FÍSICA 1

4ª Edicion

Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

CAPÍTULO 6 DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117

CAPÍTULO 7 TRABAJO Y ENERGÍA 149

CAPÍTULO 8 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171

CAPÍTULO 9 SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203

CAPÍTULO 10 COLISIONES 233

CAPÍTULO 11 CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261

CAPÍTULO 12 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277

CAPÍTULO 26 ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 635

APÉNDICES

Física / Robert Resnick ; David Halliday ; Kenneth Krane. 3a. ed. español. México : Compania Editorial Continental, 2001

CAPÍTULO 3

VECTORES

Muchas de las leyes de la física implican no sólo relaciones algebraicas entre cantidades, sino también relaciones geométricas. Por ejemplo, imaginemos una peonza que gira rápidamente alrededor de su eje, mientras que el propio eje de rotación gira lentamente con respecto a la vertical. Esta relación geométrica es complicada para representarla por medio de ecuaciones algebraicas. Sin embargo, si usamos vectores para representar las variables físicas, una sola ecuación es suficiente para explicar el comportamiento. Los vectores permiten esta economía de expresión en numerosas leyes de la física. A veces la forma vectorial de una ley física nos permite ver relaciones o simetrías que de otro modo estarían veladas por una ecuación algebraica engorrosa.

En este capítulo exploraremos alguna de las propiedades y usos de los vectores e introduciremos las operaciones matemáticas en las que intervienen vectores. En el proceso aprenderemos que los símbolos familiares de la aritmética, tales como +, −, y ×, tienen significados diferentes cuando se aplican a los vectores.

3-1 VECTORES Y ESCALARES

Al cambio de posición de una partícula se le llama *desplazamiento*. Si una partícula se mueve de la posición *A* a la posición *B* (Fig. 1*a*), podemos representar su desplazamiento trazando una línea desde *A* hasta *B*. La dirección del desplazamiento puede indicarse poniendo una punta de flecha en *B* para indicar que el desplazamiento fue *desde A hasta B*. La trayectoria de la partícula no necesita ser necesariamente una línea recta de *A* a *B*; la flecha representa sólo el efecto neto del movimiento, no el movimiento real.

En la figura 1*b*, por ejemplo, hemos trazado una trayectoria real seguida por una partícula que va desde *A* hasta *B*. La trayectoria no es la misma que el desplazamiento *AB*. Si fuesemos a tomar instantáneas de la partícula cuando estaba en *A* y, más tarde, cuando estaba en alguna posición intermedia *P*, podríamos obtener el vector *AP* del desplazamiento, que representa el efecto neto del movimiento durante este intervalo, aun cuando no conociéramos la trayectoria real entre esos puntos. Más aún, un desplazamiento tal como *A'B'*, (Fig. 1*a*), que sea paralelo a *AB*, dirigido similarmente, e igual en longitud a *AB*, representa el mismo *cambio* en la posición que *AB*. No

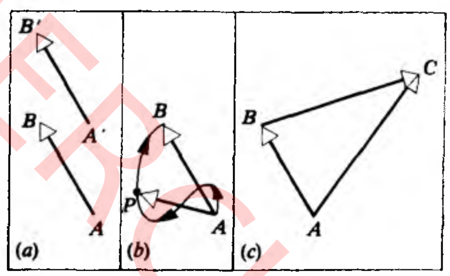

Figura 1 Vectores de desplazamiento. (*a*) Los vectores *AB* y *A'B'* son idénticos, puesto que tienen la misma longitud y apuntan en la misma dirección. (*b*) La *trayectoria* real de la partícula al moverse de *A* a *B* puede ser la curva que se muestra; el *desplazamiento* es el vector *AB*. En el punto intermedio *P*, el desplazamiento es el vector *AP*. (*c*) Después del desplazamiento *AB*, la partícula experimenta otro desplazamiento *BC*. El efecto neto de los dos desplazamientos es el vector *AC*.

hacemos distinción entre estos dos desplazamientos. Un desplazamiento se caracteriza, por lo tanto, por una *longitud* y una *dirección*.

De manera similar, podemos representar un desplazamiento siguiente desde *B* hasta *C* (Fig. 1*c*). El efecto neto de los dos desplazamientos es el mismo que un desplazamiento de A a C. Hablamos entonces de AC como la *suma* o *resultante* de los desplazamientos AB y BC. Nótese que esta suma no es una suma algebraica y que un número solo no puede especificarla en forma única.

Las cantidades que se comportan como desplazamientos se llaman *vectores*. (La palabra *vector* significa *portador* en latín. Los biólogos usan el término *vector* para significar un insecto, un animal u otro agente que *porta* una causa de enfermedad de un organismo a otro.) Los vectores, entonces, son cantidades que tienen tanto magnitud como dirección y que siguen ciertas reglas de combinación, que describiremos a continuación. El vector de desplazamiento es un prototipo conveniente. Algunas otras cantidades físicas que se representan por vectores son: fuerza, velocidad, aceleración, campo eléctrico y campo magnético. Muchas de las leyes de la física pueden ser expresadas en forma compacta por el uso de vectores, y las derivaciones que implican estas leyes a menudo se simplifican notablemente cuando lo hacemos.

Las cantidades que pueden ser especificadas completamente por un número y una unidad y que, por lo tanto, tienen sólo magnitud se llaman *escalares*. Algunas cantidades físicas escalares son: masa, longitud, tiempo, densidad, energía y temperatura. Los escalares pueden ser manipulados por las reglas del álgebra ordinaria.

3-2 SUMA DE VECTORES: MÉTODO GRÁFICO

Para representar un vector en un diagrama trazamos una flecha. Elegimos que la longitud de la flecha sea proporcional a la magnitud del vector (esto es, elegimos una escala), y elegimos que la dirección de la flecha sea la dirección del vector, con la punta indicando el sentido de la dirección. Por ejemplo, un desplazamiento de 42 m en una dirección nordeste estaría representada en una escala de 1 cm por 10 m por una flecha de 4.2 cm de longitud, dibujada en un ángulo de 45° sobre una línea que apunte al este con la punta de flecha en el extremo superior derecho (Fig. 2). El vector se representa usualmente en un texto impreso por un símbolo en negritas, tal como **d**. En la escritura manual ponemos una flecha sobre el símbolo para denotar la cantidad vectorial, tal como $\vec{d}$.

Por lo general, nos interesamos sólo en la magnitud (o longitud) del vector y no en su dirección. La magnitud de **d** se escribe a veces como |**d**|; con mayor frecuencia representamos la magnitud únicamente por el símbolo *d* en itálicas. El símbolo en negritas quiere significar ambas propiedades del vector, magnitud y dirección. En la escritura manual, la magnitud del vector se representa por el símbolo sin la flecha.

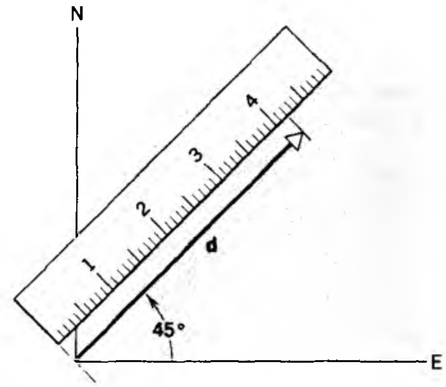

Figura 2 El vector **d** representa un desplazamiento de magnitud 42 m (en una escala en la cual 10 m = 1 cm) en una dirección de 45° al NE.

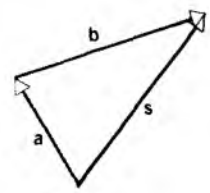

Figura 3 La suma vectorial **a** + **b** = **s**. Compare con la figura 1*c*.

