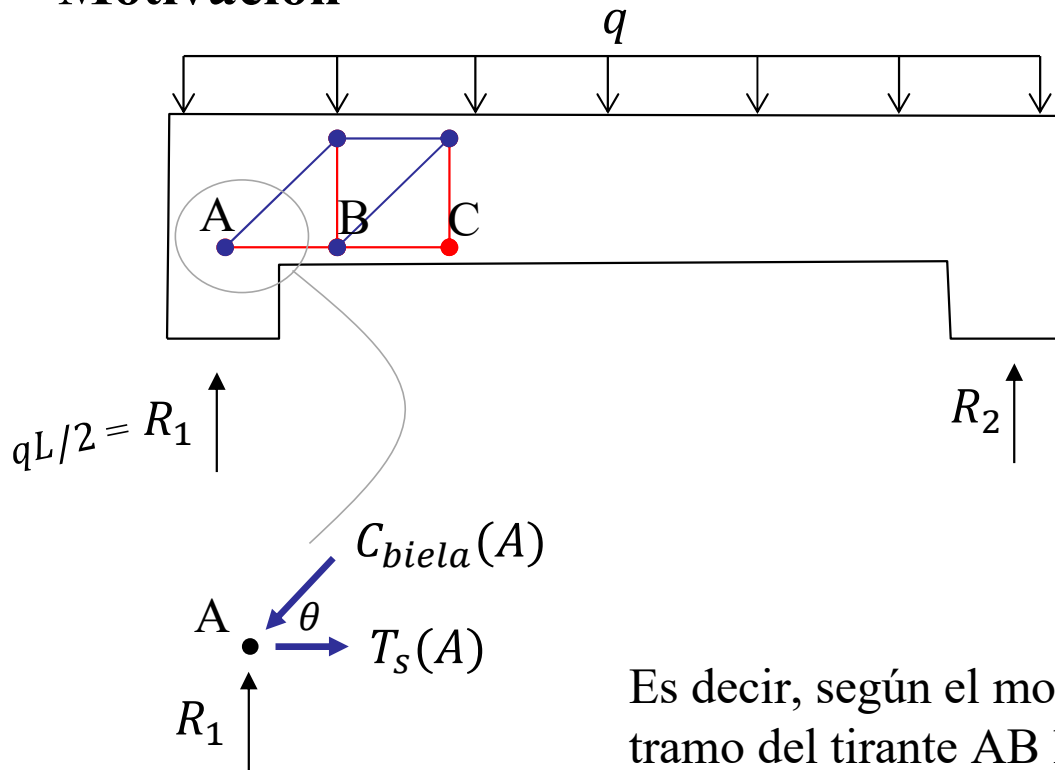
$\Rightarrow$  si la sección A-A tiende a acercarse al apoyo, la fuerza de tracción  $T_s$  (según el modelo de teoría de vigas) tiende a ser nula, por lo que  $A_s = T_s/f_{yd}$  longitudinal tendería a ser nula sobre el apoyo.

Sin embargo, podemos analizar el mismo problema utilizando el reticulado de Ritter-Morsch, específicamente en el apoyo, donde teoría de vigas predice  $T_s = 0$ .



# Tracción adicional debido al cortante

## • Motivación



Tenemos el mismo problema, pero ahora lo modelamos usando el reticulado de Ritter-Morsch (bielas y tirantes).

