Facultad de Ingeniería.
IMERL.
Funciones de variable compleja.
Curso 2025

## **Práctico 1 - Generalidades de números complejos**

1. *a*) Considerando que $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, probar que las funciones $\mathrm{Re}, \mathrm{Im} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $\bar{\cdot} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (es decir la función que a $z$ le asigna $\overline{z}$) son transformaciones lineales y hallar sus matrices asociadas en las bases canónicas.

   *b*) Probar que la función $|\cdot| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (valor absoluto o módulo) no es lineal.

2. *a*) Calcular la parte real e imaginaria de los complejos $\dfrac{1}{a+bi}$, $(a+bi)^2$.

   *b*) Probar que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

   *c*) Probar que $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

   *d*) Probar que $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

   *e*) Probar que $\overline{\overline{z}} = z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. *Sugerencia: recordar el ejercicio 1.a)*

3. Determinar y bosquejar los $z \in \mathbb{C}$ tales que

   *a*) $|z - 1 + i| \leq 4$

   *b*) $|z + 1| \leq 4 - |z - 1|$.

4. Definimos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y)$. Probar que:

   *a*) Si $z$ es real entonces $e^z$ coincide con $e^x$. *Observación: aquí cuando decimos que $z$ es real nos referimos a que* $\mathrm{Im}(z) = 0$

   *b*) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

   *c*) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

   *d*) $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

   *e*) $e^z = 1$ sii $z = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. Si $z \neq 0$, probar que existen $n$ raíces enésimas de $z$ (es decir: probar que la ecuación $w^n = z$ admite exactamente $n$ soluciones distintas) y que ellas son:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right)\right),\ k = 0, 1 \ldots, n-1$$

   siendo $\varphi = \arg z$. Observar que forman un polígono regular centrado en 0.

6. Estudiar las transformaciones $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que se listan a continuación:

   *a*) $U$ es el sector angular con vértice en el origen y comprendido entre el semieje real positivo y la semirrecta recta $y = \tan\left(\frac{2\pi}{n}\right)x, \quad x > 0$, donde $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Es decir, $U$ es el sector angular $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{n}$. La transformación $f$ está definida por

   $$f : U \to \mathbb{C} \text{ tal que } f(z) = z^n \quad \forall\ z \in U.$$

   Mostrar que $f$ es biyectiva. Mostrar que $f(z) = z^n$ no es biyectiva si el dominio de $f$ en vez de ser $U$ es todo el plano complejo $\mathbb{C}$. Hallar la imagen por $f$ de las semirrectas contenidas en $U$ que pasan por el origen y de los arcos de circunferencia $|z| = \text{cte}$, $0 < \theta \leq \frac{2\pi}{n}$.
   Hallar la imagen de las rectas paralelas a los ejes coordenados (estas son $\mathcal{R}e(z) = \text{cte}$ e $\mathcal{I}m(z) = \text{cte}$) para $n = 2, 3, 4$

   *b*)
   $$U_a = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \ \mathrm{Im}(z) < a\},\ f(z) = e^z.$$

   Discutir según $a$ si $f$ es inyectiva. Determinar y graficar la imagen para distintos valores de $a$. Hallar las imágenes de las rectas paralelas a los ejes coordenados. Observar que si $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ es un polinomio con $a_n \neq 0$, entonces $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$. De esto concluir que la función exponencial $f(z) = e^z$ no puede ser un polinomio ni un cociente de dos polinomios $\frac{P(z)}{Q(z)}$.

7. Definimos $f : \mathbb{C} - \{0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \log(z) = \log|z| + iArg(z)$, donde $Arg(z) \in [0, 2\pi)$ y le llamamos logaritmo principal de $z$. ¿Dónde es $f$ continua? Calcular:

   | | | | |
   |---|---|---|---|
   | *a*) | $\log(2 + 3i)$ | *c*) | $\log(-i)$ |
   | *b*) | $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \log(1 + i\varepsilon)$ | *d*) | $\lim_{\varepsilon\to 0^-} \log(1 + i\varepsilon)$ |

   Mostrar que una vez elegida una determinación del argumento, la función logaritmo es continua en todo el plano menos una semirrecta que parte del origen. Probar que $e^{\log z} = z$ $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$.