Consideremos ahora la figura 3 en la que hemos redibujado y reetiquetado los fectores de la figura 1*c*. La relación entre estos vectores puede escribirse así:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{s}. \tag{1}$$

Las reglas a seguir al ejecutar esta adición vectorial gráficamente son éstas: (1) En un diagrama dibujado a escala trazar el vector **a** con su dirección propia en el sistema de coordenadas. (2) Dibujar **b** a la misma escala con la cola en la punta de **a**, asegurándose de que **b** tenga su misma dirección propia (por lo general diferente de la dirección de **a**). (3) Dibujar una línea desde la cola de **a** hasta la punta de **b** para construir el vector suma **s**. Si los vectores estuviesen representando desplazamientos, entonces **s** sería un desplazamiento equivalente en longitud y dirección a los desplazamientos sucesivos **a** y **b**. Este procedimiento puede ser generalizado para obtener la suma de cualquier número de vectores.

Puesto que los vectores difieren de los números ordinarios, esperamos reglas diferentes para su manipulación. El símbolo "+" de la ecuación 1 tiene un significado diferente de su significado en aritmética o en álgebra escalar. Nos dice que llevaremos a cabo un juego diferente de operaciones.

Tras una inspección cuidadosa de la figura 4 podemos deducir dos propiedades importantes de la adición de vectores:

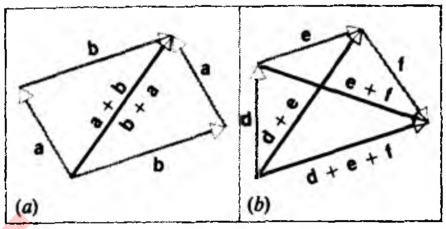

Figura 4 (*a*) La ley conmutativa para la adición vectorial, la cual establece que **a** + **b** = **b** + **a**. (*b*) La ley asociativa, la cual establece que **d** + (**e** + **f**) = (**d** + **e**) + **f**.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \quad \text{(ley conmutativa)} \qquad (2)$$

y

$$\mathbf{d} + (\mathbf{e} + \mathbf{f}) = (\mathbf{d} + \mathbf{e}) + \mathbf{f} \quad \text{(ley asociativa).} \qquad (3)$$

Estas leyes aseguran que no hay diferencia alguna en el orden o agrupamiento en que sumemos los vectores; la suma es la misma. A este respecto, la adición vectorial y la adición escalar siguen las mismas reglas.

Al inspeccionar la figura 4*b* vemos cómo se usa el método gráfico para hallar la suma de más de dos vectores, en este caso **d** + **e** + **f**. Cada vector sucesivo es colocado con su cola en la punta del anterior. El vector que representa a la suma se dibuja después desde la cola del primer vector a la punta del último.

La operación de sustracción (resta) puede ser incluida en nuestra álgebra vectorial definiendo el negativo de un vector como otro vector de igual magnitud pero de dirección opuesta. Así,

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \qquad (4)$$

como se muestra en la figura 5. Aquí -**b** significa un vector con la misma magnitud que **b** pero que apunta en dirección opuesta. Se deduce de la ecuación 4 que **a** - **a** = **a** + (-**a**) = 0,

No olvide que, aunque hemos usado los desplazamientos para ilustrar estas operaciones, las reglas se aplican a *todas* las cantidades vectoriales tales como velocidades y fuerzas.

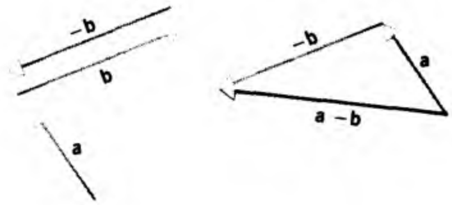

Figura 5 La resta vectorial **a** - **b** = **a** +(-**b**).

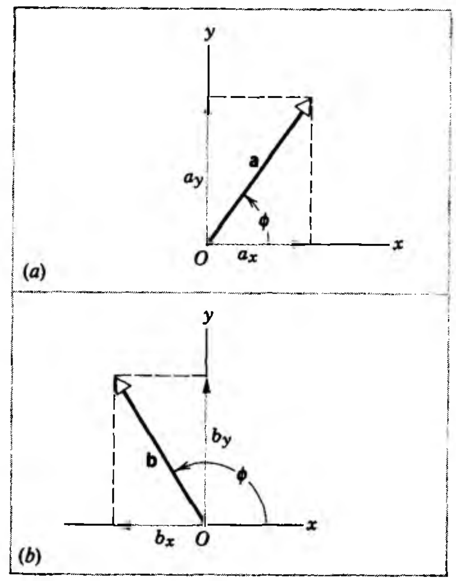

Figura 6 (*a*) El vector **a** tiene una componente a_x en la dirección *x* y una componente a_y en la dirección *y*. (*b*) El vector **b** tiene una componente *x* negativa.

3-3 COMPONENTES DE VECTORES

Aun cuando hemos definido la adición vectorial con el método gráfico, ello no es muy útil para vectores en tres dimensiones. A menudo es hasta inconveniente para el caso bidimensional. Otra manera de sumar vectores es el método analítico, que implica la resolución de un vector en componentes con respecto a un sistema de coordenadas en particular.

La figura 6*a* muestra un vector **a** cuya cola ha sido situada en el origen de un sistema rectangular de coordenadas. Si dibujamos líneas perpendiculares desde la punta de **a** a los ejes, las cantidades a_x y a_y se llaman ***componentes*** (cartesianas) del vector **a**. El proceso se llama ***resolución de un vector en sus componentes***. El vector **a** está especificado en forma única y completa por estas componentes; dadas a_x y a_y podríamos reconstruir inmediatamente el vector **a**.

Las componentes de un vector pueden ser positivas, negativas, o cero. La figura 6*b* muestra un vector **b** que tiene a $b_x < 0$ y a $b_y > 0$.

En la figura 6*a* las componentes a_x y a_y se hallan fácilmente por

$$a_x = a \cos\phi \quad \text{y} \quad a_y = a \,\text{sen}\, \phi, \qquad (5)$$

donde ϕ es el ángulo que el vector **a** forma con el eje *x* positivo. Como se muestra en la figura 6, los signos algebraicos de las componentes de un vector dependen del cuadrante en que se encuentra el ángulo ϕ. Por ejemplo, cuando está entre 90° y 180°, como en la figura 6*b*, el vector siempre tiene una componente x negativa y una componente y positiva. Las componentes de un vector se comportan como cantidades escalares porque, en cualquier sistema de coordenadas en particular, sólo se necesita un número con un signo algebraico para especificarlas.

Una vez que un vector queda resuelto en sus componentes, las componentes mismas pueden utilizarse para especificar al vector. En lugar de los dos números a (magnitud del vector) y ϕ (dirección del vector relativa al eje x), podemos ahora tener los dos números a_x y a_y. Podemos ir y venir entre la descripción de un vector en términos de sus componentes (a_x y a_y) y la descripción equivalente en términos de la magnitud y la dirección (a y ϕ). Para obtener a y ϕ a partir de a_x y a_y, notamos en la figura 6a que

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \tag{6a}$$

y

$$\tan \phi = a_y/a_x. \tag{6b}$$

El cuadrante en que se encuentra ϕ se determina a partir de los signos de a_x y de a_y.