$$T_s(A) = C_{biela}(A) \cos \theta = C_{biela}(A) \cos 45^\circ$$

$$C_{biela}(A) \sin \theta = C_{biela}(A) \sin 45^\circ = R_1 \Rightarrow$$

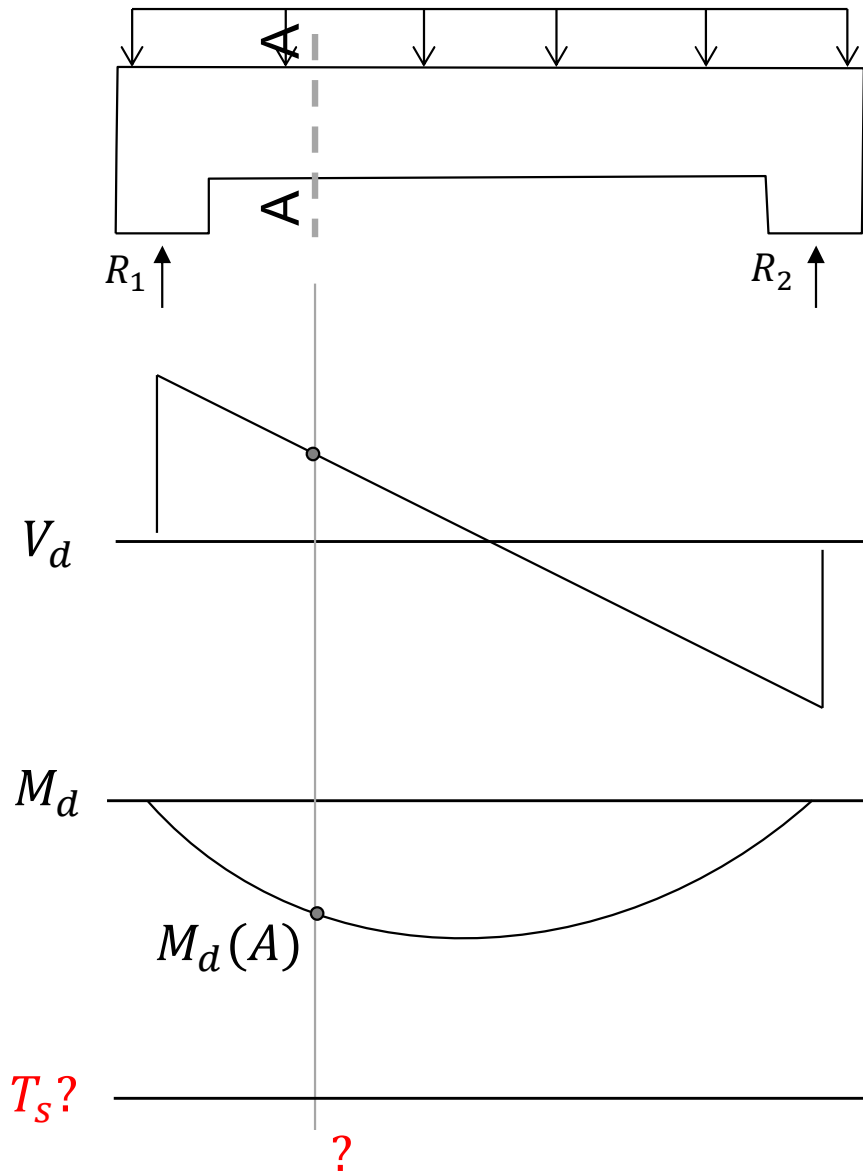
$$T_s(A) = R_1 \gg 0 = T_s^{(TV)}(A)$$

Es decir, según el modelo de bielas y tirantes, la armadura en el tramo del tirante AB lleva una fuerza igual a la reacción  $T_s = R_1 = qL/2$ , pero el modelo de teoría de vigas predice en ese tramo una fuerza en las armaduras que tiende a cero  $T_s \rightarrow 0$ .

Esta discrepancia ocurre por el efecto del cortante en ELU, que no fue incorporado cuando analizamos ELU de solicitaciones normales con teoría de vigas. Es decir, si queremos saber la fuerza de tracción que tiene la armadura longitudinal en una sección cualquiera de la viga, no podemos simplemente utilizar teoría de vigas y hacer  $T_s = M_d/z$ , sino que debemos tener en cuenta este efecto del cortante que aumenta las tracciones. Este efecto NO existe en los puntos de máximo momento flector.

# Tracción adicional debido al cortante

## • Motivación



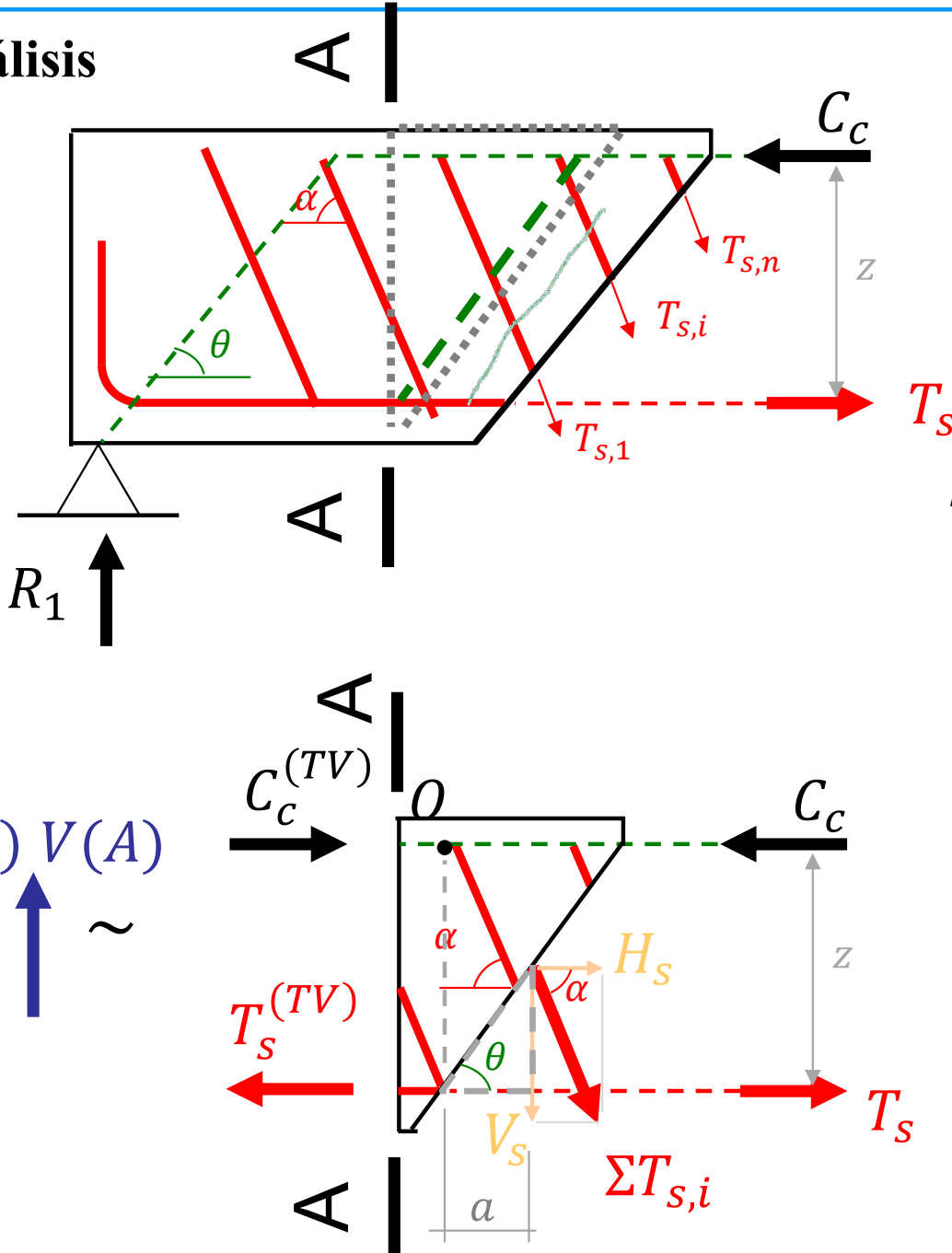
Surge entonces la necesidad de tener un “diagrama de tracciones internas” actuante sobre las armaduras traccionadas. A priori podríamos pensar que ese diagrama podría ser proporcional a  $M_d$ , ya que  $T_s^{(TV)} = M_d/z$ . Pero ya vimos que no es así. Necesitamos un diagrama que contemple el efecto de cortante.

La idea es poder utilizar los diagramas de sollicitación que surgen de teoría de vigas y adaptarlos para incorporar el efecto del cortante.

Para ello, tomaremos una porción de la viga y analizamos cómo se relacionan las sollicitaciones por teoría de vigas con las fuerzas internas que surgen de considerar las armaduras longitudinales, transversales y las bielas de compresión inclinadas.