8. Hallar el error en la siguiente paradoja de J. Bernoulli, donde log denota el logaritmo principal.

   $$(-z)^2 = z^2 \Rightarrow \log\left((-z)^2\right) = \log\left(z^2\right) \Rightarrow 2\log(-z) = 2\log(z) \Rightarrow \log(-z) = \log(z).$$

Una sucesión $z_n = x_n + iy_n$ de complejos se dice que converge a $z = x + iy$ sii $|z_n - z| \to 0$.

9. Probar que $z_n \to z$ si y solo si $x_n \to x$ y $y_n \to y$.

10. **Criterio del mayorante de Weirestrass en espacios de Banach**

    *Definición*: Un espacio de Banach es un par $(V, |\cdot|)$ donde $V$ es un espacio vectorial, $|\cdot| : V \to \mathbb{R}$ es una norma en $V$ y se cumple que todas las sucesiones de Cauchy son convergentes (es decir, $V$ es completo).

    *Teorema*: (Mayorante de Weirestrass)

    Sean $(V, |\cdot|)$ un espacio de Banach, $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $V$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tales que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |v_n| < a_n$ y además $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge.

    Para probar el resultado anterior se sugiere seguir los siguientes pasos

    *a*) Considerar la suma parcial de término $a_n$ y probar que es de Cauchy.

    *b*) Usar lo anterior para probar que la suma parcial de término general $v_n$ es de Cauchy.

    *c*) Concluir.

11. Probar que si $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ también converge. *Sugerencia: usar el ejercicio anterior.*

12. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son abiertos conexos.

    $$\begin{array}{ll} \mathbb{C} - \{0\} & \mathbb{C} - \{z_0, ..., z_n\} \\ \{z : r < |z| < R\} & \mathbb{C} - \mathbb{R} \\ \{z : \mathrm{Re}(z) > 0\} & \{z \neq 0 : \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) > 0\} \\ \{z : \mathrm{Im}(z) > a\} \cup \{z : |z| < 1\} & \end{array}$$

    discutir según $a$.

13. Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(x,y) \; + \; i\,v(x,y)$, donde $x = Re(z),\ y = Im(z),\ u = Re(f),\ v = Im(f)$. Analizar la validez de la siguiente afirmación: $f$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ sii $u$ y $v$ son continuas en $(x_0, y_0)$ como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

14. Dados tres números complejos $a$, $b$ y $c$ de módulo 1 y tales que $a + b + c = 0$ muestre que los mismos (como puntos del plano) forman un triángulo equilátero.

15. Considere un círculo de radio 1 y un polígono regular de $n$-lados inscripto en el mismo.

    *a*) Halle una expresión para el perímetro de dicho polígono. *Sugerencia: podemos suponer que cada vértice es una raíz del polinomio* $z^n - 1$

    *b*) Si $P_n$ es el perímetro del polígono de $n$ lados, calcule el límite $\lim_{n\to\infty} P_n$. *Sugerencia: recordar la expresión del desarrollo de Taylor de la función* $\cos(x)$ *centrada en* $x = 0$.

    *c*) Si $Q_1$, $Q_2$, $\ldots$,$Q_n$ son los vértices del polígono, considere los $n-1$ segmentos $Q_1Q_i$, $i = 2, \ldots, n$ y llamemos $\lambda_i$ a su longitud. Muestre que $\prod\limits_{i=2}^{n} \lambda_i = n$.
    *Sugerencia: desarrollar* $(x^n - 1)/(x - 1)$ *y evaluar en* $x = 1$.