En tres dimensiones el proceso trabaja de manera similar: se dibujan líneas perpendiculares desde la punta de un vector a los tres ejes de coordenadas x, y, y z. La figura 7 muestra la manera como suele dibujarse para reconocer más facilmente a las componentes; la componente (a veces llamada *proyección*) de **a** en el plano xy se dibuja primero, y luego desde su punta podemos hallar las componentes individuales a_x y a_y. Podríamos obtener exactamente las mismas componentes x y y si trabajásemos directamente con el vector **a** en lugar de hacerlo con su proyección xy, pero el dibujo no sería tan claro. De la geometría de la figura 7, podemos deducir que las componentes del vector **a** son

$$a_x = a \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad a_y = a \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad \text{y} \\ a_z = a \cos \theta. \tag{7}$$

Cuando se resuelve un vector en sus componentes conviene a veces introducir un vector de longitud unitaria en una dirección determinada. Conviene también dibujar vectores unitarios a lo largo de los ejes de coordenadas elegidos en particular. En el sistema de coordenadas rectangulares se emplean por lo general los símbolos **i**, **j**, y **k** como vectores unitarios en las direcciones positivas de x, y, y z, respectivamente (véase la Fig. 8). En la notación de escritura manual, los vectores unitarios se usan a menudo con un acento circunflejo o "sombrerillo", como en $\hat{\mathrm{i}}$, $\hat{\mathrm{j}}$, y $\hat{\mathrm{k}}$.

Nótese que **i**, **j**, y **k** no necesitan estar ubicados en el origen. Como todos los vectores, pueden ser trasladados a cualquier lugar en el espacio de las coordenadas en tanto

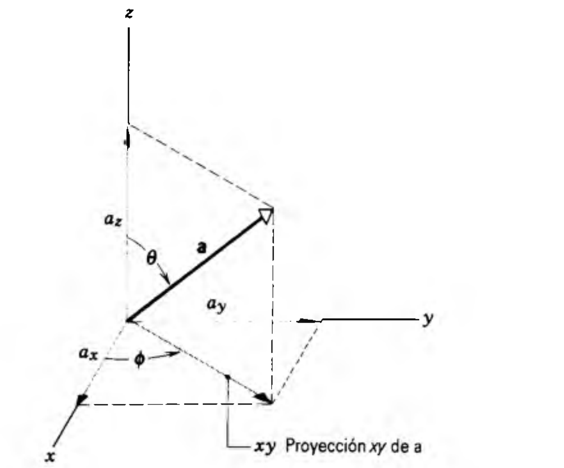

Figura 7 Un vector **a** en tres dimensiones con componentes a_x, a_y, y a_z. Las componentes x y y se hallan convenientemente dibujando primero la proyección xy de **a**. El ángulo θ entre **a** y el eje z se llama *ángulo polar*. El ángulo ϕ en el plano xy entre la proyección de **a** y el eje x se llama *ángulo azimutal*. El ángulo azimutal tiene el mismo significado aquí que en la figura 6.

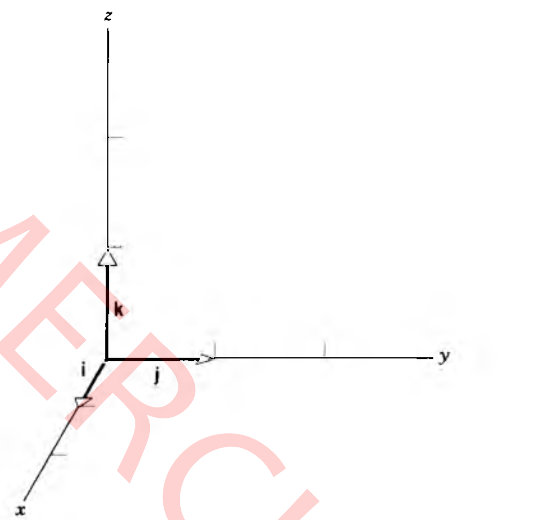

Figura 8 Los vectores unitarios **i**, **j**, y **k** se usan para especificar los ejes x, y, y z, respectivamente. Cada vector carece de dimensión y tiene una longitud de la unidad.

que sus direcciones con respecto a los ejes de coordenadas no sean cambiadas.

En general, un vector **a** en un sistema de coordenadas tridimensional puede escribirse en términos de sus componentes y los vectores unitarios como

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \tag{8a}$$

o en dos dimensiones como

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j}. \tag{8b}$$

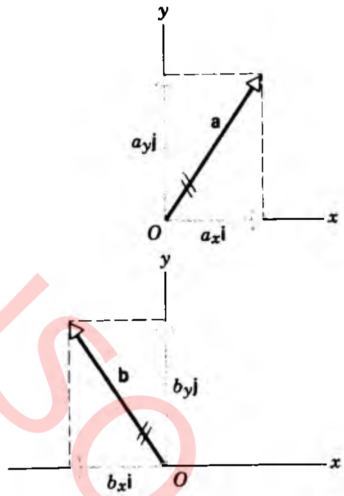

Figura 9 Las componentes *vectoriales* de **a** y de **b**. En cualquier situación física que involucre a vectores, obtenemos el mismo resultado, ya sea que usemos el vector propio, tal como **a**, o sus dos componentes vectoriales, a_x**i** y a_y**j**. El efecto del vector solo **a** es equivalente al efecto neto de los dos vectores a_x**i** y a_y**j**. Cuando se haya reemplazado un vector con sus componentes vectoriales, es útil trazar una línea doble a través del vector original como se muestra; esto ayuda a no considerar ya más al vector original.

La relación vectorial de la ecuación 8*b* es equivalente a las relaciones escalares de la ecuación 6. Cada ecuación relaciona el vector (**a**, o a y ϕ) con sus componentes (a_x y a_y). A veces llamamos a cantidades tales como a_x**i** y a_y**j** de la ecuación 8*b* las *componentes vectoriales* de **a**. La figura 9 muestra los vectores **a** y **b** trazados en términos de sus componentes vectoriales. Muchos problemas físicos en que intervienen vectores pueden ser simplificados reemplazando un vector por sus componentes vectoriales. Esto es, la acción de una cantidad representada como un vector puede ser reemplazada por las acciones de sus componentes vectoriales. Cuando sea necesario, nos referiremos de manera explícita a las ***componentes vectoriales***, mientras que la palabra ***componente*** en sí continúa refiriéndose a las cantidades escalares a_x y a_y.

Otros sistemas de coordenadas *(Opcional)*

Para el análisis de ciertas situaciones físicas pueden ser apropiadas muchas otras variedades de sistemas de coordenadas. Por ejemplo, el sistema de coordenadas bidimensional *xy* puede cambiarse de dos maneras: (1) moviendo el origen a otra ubicación en el plano *xy*, lo cual se llama *traslación* del sistema de coordenadas, o (2) pivoteando los ejes *xy* con respecto al origen fijado, lo cual es una *rotación* del sistema de coordenadas. En ambas operaciones mantenemos al vector fijo y movemos los ejes de coordenadas. La figura 10 muestra el efecto de estos dos cambios. En el caso mostrado en la figura 10*a*, las componentes no han cambiado, pero en el caso mostrado en la figura 10*b* las componentes sí cambian.