# Tracción adicional debido al cortante

## • Análisis



Equilibrio de momento desde  $O$ :

$$T_s^{(TV)} z = T_s z + H_s \frac{z}{2} - V_s a \quad \text{¿valor de } a?$$

$$\tan \theta = \frac{z/2}{a} \Rightarrow \cot \theta = \frac{a}{z/2}$$

$$\tan \alpha = \frac{V_s}{H_s} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{H_s}{V_s}$$

$$T_s^{(TV)} z = T_s z + V_s \cot \alpha \frac{z}{2} - V_s \frac{z}{2} \cot \theta \Rightarrow$$

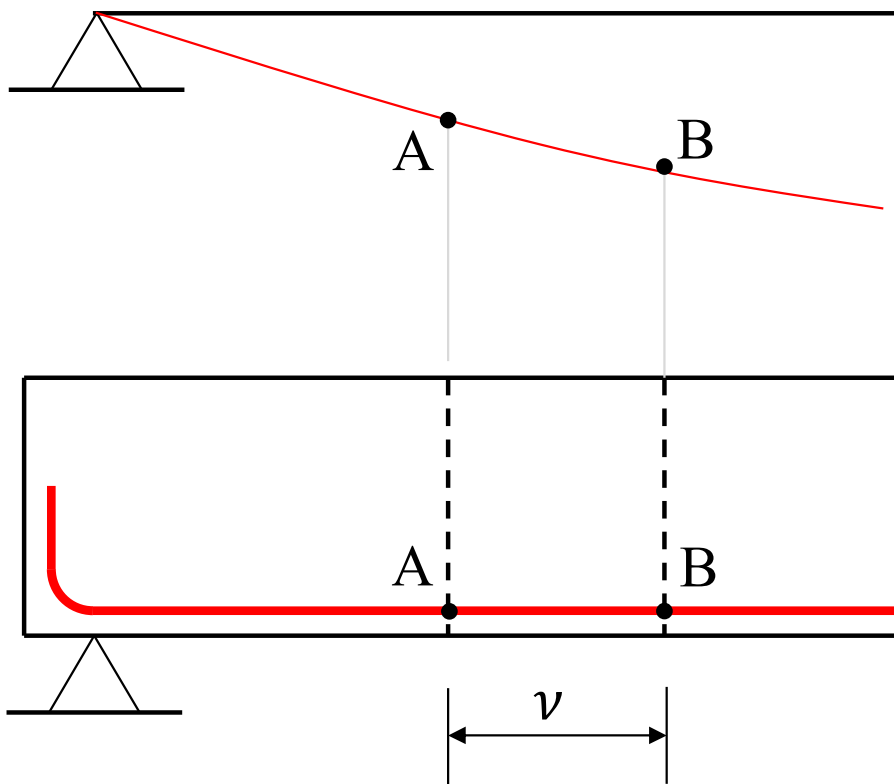
$$T_s = T_s^{(TV)} + \frac{V = V_s}{2} (\cot \theta - \cot \alpha) = \Delta T_s$$

La fuerza "real" ( $T_s$ ) que presenta la armadura es un  $\Delta T_s$  mayor que la que predice teoría de vigas.

# Decalaje de la ley de momentos

- ¿cómo hacemos entonces para obtener el “diagrama de tracción” interna de la armadura, a partir del diagrama de momentos de teoría de vigas?
- Respuesta: utilizamos un “diagrama de momento DECALADO”. ¿Qué es esto?

Diagrama de momento por T. de Vigas



La idea es calcular la fuerza de tracción (o lo que es lo mismo, la armadura) en el punto A utilizando el momento flector del punto B (por teoría de vigas), que es mayor que en A.

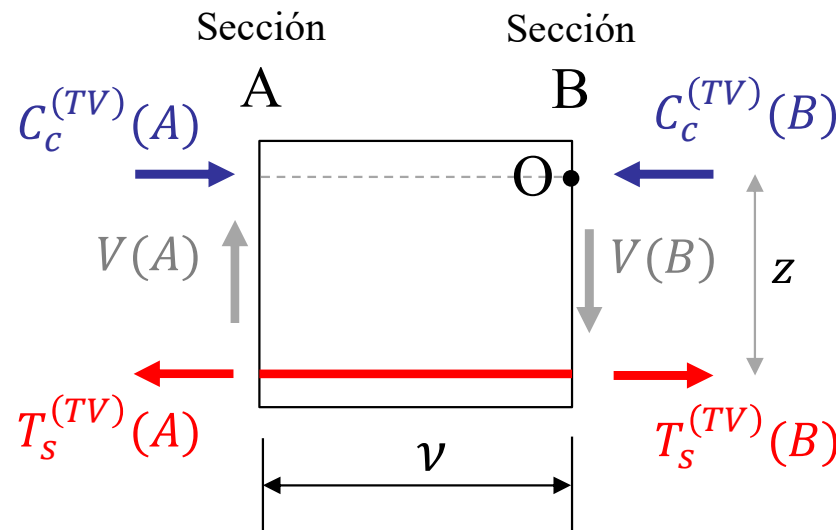
Pero dado A ¿dónde está B? debemos determinar la distancia  $\nu$ .

# Decalaje de la ley de momentos

$T_s^{(TV)}(A)$  y  $T_s^{(TV)}(B)$  son las fuerzas de tracción en las armaduras, en las secciones A, y B, respectivamente, obtenidas a partir de teoría de vigas, es decir:  $M_d(A)/z$  y  $M_d(B)/z$ , respectivamente.

