Universidad de la República **Matemática Discreta 1**
Facultad de Ingeniería **Primer semestre de 2025**
Instituto de Matemática y Estadística, Prof. Ing. Rafael Laguardia

PRÁCTICO 1: Inducción completa

Ejercicio 1. Probar de, al menos, dos formas distintas que para todo natural n se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ejercicio 2. Probar que para todo natural n se cumple que

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Ejercicio 3. Probar que para todo entero positivo n existen exactamente 2^n listas binarias de largo n.

Ejercicio 4. Probar que para todo entero n tal que $n \geq 10$ se cumple que $n^2 \geq n+1$.

Ejercicio 5. Probar que existe un entero positivo n_0 tal que para todo entero n que cumple que $n \geq n_0$ se satisface la siguiente desigualdad: $2^n \geq n^2$.

Ejercicio 6. Probar que para todo número natural n se cumple que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 .

Ejercicio 7. Probar que $7^{2024} - 1$ es múltiplo de 6.

Ejercicio 8. Demostrar que a partir de un segmento de longitud 1 en el plano es posible construir para cada entero positivo n un segmento de longitud $\sqrt{n}$ empleando únicamente regla y compás.

Ejercicio 9. Sea n un entero positivo cualquiera. Consideremos un tablero cuadrado compuesto por $2^n \times 2^n$ cuadraditos al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demostrar que es posible cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

Ejercicio 10. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ la sucesión definida por las condiciones iniciales $a_1 = 3$, $a_2 = 10$, $a_3 = 30$ que cumple que $a_{n+3} = 2a_{n+2} + 7a_{n+1} + a_n$ para cada entero positivo n. Probar que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, $a_n \geq 3^n$.

Ejercicio 11. Probar que todo entero positivo n tal que $n \geq 2$ es primo o es producto de dos o más números primos.