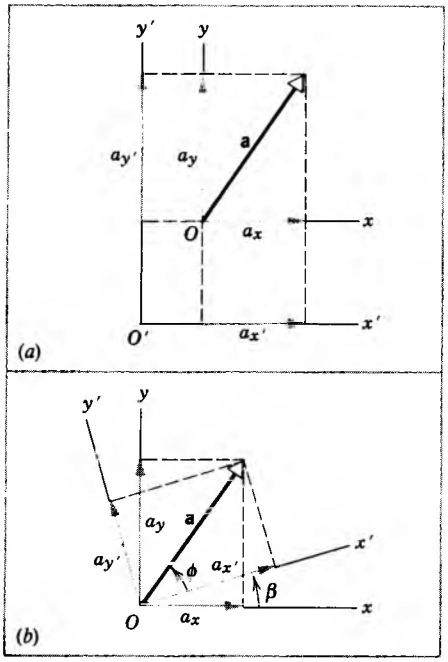

Figura 10 (*a*) El origen *O* del sistema de coordenadas de la Fig. 6*a* se ha movido o *trasladado* a la nueva posición *O'*. Las componentes *x* y *y* de **a** son idénticas a las componentes *x'* y *y'*. (*b*) Los ejes *x* y *y* han sido girados en el ángulo β. Las componentes *x'* y *y'* son diferentes a las componentes *x* y *y* (nótese que la componente *y'* es ahora más pequeña que la componente *x'*, mientras que en la figura 6*a* la componente *y* era más grande que la componente *x*), pero *el vector* **a** *no ha cambiado*. ¿En qué ángulo tendrían que girarse los ejes de coordenadas para hacer que la componente *y'* sea cero?

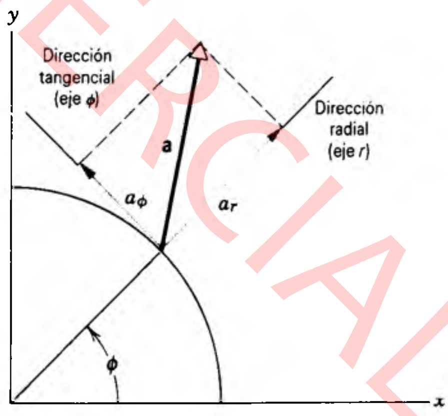

Figura 11 El vector **a** se resuelve en sus componentes radial y tangencial. Estas componentes tendrán aplicaciones importantes cuando hablemos del movimiento circular en los capítulos 4 y 11.

Cuando la situación física que estemos analizando tenga ciertas simetrías, puede ser una ventaja elegir un sistema de coordenadas diferente para resolver un vector en sus componentes. Por ejemplo, podríamos escoger las direcciones radial y tangencial de las coordenadas polares planas, mostradas en la figura 11. En este caso, hallamos las componentes sobre los ejes de coordenadas justamente como lo hicimos en el sistema xyz ordinario: dibujamos una perpendicular desde la punta del vector a cada eje de coordenadas.

Las extensiones tridimensionales de la figura 11 (coordenadas polares esféricas o cilíndricas) son, en muchos casos importantes, muy superiores a los sistemas de coordenadas cartesianas para el análisis de problemas físicos. Por ejemplo, la fuerza de gravitación ejercida por la Tierra sobre objetos distantes tiene la simetría de una esfera, y entonces sus propiedades se describen más sencillamente en coordenadas polares esféricas. La fuerza magnética que ejerce un alambre recto y largo conductor de corriente tiene la simetría de un cilindro y queda, por lo tanto, descrito de manera mucho más sencilla en coordenadas polares cilíndricas. ■

3-4 SUMA DE VECTORES: MÉTODO DE LAS COMPONENTES

Ahora que hemos mostrado cómo resolver vectores en sus componentes, podemos considerar la suma de vectores por un método analítico.

Sea **s** la suma de los vectores **a** y **b**, o

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \tag{9}$$

Si dos vectores, tales como **s** y **a** + **b** han de ser iguales, deben tener la misma magnitud y apuntar en la misma dirección. Esto solamente puede suceder si sus componentes correspondientes son iguales. Recalcamos esta importante conclusión:

Dos vectores son iguales entre sí solamente si sus componentes correspondientes son iguales.

Para los vectores de la ecuación 9, podemos escribir:

$$\begin{aligned} s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} \\ &= (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{10}$$

Igualando las componentes x en ambos lados de la ecuación 10 nos da:

$$s_x = a_x + b_x, \tag{11a}$$

e igualando las componentes y nos da:

$$s_y = a_y + b_y. \tag{11b}$$

Estas dos ecuaciones algebraicas, operadas juntas, son equivalentes a la relación del vector solo de la ecuación 9.

En lugar de especificar las componentes de **s**, podemos dar su longitud y dirección:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \tag{12a}$$

y

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x}. \tag{12b}$$

He aquí la regla para sumar vectores por este método. (1) Resolver cada vector en sus componentes, manteniendo el curso del signo algebraico de cada componente. (2) Sumar las componentes de cada eje de coordenadas, tomando en cuenta el signo algebraico. (3) Las sumas así obtenidas son las componentes del vector suma. Una vez que conozcamos las componentes del vector suma, podemos reconstruir fácilmente a ese vector en el espacio.

La ventaja del método de separar a los vectores en sus componentes, en lugar de sumarlos directamente haciendo uso de relaciones trigonométricas apropiadas, es que siempre tratamos con ángulos rectos y así simplificamos los cálculos.

Al sumar vectores por el método de las componentes, la elección de los ejes de coordenadas determinan qué tan sencillo será el proceso. A veces, las componentes de los vectores con respecto a un juego de ejes en particular son conocidas desde el comienzo, de modo que la elección de los ejes es obvia. Otras veces una elección juiciosa de los ejes puede simplificar en forma considerable el trabajo de resolución de los vectores en sus componentes. Por ejemplo, los ejes pueden ser orientados de modo que cuando menos uno de los vectores sea paralelo a un eje; las componentes de ese vector a lo largo de los otros ejes serán entonces cero.

Problema muestra 1 Un aeroplano viaja 209 km en línea recta formando un ángulo de 22.5° al NE. ¿A qué distancia al norte y a qué distancia al este viajó el aeroplano desde el punto de partida?

Solución Elegimos que la dirección x positiva sea este y que la dirección y positiva sea norte. Enseguida, trazamos un vector de desplazamiento (Fig. 12) desde el origen (punto de partida), formando un ángulo de 22.5° con el eje y (norte) inclinado a lo largo de la dirección x positiva (este). La longitud del vector representa una magnitud de 209 km. Si llamamos a este vector **d**, entonces d_x da la distancia viajada hacia el este del punto de partida y d_y da la distancia viajada hacia el norte del punto de partida. Tendremos que

$$\phi = 90.0° - 22.5° = 67.5°,$$

de modo que (véanse las ecuaciones 5)

$$d_x = d\cos\phi = (209\text{ km})(\cos 67.5°) = 80.0\text{ km},$$

y

$$d_y = d\,\mathrm{sen}\,\phi = (209\text{ km})(\mathrm{sen}\ 67.5°) = 193\text{ km}.$$

En este problema hemos usado componentes cartesianas, aun cuando la superficie de la Tierra es curva y, por lo tanto, no cartesiana. Por ejemplo, un aeroplano que parta del Ecuador y

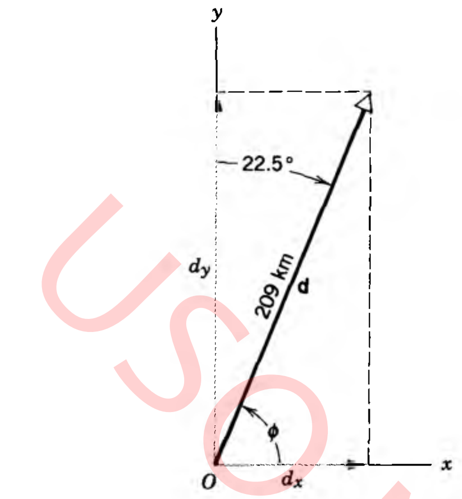

Figura 12 Problema muestra 1.

vuele hacia el noreste eventualmente irá al norte de su punto de partida, lo cual nunca ocurre en un sistema de coordenadas planas. De igual forma, dos aeroplanos que partan de diferentes puntos del Ecuador y vuelen hacia el norte a la misma velocidad a lo largo de trayectorias paralelas eventualmente chocarán en el Polo Norte. Esto también sería imposible en un sistema de coordenadas planas. Si restringimos nuestros cálculos a distancias que sean pequeñas con respecto al radio de la Tierra (6400 km), podemos usar con seguridad el sistema de coordenadas cartesianas para analizar los desplazamientos sobre la superficie de la Tierra.