Si hacemos equilibrio de momentos desde el punto O:

$$T_s^{(TV)}(A)z + V(A)v - T_s^{(TV)}(B)z = 0$$



Pero del análisis anterior sabemos que la fuerza “real” en A vale

$$T_s(A) = T_s^{TV}(A) + \frac{V(A)}{2}(\cot \theta - \cot \alpha) \Rightarrow T_s^{TV}(A) = T_s(A) - \frac{V(A)}{2}(\cot \theta - \cot \alpha) \Rightarrow$$

Sustituyendo  $\Rightarrow T_s(A)z - \frac{V(A)}{2}z(\cot \theta - \cot \alpha) + V(A)v = T_s^{(TV)}(B)z \Rightarrow T_s(A) = T_s^{(TV)}(B)$  si y solo si

$$\frac{V(A)}{2}z(\cot \theta - \cot \alpha) = V(A)v \Rightarrow v = \frac{z}{2}(\cot \theta - \cot \alpha)$$

Para saber la fuerza  $T_s$  que tiene la armadura en la sección A, basta con mirar una sección B, ubicada una distancia  $v$  desde A, hacia el lado donde crece el momento, y utilizar ese momento en B para calcular la fuerza  $T_s$  en A (y por ende el área de acero necesario  $A_s$  en la sección A).



# Decalaje de la ley de momentos

En la práctica, para secciones rectangulares con estribos verticales, con  $\theta = 26^\circ$  a  $63^\circ$  y  $\alpha = 90^\circ$ , tomamos  $v = d$ .

Ahora entonces, podemos conocer “diagrama de tracción” interna en la armadura. Construimos en su lugar, el diagrama de momento flector decalado, con el cual se puede hallar la tracción y armadura fácilmente con teoría de vigas:

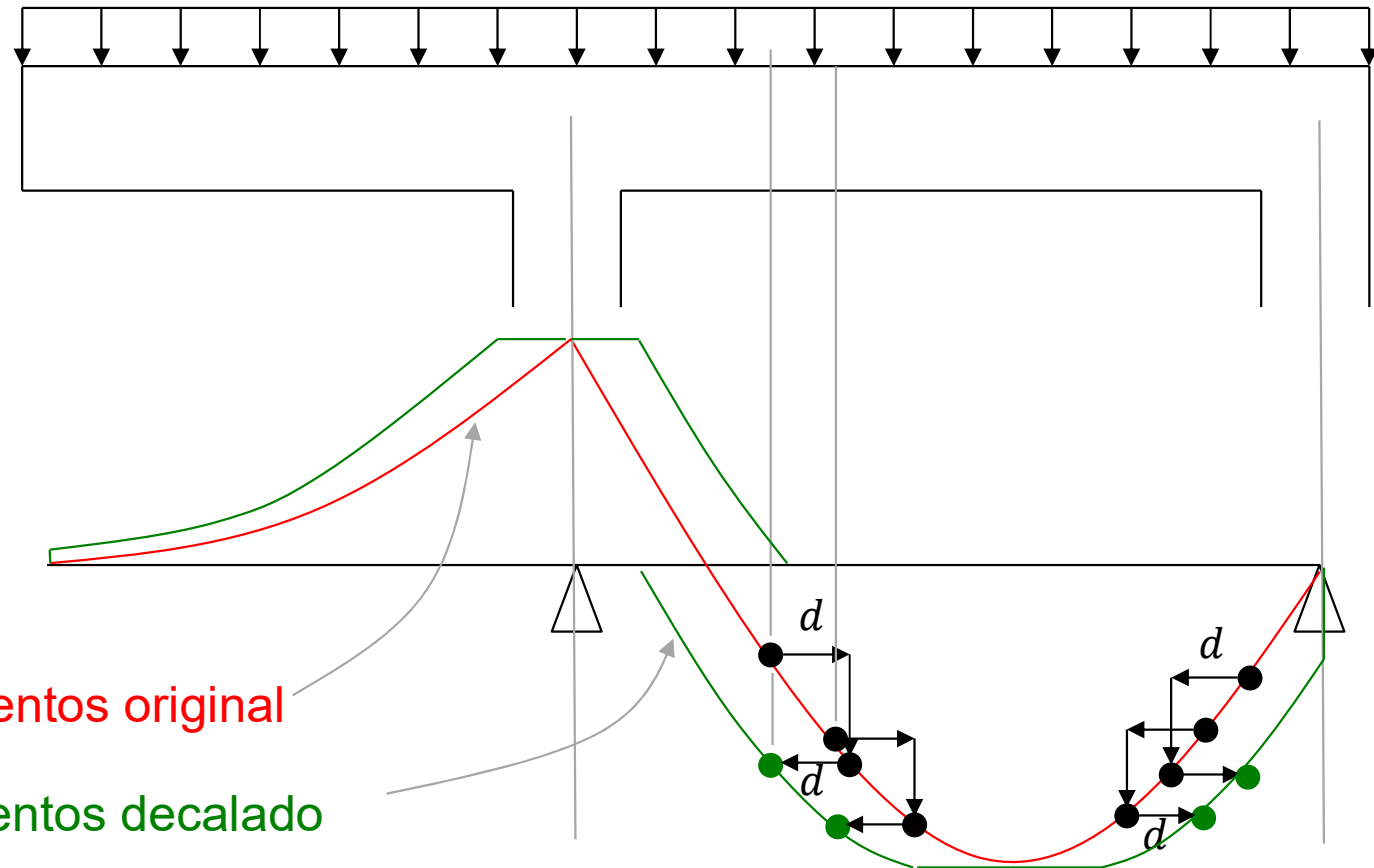
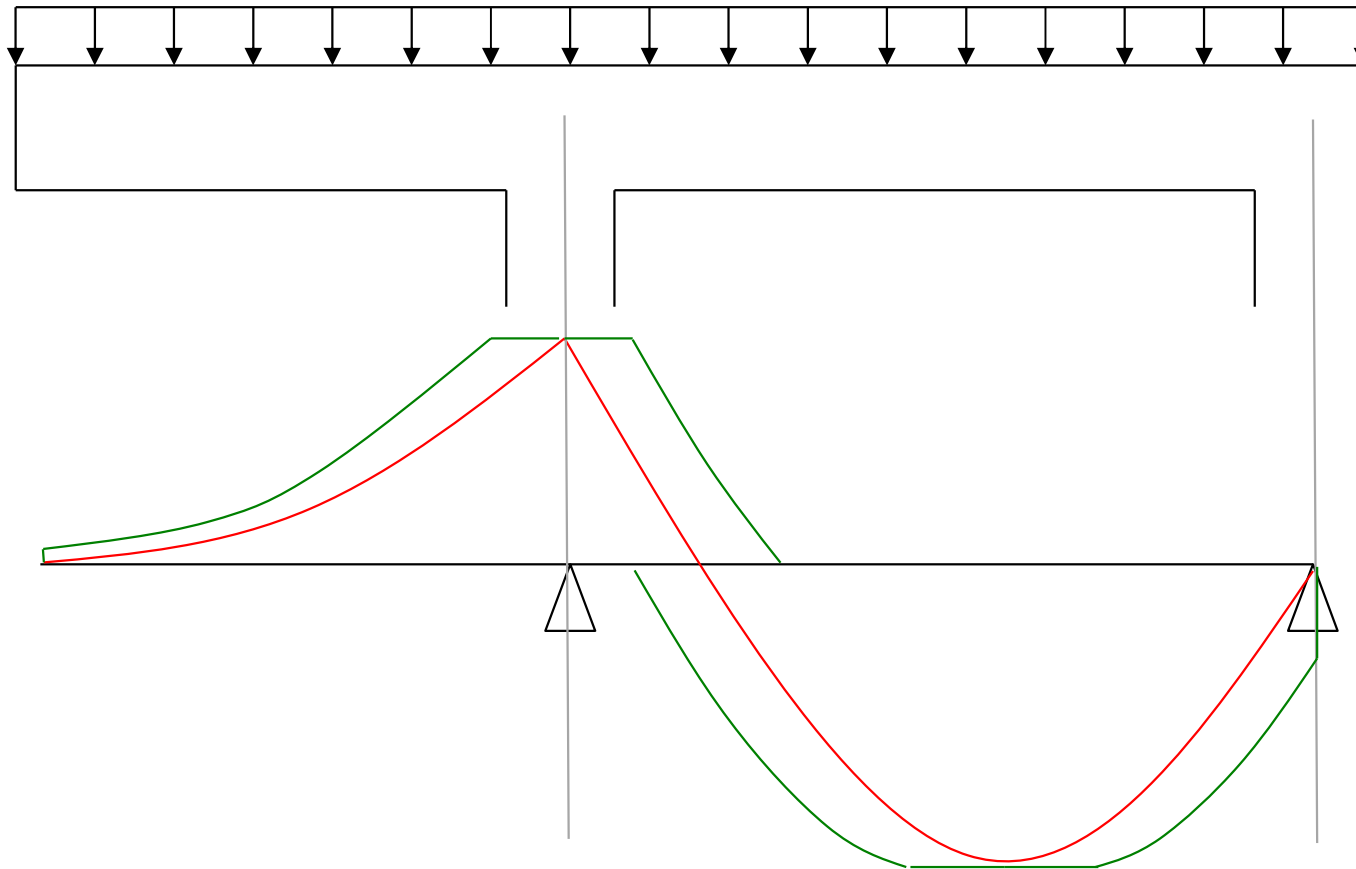


