



Física Experimental 1



Práctica 2 - Determinación de la aceleración de la gravedad local

1. Objetivos

Los objetivos de la práctica son los siguientes:

- Verificar experimentalmente la dependencia del período con la amplitud de las oscilaciones en el péndulo simple, y determinar el intervalo de amplitud de las pequeñas oscilaciones.
- Determinar el valor de la aceleración gravitatoria g a partir de las medidas obtenidas y poner en práctica el método de mínimos cuadrados.

2. Fundamento teórico

2.1. El péndulo simple

El péndulo simple es la idealización de un sistema físico real. Dicho sistema real es una masa m suspendida de un soporte mediante un hilo de masa muy pequeña comparada con m . La idealización es una masa puntual, suspendida de un soporte fijo, mediante un hilo flexible, inextensible y sin masa, que se mueve confinada a un plano, como se muestra en la Figura 1. Se desprecian las fuerzas de rozamiento entre el aire y la masa, y entre el hilo y el punto de soporte.

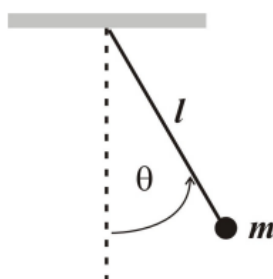


Figura 1: Esquema de un péndulo simple.

La ecuación de movimiento del péndulo simple es:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0 \quad (1)$$

donde g es la aceleración gravitatoria, l la longitud del péndulo y θ el ángulo respecto a la vertical. La ecuación 1 es válida para todo valor de θ , pudiéndose linealizar en torno a la posición de equilibrio estable ($\theta = 0$), si θ es pequeño:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \quad (2)$$

De aquí en más nos referiremos a la Ec. (2) como la ecuación de *pequeñas oscilaciones*. Como observación, cuando θ deja de ser pequeño (mayor a 10°) sucede que $\sin \theta < \theta$, por lo que la Ec. (2) estaría sobrestimando la fuerza de restauración del péndulo. De resolver (2) en forma analítica, se puede ver que si el movimiento se restringe al rango en que el ángulo formado por el hilo y la vertical es pequeño, el período se vuelve independiente de la amplitud de la oscilación, esto es, que para cualquier amplitud dentro de ese rango, es aproximadamente constante.

2.2. Ejercicio 1

- Deducir la Ec. (1) a partir del modelo físico correspondiente al péndulo simple.
- Demostrar que la expresión del período, considerando la ecuación linealizada es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3)$$

Nota: la expresión del período puede ser usada para la determinación del valor de g , siempre que se midan T y l con determinada precisión.

2.3. ¿Qué pasa fuera de pequeñas oscilaciones?

Como mencionado anteriormente, cuando el ángulo θ es grande el período T pasa a depender del ángulo inicial. Podemos encontrar una expresión para el período en función de θ y θ_0 partiendo de la ecuación de la conservación de la energía [1][2].

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgl[1 - \cos \theta] = \frac{1}{2}mv_0^2 = mgl[1 - \cos \theta_0] \quad (4)$$

Donde E es la energía del péndulo, $v = l\dot{\theta}$ la velocidad instantánea de la masa, v_0 la máxima velocidad (alcanzada cuando $\theta = 0$), y θ_0 es el ángulo inicial (que coincide con $v = 0$).

Resolviendo (4) podemos obtener $T(\theta, \theta_0)$ de forma integral:

$$T(\theta, \theta_0) = T_0 \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}} \quad (5)$$

En (5) la constante T_0 representa al período de pequeñas oscilaciones, presentado en la Ec. (3). La Ec. (5) tiene la siguiente expansión en serie [1]:

$$T(\theta, \theta_0) = T_0 \left(1 + \frac{k^2}{2^2} + \frac{3^2 k^4}{2^2 4^2} + \frac{5^2 k^6}{2^2 8^2} + \frac{35^2 k^8}{2^2 64^2} + \dots \right) \quad (6)$$

donde $k = \sin(\frac{\theta_0}{2})$. Nótese que si θ es pequeño, los términos con k se anulan y la Ec. (6) se reduce a la Ec. (3).

También es útil tener expresiones que aproximen el comportamiento del período, por ejemplo [3][4]:

$$T(\theta, \theta_0) = T_0 \left(\frac{\theta_0}{\sin \theta_0} \right)^{3/8} \quad (7)$$

Graficando los primeros cuatro términos de (6) y la función de (7) se obtiene el gráfico de la Figura 2. Vemos que las funciones son casi idénticas para amplitudes de hasta 60 grados.

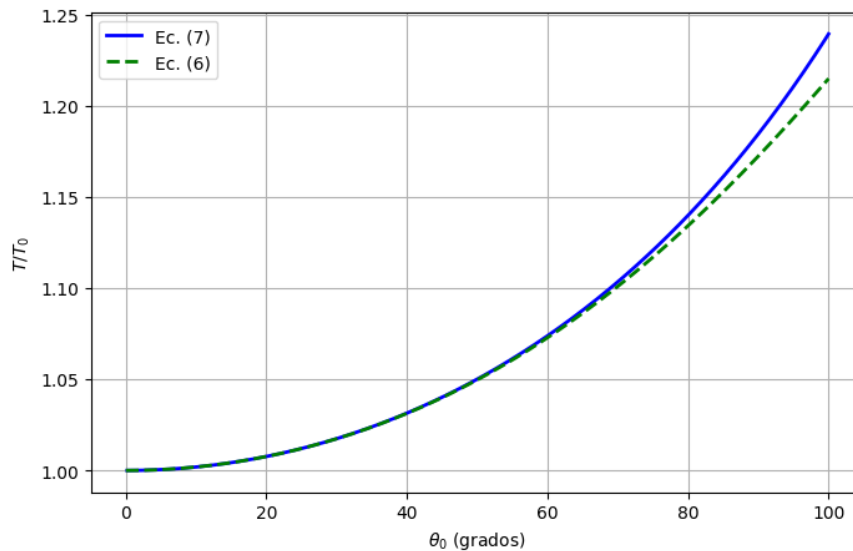


Figura 2: Período de oscilación en función del ángulo inicial.