Problema muestra 2 Un automóvil viaja hacia el este en una carretera a nivel durante 32 km. Después da vuelta hacia el norte en una intersección y viaja 47 km antes de detenerse. Hallar el desplazamiento resultante del automóvil.

Solución Elegimos un sistema de coordenadas fijo con respecto a la Tierra, con la dirección x positiva apuntando hacia el este y la dirección y positiva apuntando hacia el norte. Los dos desplazamientos sucesivos, **a** y **b**, se trazan como se muestra en la figura 13. El desplazamiento resultante **s** se obtiene de **s** = **a** + **b**. Puesto que **b** no tiene componente x y **a** no tiene componente y, obtenemos (véanse las ecuaciones 11)

$$s_x = a_x + b_x = 32\text{ km} + 0 = 32\text{ km},$$
$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47\text{ km} = 47\text{ km}.$$

La magnitud y la dirección de s son, entonces (véanse las ecuaciones 12)

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32\text{ km})^2 + (47\text{ km})^2} = 57\text{ km},$$

$$\tan\phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{47\text{ km}}{32\text{ km}} = 1.47, \qquad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56°.$$

El vector de desplazamiento resultante **s** tiene una magnitud de 57 km y forma un ángulo de 56° al noreste.

Problema muestra 3 Tres vectores coplanares están expresados con respecto a un cierto sistema de coordenadas rectangulares como sigue:

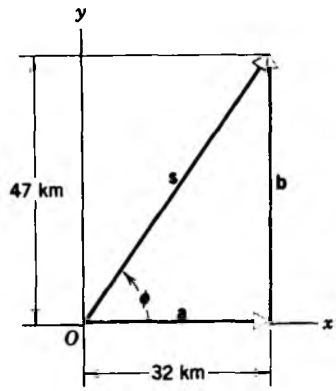

Figura 13 Problema muestra 2.

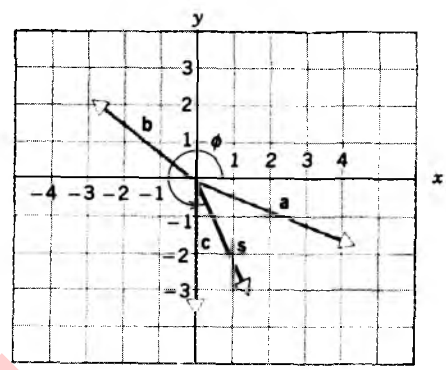

Figura 14 Problema muestra 3.

$$\mathbf{a} = 4.3\mathbf{i} - 1.7\mathbf{j},$$
$$\mathbf{b} = -2.9\mathbf{i} + 2.2\mathbf{j},$$

y

$$\mathbf{c} = -3.6\mathbf{j},$$

donde las componentes están dadas en unidades arbitrarias. Halle el vector **s** que sea la suma de estos vectores.

Solución Generalizando las ecuaciones 11 al caso de tres vectores, tenemos que

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4.3 - 2.9 + 0 = 1.4,$$

y

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1.7 + 2.2 - 3.6 = -3.1.$$

Entonces

$$\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} = 1.4\mathbf{i} - 3.1\mathbf{j}.$$

La figura 14 muestra los cuatro vectores. A partir de las ecuaciones 6 podemos calcular que la magnitud de **s** es 3.4 y que el ángulo ϕ que **s** forma con el eje x positivo, medido en sentido antihorario de ese eje, es

$$\phi = \tan^{-1}(-3.1/1.4) = 294°.$$

La mayoría de las calculadoras de bolsillo dan ángulos entre + 90° y -90° para la tangente del arco. En este caso, -66° (que nos da la calculadora) es equivalente a 294°. Sin embargo, obtendríamos el mismo ángulo si pidiéramos $\tan^{-1}(3.1/-1.4)$, lo cual nos daría un ángulo en el segundo cuadrante (superior izquierdo). Dibujando un diagrama similar a la figura 14 podemos evitar graves equivocaciones y, de ser necesario, puede convertirse el valor de la calculadora en un resultado en el cuadrante correcto usando la identidad $\tan(-\phi) = \tan(180° - \phi)$.

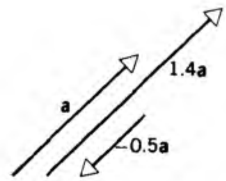

Figura 15 La multiplicación de un vector **a** por un escalar c da un vector c**a** cuya magnitud es c veces la magnitud de **a**. El vector c**a** tendrá la misma dirección de **a** si c es positivo y la dirección opuesta si c es negativo . Los ejemplos ilustrados son para c = +1.4 y c = -0.5.

3-5 MULTIPLICACIÓN DE VECTORES

Cuando sumamos cantidades escalares, los sumandos deben tener las mismas dimensiones, y la suma tendrá igualmente las mismas dimensiones. La misma regla se aplica a la suma de cantidades vectoriales. Por otra parte, podemos multiplicar cantidades escalares de dimensiones diferentes y obtener un producto de dimensiones posiblemente diferentes de cualquiera de las cantidades que han sido multiplicadas, por ejemplo distancia = velocidad × tiempo.

Como con los escalares, los vectores de diferentes clases pueden multiplicarse por otro para generar cantidades de dimensiones físicas nuevas. A causa de que los vectores tienen tanto dirección como magnitud, el vector de multiplicación no puede seguir exactamente las mismas reglas que las reglas algebraicas de la multiplicación escalar. Debemos establecer nuevas reglas de multiplicación para los vectores.

Consideramos útil definir tres clases de operaciones de multiplicación con vectores: (1) multiplicación de un vector por un escalar, (2) multiplicación de dos vectores de modo tal que den por resultado un escalar, y (3) multiplicación de dos vectores de modo tal que den por resultado otro vector. Existen aún otras posibilidades que no consideraremos aquí.

1. *Multiplicación de un vector por un escalar.* La multiplicación de un vector por un escalar tiene un significado sencillo: el producto de un escalar c y un vector **a**, escrito c**a**, se define que es un nuevo vector cuya magnitud es c multiplicado por la magnitud de **a**. El nuevo vector tiene la misma dirección que **a** si c es positivo y la dirección opuesta si c es negativo, como se muestra en la figura 15. Para dividir un vector por un escalar simplemente multiplicamos el vector por el recíproco del escalar. A menudo el escalar no es un número puro sino una cantidad física con dimensiones y unidades.

2. *Multiplicación de dos vectores para dar por resultado un escalar.* El *producto escalar* de dos vectores **a** y **b**, escrito como **a** · **b**, se define como

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi, \tag{13}$$

donde a es la magnitud del vector **a**, b es la magnitud del vector **b**, y cos ϕ es el coseno del ángulo ϕ entre los dos vectores (véase la Fig. 16). A causa de la notación, **a b** se llama también el producto punto de **a** y **b** y se le dice "**a** punto **b**". El producto punto es independiente de la elección de los ejes de coordenadas.

Puesto que a y b son escalares y cos ϕ es un número puro, el producto escalar de dos vectores es un escalar. El producto escalar de dos vectores puede ser visto como el producto de la magnitud de un vector y la componente del otro vector en la dirección del primero, como en la figura 16. El producto escalar puede expresarse en forma correspondiente ya sea como $a(b\cos\phi)$ o como $b(a\cos\phi)$.