Diagrama de momentos original

Diagrama de momentos decalado

# Decalaje de la ley de momentos

- Ejemplo de colocación de armaduras



## • Definiciones (EC – Cap. 6.2.1)

$V_{Rd,c}$  Es el valor de cálculo de la resistencia a cortante de un elemento sin armadura de cortante.

$V_{Rd,s}$  Es el valor de cálculo del esfuerzo cortante que puede soportar un elemento con la armadura de cortante trabajando a su límite elástico.

$V_{Rd,max}$  Es el valor de cálculo del esfuerzo cortante máximo que puede soportar el elemento, limitado por la rotura de las bielas de compresión.

(2) La resistencia a cortante de un elemento con armadura de cortante es igual a:

$$V_{Rd} = V_{Rd,s} + V_{cd} + V_{td} \quad (\text{no nulas para barras de altura variable, nulas en HE1}) \quad (6.1)$$

(3) En las zonas del elemento donde  $V_{Ed} \leq V_{Rd,c}$  no se requiere armadura de cortante de cálculo actuando en la sección considerada.  $V_{Ed}$  es el esfuerzo cortante de cálculo que se considera resultante de la aplicación de las cargas externas y del pretensado (adherente o no).

(4) En el caso de que al obtener el cortante de cálculo no se precise armadura de cortante, se debe disponer igualmente una armadura mínima de acuerdo con el apartado 9.2.2. Este armado mínimo puede suprimirse en el caso de elementos tales como losas (macizas, nervadas o alveolares), en las que la redistribución transversal de cargas es posible. También puede suprimirse el armado mínimo en los elementos de importancia menor (por ejemplo, dinteles con una luz inferior a dos metros), que no contribuyen de forma significativa a la resistencia y estabilidad global de la estructura.

(ver apartado 9.2.2 por armadura mínima transversal)

## • Definiciones (EC – Cap. 6.2.1)

(5) En las zonas en las que  $V_{Ed} > V_{Rd,c}$  (con  $V_{Rd,c}$  de acuerdo con la expresión (6.2)) debe disponerse suficiente armadura de cortante de forma que  $V_{Ed} \leq V_{Rd}$  (véase la expresión (6.1)).

(6) En cualquier parte del elemento, la suma del esfuerzo cortante de cálculo y la contribución de las alas,  $V_{Ed} - V_{ccd} - V_{td}$ , no debe exceder el valor máximo permitido  $V_{Rd,max}$  (véase 6.2.3).  $V_{Ed} < V_{Rd,max}$

(7) La armadura longitudinal de tracción debe ser capaz de soportar el esfuerzo adicional de tracción causado por el cortante (véase 6.2.3. (7)). (diseñar la armadura transversal)