2.4. La aceleración de la gravedad

La llamada fuerza de la gravedad ($\vec{F}$) es aquella que hace que dos cuerpos masivos sean atraídos uno hacia el otro. La expresión para dicha fuerza fue propuesta por Newton en 1666 y puede ser definida como:

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{R^2} \hat{r} \quad (8)$$

donde R es la distancia entre los objetos de masas m y M , y $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ es la constante de Newton. $\hat{r}$ es un versor que define la línea que conecta los centros de masa de los dos cuerpos.

Al aplicar dicha fórmula a los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra, basta con tomar M y R como la masa y radio medio de la Tierra, siendo: $M_{\text{Tierra}} = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$ y $R_{\text{Tierra}} = 6371 \text{ km}$ para obtener la forma del módulo de $\vec{F}$ en la ecuación:

$$F = mg \quad (9)$$

por lo tanto:

$$g = G \frac{M}{R^2} \cong 9,8163 \text{ m/s}^2 \quad (10)$$

donde m es la masa de un cuerpo cuyo movimiento se quiere describir. La ecuación 10 indica el valor esperado para la aceleración de la gravedad g cerca de la superficie de la Tierra.

Estrictamente hablando, g no es una constante, ya que depende de la distribución de masa y de la distancia al centro de la Tierra. Eso implica que aún imaginando un proceso de medida sin errores y con una muy baja incertidumbre, el valor medido de g debería depender al menos del punto geográfico en el cual ha sido tomado. Además, la presencia cercana de otros cuerpos astronómicos cambiaría el valor de la aceleración experimentada por el cuerpo de masa m . En el caso de la Tierra, las fases de la luna pueden afectar el valor medido de g para una alguna ubicación geográfica. Como veremos, las limitaciones impuestas por nuestros instrumentos de medida nos impedirán distinguir entre cambios tan chicos, donde no podremos expresar el valor de g con más de 3 cifras significativas.

3. Procedimiento experimental

Se utilizarán materiales disponibles en el laboratorio para armar un péndulo simple (tanza, objetos esféricos, soportes). Para la medición del período se dispondrá de un cronómetro. Para la medición de la amplitud (ángulo inicial) se dispondrá de un semicírculo.

1. Antes de armar el dispositivo deben discutir en grupos acerca del modelo utilizado y las hipótesis que se realizan en el mismo.
2. Discutir en grupos y luego con el docente: ¿Cómo se determinará el período? ¿Cuál es la incertidumbre al medir el período?
3. Medición del período en función de la amplitud del movimiento. Para ello, elegir un valor de l con el cual relevar el período en función de la amplitud inicial del movimiento. Hágalo hasta los 60° . Tome 10 medidas para cada valor de amplitud inicial. Graficar el resultado para encontrar a partir de qué valor de θ el período deja de ser constante y comienza a depender de la amplitud de las oscilaciones. **Obs.:** Recordar que la masa que estamos usando no es puntual. Piensen: ¿en qué región conviene tomar más medidas?
4. Para diversos valores de l , mida el período de oscilación con el cronómetro. Tome 10 medidas para cada largo. **Recuerde poner la masa en movimiento con un ángulo inicial que permita considerar pequeñas oscilaciones procurando que el movimiento esté restringido a un plano.** Registre los valores de los períodos y sus incertidumbres en función de la longitud en una tabla de datos.
5. Calcule el promedio de las 10 medidas de período para cada valor de longitud elegida, y las incertidumbres asociadas.

4. Tratamiento de datos

1. Graficar con barras de error el período en función de la amplitud inicial, superponiendo el modelo teórico (Ec (6) o (7)). **Se debe presentar esta gráfica.**
2. A partir de los 10 valores del período de oscilación que fueron tomados para cada largo, se debe obtener el promedio y la incertidumbre. De esta manera se van a obtener distintos pares de valores (T, l) .
3. Realice un cambio de variable adecuado para poder expresar la Ec. (3) como una relación lineal. Grafique. **Se debe presentar esta gráfica.**
4. A través del método de **mínimos cuadrados**, obtenga g con su incertidumbre.
5. Analizar los resultados comparando el valor de g con el esperado. Considere para la discusión qué factores del montaje experimental se apartan del modelo teórico que se está considerando.
6. Graficar $T(l)$ con barras de incertidumbre. Superponer el modelo teórico de la Ec. (3) con el valor de g obtenido en el punto 4. **Se debe presentar esta gráfica.**

Referencias

- [1] Zheng, T.F., Mears, M., Hall, D. and Pushkin, D., "Teaching the nonlinear pendulum", *Phys. Teach.* **32**, 248, 1994.
- [2] Head, J., "Faith in Physics", *Phys. Teach.* **33**, 10, 1995.
- [3] Nelson, R. A. y Olson, M. G., "The pendulum - rich physics from a simple system", *Am. J. Phys.* **54**, 112, 1986.
- [4] Molina, M. L., "Simple linearization of the simple pendulum for any amplitude", *Phys. Teach.* **35**, 489, 1997.