Podríamos haber definido que **a** · **b** es cualquier operación, por ejemplo, $a^{1/3}\, b^{1/4} \tan(\phi/2)$, pero resultaría que esto no tiene uso para nosotros en física. Con nuestra definición del producto escalar, un número de cantidades físicas importantes puede ser descrito como el producto escalar de dos vectores. Algunos de ellos son el trabajo mecánico, la energía potencial de gravitación, el potencial eléctrico, la potencia eléctrica y la densidad de la energía electromagnética. Más adelante, definiremos estas cantidades físicas en términos de los productos escalares de dos vectores.

Si dos vectores son perpendiculares, su producto punto se desvanece. Usando la definición del producto punto, podemos derivar las siguientes relaciones para los vectores unitarios cartesianos **i**, **j**, y **k**:

$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = 1,$$
$$\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{i}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = 0. \tag{14}$$

Con estas relaciones, podemos hallar (véase el problema 35) una forma alternativa para el producto punto de dos vectores **a** y **b** en un sistema tridimensional de coordenadas xyz en términos de sus componentes:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{15}$$

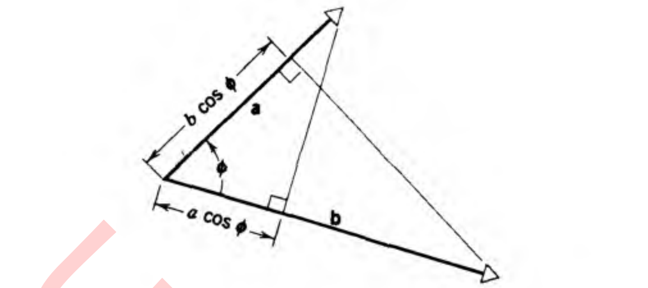

Figura 16 El producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (= $ab \cos \phi$) es el producto de la magnitud de un vector (por ejemplo, a) y la componente del otro vector en la dirección del primero ($b \cos \phi$).

3. *Multiplicación de dos vectores para dar como resultado otro vector.* El *producto vectorial* de dos vectores **a** y **b** se escribe como $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ y es otro vector **c**, donde $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. La *magnitud* de **c** se define como

$$c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen} \phi, \qquad (16)$$

donde ϕ es el ángulo (más pequeño) entre **a** y **b**. Existen dos ángulos diferentes entre **a** y **b**: ϕ como en la figura 16 y $2\pi - \phi$. En la multiplicación vectorial siempre elegimos el más pequeño de estos ángulos. En la ecuación 13 para el producto escalar, no importa cuál escojamos, porque $\cos(2\pi - \phi) = \cos \phi$. Sin embargo, sí importa en la ecuación 16, porque $\operatorname{sen}(2\pi - \phi) = -\operatorname{sen} \phi$.

A causa de la notación, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ se llama siempre el producto cruz de **a** y **b** y nos referimos a él como dice "**a** cruz **b**".

La *dirección* de **c**, el producto vectorial de **a** y **b**, se define como perpendicular al plano formado por **a** y **b**. Para especificar el sentido del vector **c** nos referiremos a la figura 17. Dibujamos los vectores **a** y **b** intersecándose en sus colas, imaginando un eje perpendicular al plano de **a** y **b** a través de su origen. Doblamos hacia adentro ahora los dedos *de la mano derecha* alrededor de este eje y empujamos al vector **a** hacia el vector **b** a través del ángulo más pequeño entre ellos con las puntas de los dedos, manteniendo el pulgar extendido; la dirección del pulgar da entonces la dirección del vector producto $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Este procedimiento describe una convención. Los dos vectores **a** y **b** forman un plano, y existen dos direcciones (opuestas) para un vector **c** que sea perpendicular al plano. Nuestra elección se basa en la convención de la mano derecha. (Una convención de la mano izquierda nos daría la dirección opuesta para el vector producto.)

Si ϕ es 90°, entonces **a**, **b**, y **c** (= $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$) están todos en ángulos rectos entre sí y dan las direcciones de un sistema tridimensional de coordenadas de mano derecha.

Nótese que $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ no es el mismo vector que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, de modo que el orden de los factores es importante en un producto vectorial. Esto no sucede así en el caso de los escalares porque el orden de los factores en álgebra o en aritmética no afecta al producto resultante. En realidad, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, como se muestra en la figura 17. Esto puede deducirse del hecho de que la magnitud $ab \operatorname{sen} \phi$ es igual a la magnitud $ba \operatorname{sen} \phi$, pero la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ es opuesta a la de $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. El producto cruz, como hemos ya definido, es independiente de la elección de los ejes de coordenadas.

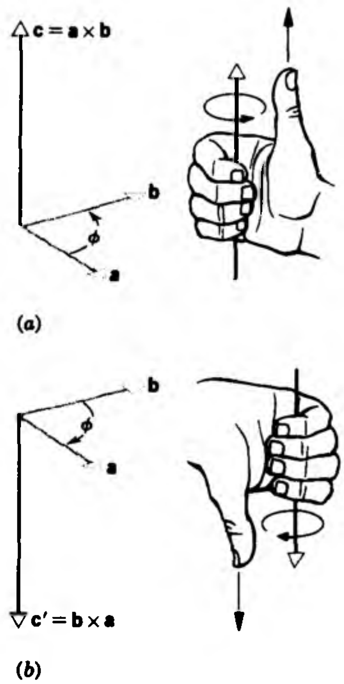

Figura 17 La regla de la mano derecha para los productos vectoriales. (*a*) Girar el vector **a** hacia el vector **b** con los dedos de la mano derecha. El pulgar muestra la dirección de **c**. (*b*) Invirtiendo el procedimiento se demuestra que $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Los tres vectores cartesianos unitarios **i**, **j**, y **k** de un sistema de coordenadas de mano derecha están relacionados por el producto cruz $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$. (Esto, de hecho, define lo que queremos significar por sistema de mano derecha. A menos que se indique lo contrario, usaremos siempre sistemas de coordenadas de mano derecha.) Manteniendo a **i**, **j**, y **k** en el mismo orden *cíclico podemos también* escribir $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ y $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$. Si cambiamos el orden entra un signo menos; por ejemplo, $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. El producto cruz de dos vectores unitarios iguales cualesquiera se desvanece ($\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$), como lo hace el producto cruz de cualquier vector consigo mismo ($\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$). Con estas relaciones para los productos cruz de vectores unitarios iguales o diferentes, podemos demostrar que (véase el problema 36)

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = {} & (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} \\ & + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}. \qquad (17)\end{aligned}$$

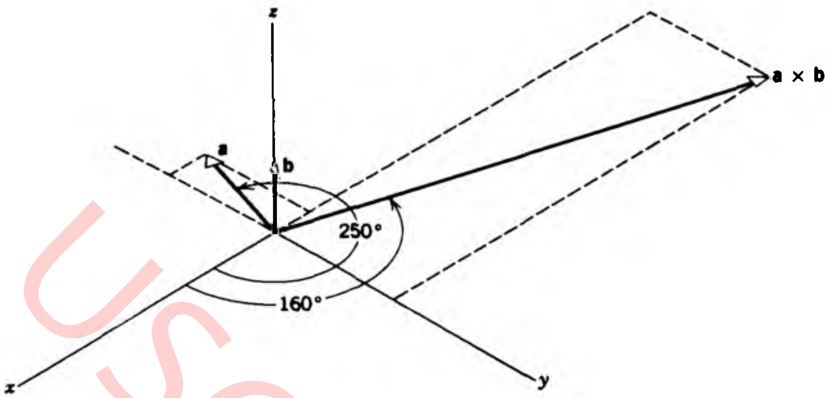

Figura 18 Problema muestra 4.