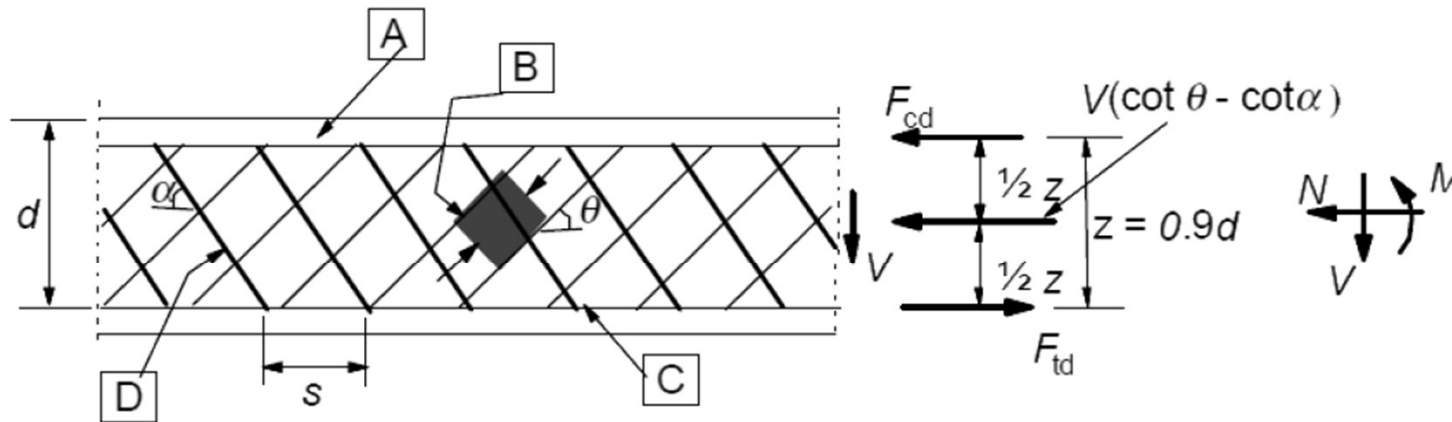
(8) Para elementos sometidos principalmente a una carga uniformemente distribuida, no será necesaria la comprobación del esfuerzo cortante de cálculo para los puntos situados a una distancia inferior a  $d$  desde el borde del apoyo. Debe darse continuidad hasta el apoyo a toda la armadura de cortante necesaria. Además deberá comprobarse que el cortante en el apoyo no supera el valor  $V_{Rd,max}$  (véanse los apartados 6.2.2 (6) y 6.2.3 (8)).

(se mantiene que tomo  $V_{Rd}(x=d) \leq V_{Rd,s}$  para armar, y  $V_{Rd}(x=0) \leq V_{Rd,max}$  para verificar biela de compresión)

(9) En el caso de que una carga sea aplicada en la parte inferior de la sección, debe disponerse una armadura vertical de cortante suficiente, capaz de transmitir la carga a la parte superior de la sección, además de las otras armaduras requeridas para resistir el cortante.



## • Elementos con armadura de cortante (EC – Cap. 6.2.3)



[A] -Cordón comprimido [B] -Bielas [C] - Cordón traccionado [D] - Armadura de cortante

$\alpha$  es el ángulo entre las armaduras de cortante con el eje de la viga perpendicular al esfuerzo cortante (medida en positivo como se indica en la figura),

Usualmente estribos  
con  $\alpha = 90^\circ$

$\theta$  es el ángulo entre las bielas de compresión de hormigón y el eje de la viga perpendicular al esfuerzo cortante,

Usualmente inclinación  
 $26^\circ < \theta < 63^\circ$

$F_{td}$  es el valor de cálculo de la fuerza de tracción en la armadura longitudinal,

$F_{cd}$  es el valor de cálculo de la fuerza de compresión del hormigón en la dirección del eje longitudinal del elemento,

$b_w$  es el ancho mínimo entre los cordones de tracción y compresión,

(ancho de la sección rectangular o  
ancho del alma de una sección T)

$z$  para un elemento de canto constante, es el brazo mecánico de las fuerzas internas correspondiente al momento flector en el elemento considerado.

( $z = 0,9$  para sección  
rectangular)



## • Elementos con armadura de cortante (EC – Cap. 6.2.3)

Elementos con armadura de cortante inclinada:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} (\cot \theta + \cot \alpha) \sin \alpha$$

y

$$V_{Rd,max} = \frac{\alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} (\cot \theta + \cot \alpha)}{(1 + \cot^2 \theta)}$$

Elementos con estribos verticales:

$$V_{Rd,s} = \frac{A_{sw}}{s} z f_{ywd} \cot \theta$$

y

$$V_{Rd,max} = \alpha_{cw} b_w z v_1 f_{cd} / (\cot \theta + \tan \theta)$$

$A_{sw}$  es el área de la sección de la armadura de cortante,

$s$  es la distancia entre cercos u horquillas,

$f_{ywd}$  es el límite elástico de cálculo de la armadura de cortante.

$$f_{ywd} = \min \left\{ 0,8 f_{yw}, \frac{f_{yw}}{1,15} \right\} = 0,8 f_{yw}$$

$v_1$  es un coeficiente de reducción de la resistencia del hormigón fisurado por el efecto del cortante,

$$v_1 = 0,6$$

$\alpha_{cw}$  es un coeficiente que tiene en cuenta el estado de tensiones en el cordón comprimido. Los valores a utilizar serán:

1 para estructuras sin pretensado

- **En la práctica:**

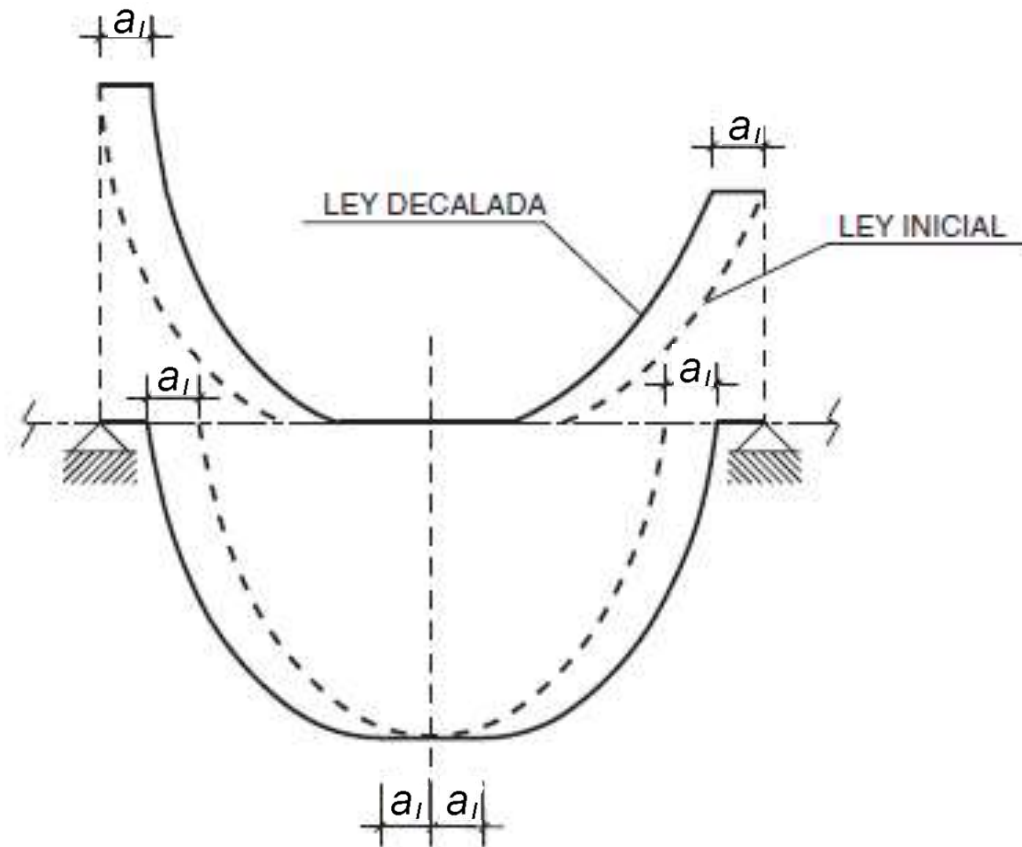
- Desplazo el diagrama de momentos (siempre hacia el lado más desfavorable), para obtener en cada punto el valor de cálculo.

- **Decalaje según EC (Cap. 9.2.1.3):**

- Cuando no se tiene armadura de cortante, el decalaje se puede considerar igual al canto útil  $d$ .
- Cuando se tiene armadura de cortante, la fórmula para el cálculo del decalaje es:

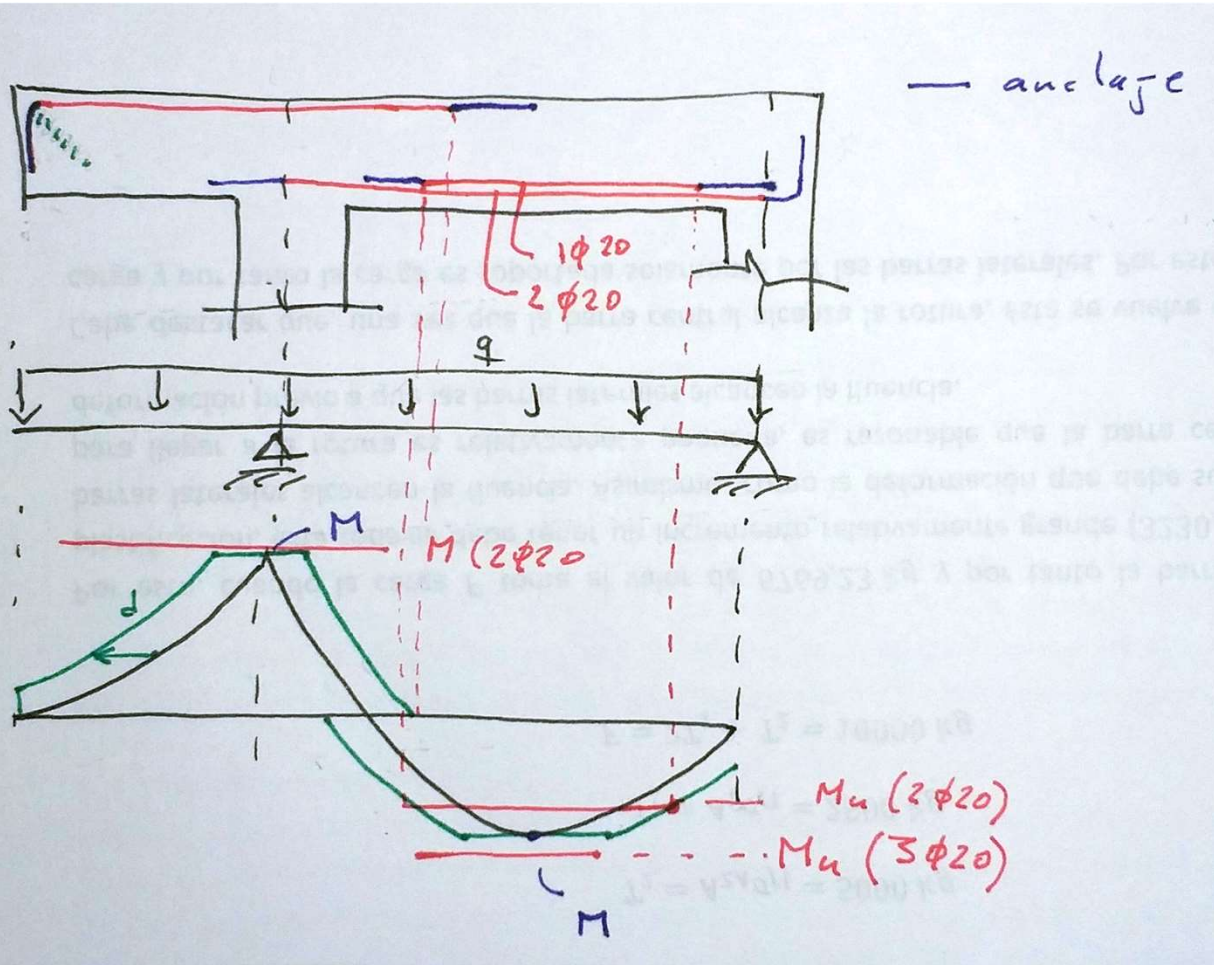
$$a_1 = z (\cotg \theta - \cotg \alpha) / 2$$

- En la práctica también se puede considerar el decalaje como el canto útil cuando se tiene armadura de cortante.