La razón para definir el producto vectorial de esta manera es que ha demostrado ser muy útil en física. A menudo encontramos cantidades físicas que son vectores cuyo producto, definido como antes, es una cantidad vectorial con un significado físico importante. Algunos ejemplos de cantidades físicas que son productos vectoriales son el momento de torsión o torca, el momento angular, la fuerza sobre una carga que se mueve en un campo magnético, y el flujo de energía electromagnética. Tales cantidades se estudiarán más adelante, y señalaremos su conexión con el vector producto de dos vectores.

Productos generalizados de vectores *(opcional)*
El producto escalar es el producto más sencillo de dos vectores. El orden de la multiplicación no altera el producto. El producto vector es el siguiente caso más sencillo. Aquí el orden de multiplicación sí altera el producto, pero sólo por un factor de menos uno, lo cual implica una dirección inversa. Otros productos de vectores son útiles pero más complicados. Por ejemplo, un *tensor* puede ser generado multiplicando cada una de las tres componentes de un vector por las tres componentes de otro vector. Por lo tanto, el tensor (del segundo rango) tiene nueve números asociados; el vector, tres, y el escalar sólo uno. Algunas cantidades físicas que pueden ser representadas por tensores son el esfuerzo mecánico y eléctrico, la inercia de rotación y la deformación. Existen cantidades físicas todavía más complejas. En este libro, sin embargo, nos ocuparemos solamente de escalares y vectores. ■

Problema muestra 4 Cierto vector **a** en el plano xy está dirigido 250° en el sentido antihorario del eje positivo x y tiene una magnitud de 7.4 unidades. El vector **b** tiene una magnitud de 5.0 unidades y su dirección es paralela al eje z. Calcule (a) el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ y (b) el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Solución (a) A causa de que **a** y **b** son perpendiculares entre sí, el ángulo ϕ entre ellos es 90° y $\cos\phi = \cos 90° = 0$. Por lo tanto, según la ecuación 13, el producto escalar es

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos\phi = ab \cos 90° = (7.4)(5.0)(0) = 0,$$

que coincide con el hecho de que ningún vector tiene una componente en la dirección del otro.

(b) La *magnitud* del vector producto es, según la ecuación 16,

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \operatorname{sen}\phi = (7.4)(5.0)\operatorname{sen} 90° = 37.$$

La *dirección* del vector producto es perpendicular al plano formado por **a** y **b**. Por lo tanto, como se muestra en la figura 18, se halla en el plano xy (perpendicular a **b**) a un ángulo de 250° - 90° = 160° del eje x positivo (perpendicular a **a** de acuerdo con la regla de la mano derecha).

Podemos hallar las componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ usando la ecuación 17. Primero necesitamos las componentes de **a** y de **b**:

$$\begin{aligned} a_x &= 7.4 \cos 250° = -2.5, & b_x &= 0, \\ a_y &= 7.4 \operatorname{sen} 250° = -7.0, & b_y &= 0, \\ a_z &= 0; & b_z &= 5.0. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= [(-7.0)(5.0) - (0)(0)]\mathbf{i} + [(0)(0) - (-2.5)(5.0)]\,\mathbf{j} \\ &\quad + [(-2.5)(0) - (-7.0)(0)]\mathbf{k} \\ &= -35\mathbf{i} + 13\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Lo que corresponde a la magnitud y la dirección mostradas en la figura 18.

3-6 LAS LEYES VECTORIALES EN LA FÍSICA* *(Opcional)*

Refiriéndonos a la figura 10b, podemos demostrar (véase problema 51) que las componentes del vector de desplazamiento **a** del sistema de coordenadas en rotación ($x'y'$) están relacionadas con las del sistema original (xy) según

$$a_{x'} = a_x \cos\beta + a_y \operatorname{sen}\beta \tag{18a}$$

$$a_{y'} = -a_x \operatorname{sen}\beta + a_y \cos\beta, \tag{18b}$$

donde β es el ángulo según el cual han sido rotados los ejes de coordenadas.

Las ecuaciones 18 son ejemplos de ecuaciones de *transformación*, que relacionan las componentes del vector de despla-

* El material de esta sección puede omitirse sin pérdida de la continuidad.

zamiento en un sistema de coordenadas con sus componentes en cualquier sistema de rotación. Podemos usar estas ecuaciones para formular una definición más general y rigurosa del vector, al cual hasta ahora hemos definido como una cantidad física que tiene tanto magnitud como dirección y que obedece a ciertas reglas de combinación. Podemos ahora sustituir aquella definición por otra más específica:

En toda cantidad física (velocidad o fuerza, por ejemplo) que vaya a ser representada por un vector, las componentes de esa cantidad deben transformarse bajo rotación según las reglas dadas en las ecuaciones 18.

Aunque las ecuaciones 18 son válidas para vectores en el espacio bidimensional, pueden ser generalizadas a tres dimensiones. El caso bidimensional, sin embargo, ilustra todos los conceptos esenciales.

Como se indicó en la figura 10, un vector no cambia, o es *invariante*, cuando los ejes de coordenadas son trasladados o rotados. Ciertas cantidades físicas tienen esta misma propiedad; en el caso de la velocidad, por ejemplo, mediríamos el mismo valor para la velocidad de un automóvil que pasa delante de nosotros que lo haría el vecino que vive en la casa que está al otro lado de la calle (¡siempre y cuando ambas casas estén en reposo en relación una con la otra!). Las cantidades que tienen estas propiedades y que obedecen a las leyes de la aritmética vectorial dadas en este capítulo, se representan como vectores. Entre estas cantidades están la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu, el momento angular, y los campos eléctrico y magnético. Las ecuaciones que relacionan estas cantidades son ecuaciones vectoriales; ejemplos de ecuaciones vectoriales son $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = s$ (un escalar), $\mathbf{a} + 2\mathbf{b} = 6\mathbf{c}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, etc. Por otra parte, muchas cantidades físicas están bien descritas por escalares y ecuaciones escalares: temperatura, presión, masa, energía, y tiempo. Una de las características de las ecuaciones vectoriales es que no sólo indican la relación matemática entre cantidades físicas sino también la relación geométrica. Consideremos algunos ejemplos de ecuaciones que desarrollaremos y estudiaremos ampliamente más adelante en este texto; aquí sólo presentamos la ecuaciones como ejemplos de las formas básicas.

Comencemos con la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ (véase el capítulo 5), que da la fuerza $\mathbf{F}$ que debe actuar sobre una partícula de masa m para dotarla de una aceleración $\mathbf{a}$. En el lado derecho tenemos el escalar masa multiplicado por el vector aceleración, y en el lado izquierdo tenemos el vector fuerza. La ecuación parece sencilla, pero es rica en contenido. Llevando a cabo la multiplicación e igualando las componentes, descubrimos en realidad *tres* ecuaciones independientes: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$, y $F_z = ma_z$. Cada una de estas ecuaciones puede ser resuelta por separado al estudiar cómo responde la partícula a la fuerza. Así, la componente y de la fuerza, por ejemplo, no tiene absolutamente ningún efecto sobre las componentes x o z de la aceleración. En forma equivalente, podríamos decir que la dirección de la aceleración de un sistema está determinada por la dirección de la fuerza que actúa sobre él (porque al multiplicar un vector por un escalar positivo da un vector en la misma dirección). Usaremos este hecho en el próximo capítulo cuando analicemos el movimiento bidimensional de proyectiles que se mueven bajo la influencia de la gravedad.