# Valor del decalaje en la práctica

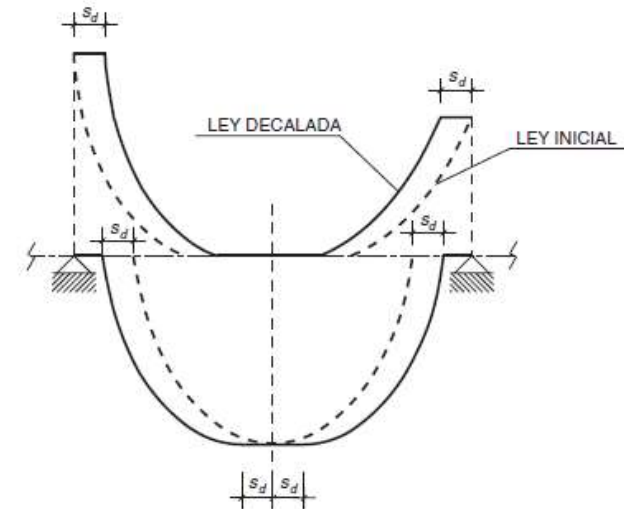
## • Ejemplo:



## Para profundizar:

**Analizar:** para una sección dada, como varía el valor del decalaje al variar:

- la inclinación de las bielas y tirantes
- la relación entre  $V_{su}/V_{rd}$ .



**Observar:** Los valores de momentos máximos no cambian. Cambia la posición en donde se dan los momentos.

**Observar:** No confundir *decalaje* con *redistribución de momentos*. Fenómenos totalmente distintos.

# Armado (Cap. 9.2.2)

- **Separación longitudinal:  $s_t$**

– Asegura confinamiento

$$s_t \leq 0,75d(1 + \cotg \alpha) \leq 600 \text{ mm}$$

$$s_t \leq 0,60d(1 + \cotg \alpha) \leq 450 \text{ mm}$$

$$s_t \leq 0,30d(1 + \cotg \alpha) \leq 300 \text{ mm}$$

$$\text{si } V_{rd} \leq \frac{1}{5} V_{u1}$$

$$\text{si } \frac{1}{5} V_{u1} < V_{rd} \leq \frac{2}{3} V_{u1}$$

$$\text{si } V_{rd} > \frac{2}{3} V_{u1}$$

- **Separación transversal:  $s_{t,trans}$**

– Separación entre ramas

$$s_{t,trans} \leq d \leq 500 \text{ mm}$$

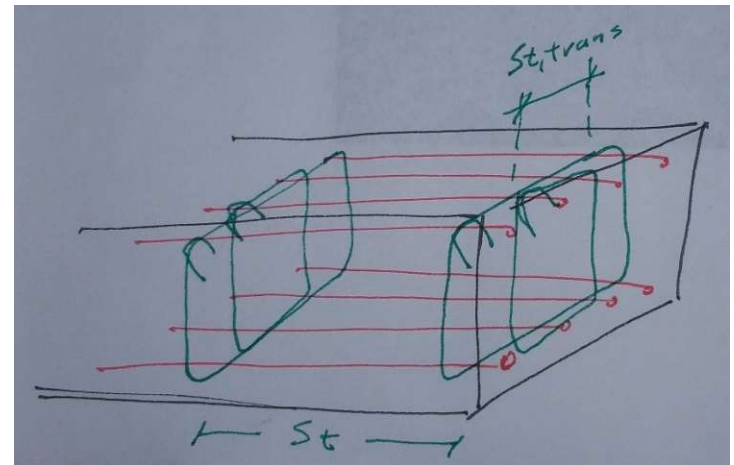
- **Cuantía mínima de  $A_\alpha$ :**

$$\sum \frac{A_\alpha f_{y\alpha,d}}{\text{sen } \alpha} \geq \frac{f_{ct,m}}{7,5} b_0$$

(EC:)

Resistencia media a

tracción [en MPa]:  $f_{ct,m} = 0,30 f_{ck}^{2/3}$



- **Hay excepciones y aclaraciones: Leer norma.**



# Origen de armadura mínima en vigas

1<sup>er</sup> Semestre 2025 Agustin Spalvier Curso: Hormigón Estructural 1

44

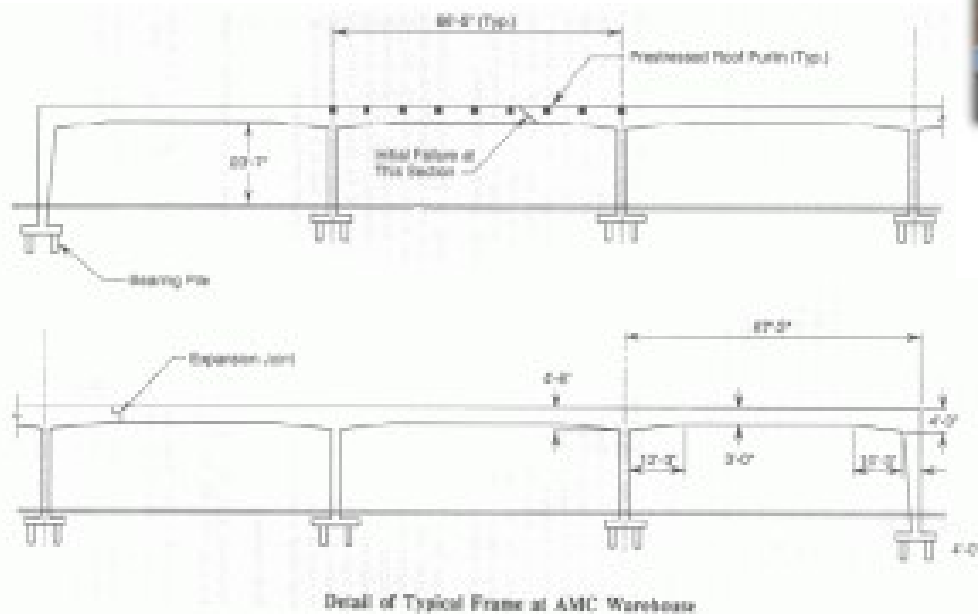
## Caso histórico

Luz: 20 m

Cortante llevado por  
hormigón (Sin estribos).



**US Air Force Warehouse, Ohio, USA  
(August, 1955)**



Detail of Typical Frame at AMC Warehouse