Las leyes que involucran a productos escalares surgen en varios contextos diferentes. Nuestro primer ejemplo viene de la definición del trabajo mecánico W, un escalar, que es efectuado por una fuerza $\mathbf{F}$ que actúa sobre un sistema produciendo un desplazamiento $\mathbf{d}$: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d} = Fd \cos \phi$ (véase el capítulo 7). En este caso, la fuerza no necesita ser precisamente paralela al desplazamiento; imaginemos, por ejemplo, que estamos jalando un trineo a lo largo del terreno con un cable que pasa por nuestro hombro. El desplazamiento sería horizontal, pero la fuerza (que se ejerce a lo largo del cable) tendrá componentes tanto horizontal como vertical. Nótese que de acuerdo con las relaciones geométricas ilustradas en la figura 16, sólo la componente de $\mathbf{F}$ a lo largo de $\mathbf{d}$ (que es $F \cos \phi$) contribuirá al trabajo efectuado realmente. Una vez más, la ecuación del vector conlleva información acerca de una relación geométrica.

Un ejemplo de una ley física que involucra a un producto vectorial puede consistir en la ecuación $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ (véase el capítulo 34), la cual da la fuerza $\mathbf{F}$ experimentada por una carga eléctrica q al moverse con velocidad $\mathbf{v}$ a través de un campo magnético $\mathbf{B}$. La naturaleza geométrica de la fuerza, determinada por la ecuación vectorial, es responsable de que las trayectorias de las partículas pasen a ser órbitas circulares, como en los grandes aceleradores de partículas, como los ciclotrones. Nótese que la fuerza está siempre en ángulo recto tanto con la velocidad como con la dirección del campo magnético. Sin la ecuación vectorial tendríamos dificultad para entender la base de este comportamiento.

Las leyes físicas que están representadas por ecuaciones vectoriales son universales e independientes de cualquier elección particular del sistema de coordenadas. Específicamente, si fuésemos a examinar el movimiento de una partícula cargada en un campo magnético a partir de dos sistemas de coordenadas, uno de los cuales estuviese rotado con respecto al otro, hallaríamos ciertamente que los vectores $\mathbf{F}$ (fuerza), $\mathbf{v}$ (velocidad), y $\mathbf{B}$ (campo magnético) tienen componentes diferentes en el sistema rotado (como en la Fig. 10*b*), pero los observadores en ambos sistemas estarían de acuerdo en la forma de la ley física. Esto es, en el sistema rotado los vectores transformados deben satisfacer $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$.

Esta propiedad de transformación es una de las maneras de comportamiento inteligente de la naturaleza; de esas que solemos dar por hecho, porque pensamos que la naturaleza *debe* comportarse así. Con la excepción de los efectos puramente locales, por ejemplo: la fuerza eléctrica entre dos electrones separados por cierta distancia *no debería* depender de si la separación se midió de norte a sur o de este a oeste. No es demasiado difícil imaginar un universo que no se comporte tan bien; la longitud de un vector, por ejemplo, podría cambiar cuando lo trasladamos o lo hacemos rotar. Los físicos y los matemáticos han especulado sobre por qué nuestro universo tiene estas simetrías particulares, tales como la traslación y la rotación, y han aprendido que existen relaciones fascinantes entre las simetrías de la naturaleza y ciertas cantidades que se *conservan* (esto es, su magnitud total no cambia) en los procesos físicos. Por ejemplo, la invariancia de las leyes físicas bajo la simetría de la *traslación en el tiempo* (esto es, si una ley sirve para los lunes también sirve para los martes) conduce directamente a la ley de la conservación de la energía.

Simetría de reflexión, vectores polares, y vectores axiales

Existe otra clase de transformación que es bastante diferente de la traslación y de la rotación. Esta transformación implica invertir el sistema de coordenadas, esto es, $x \to -x$, $y \to -y$, y $z \to -z$. En efecto, todo el sistema se refleja a través del origen.

Superficialmente, podríamos esperar que, para esta transformación, todo lo que tendríamos que hacer en nuestras ecuaciones es reemplazar cada componente de un vector por su negativo. (Los escalares no se ven afectados por esta inversión.)

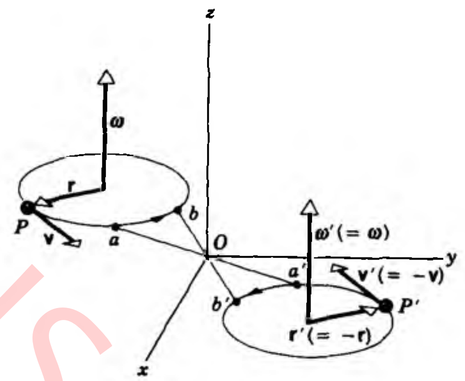

Figura 19 Una partícula P moviéndose en círculo es representada por el vector de la velocidad angular ω. Si todas las coordenadas se reflejan respecto al origen O, la partícula "reflejada" P' gira en un círculo y está representada por el vector de la velocidad angular ω'.

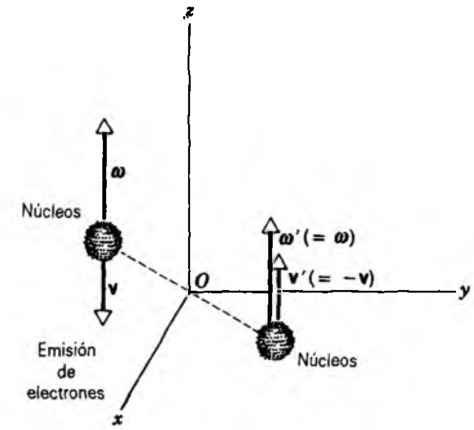

Figura 20 Un grupo de núcleos girando, representado por un vector de velocidad angular ω, emite electrones preferentemente en dirección opuesta a ω. En la versión reflejada del experimento, los electrones se emitirán paralelos a ω'. El experimento y su imagen reflejada se ven bastante diferentes entre sí, mostrando que la simetría de la reflexión se viola por estas desintegraciones.

Después de todo, si invertimos el eje x sin cambiar el vector **a**, entonces, claramente $a_x \rightarrow -a_x$. Así, en lugar de dibujar un sistema de coordenadas invertido, lo que necesitamos hacer es trazar el vector **−a** en el sistema de coordenadas original. Estas imposiciones son del todo correctas para una clase grande de cantidades físicas que representamos con vectores: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu lineal, el campo eléctrico. A tales vectores "bien comportados" se les da el nombre genérico de *vectores polares*.

Otra clase de vectores no sigue este tipo de comportamiento bajo la inversión. Por ejemplo, como se ilustra en la figura 19, a menudo es útil representar a una partícula que se mueve en círculo por un vector ω de *velocidad angular*. La magnitud de ω dice en efecto lo rápido que está girando la partícula, y la dirección de ω es perpendicular al plano del círculo determinado por la regla de la mano derecha. (Si doblamos hacia adentro los dedos de la mano derecha en dirección del movimiento de la partícula, el pulgar extendido apunta en la dirección de ω.)

Consideremos ahora la situación cuando la órbita de la partícula se invierte o se refleja a través del origen, como en la figura 19. El vector **r** que ubica a la partícula P en relación con el centro del círculo se transforma a $\mathbf{r}' = -\mathbf{r}$, y la velocidad se convierte en $\mathbf{v}' = -\mathbf{v}$. Cuando la partícula original se mueve de a a b, la partícula reflejada se mueve de a' a b'. El sentido o dirección de la rotación (ya sea en sentido de las manecillas del reloj o en sentido antihorario) no cambia, y así $\omega' = \omega$. Entonces, a diferencia de los vectores polares **r** y **v**, la velocidad angular *no cambia* de signo cuando las coordenadas se han invertido. A tal vector se le llama *axial* o *seudovector*; la torca y el campo magnético son otros ejemplos de éste.

Los vectores **r**, **v**, y ω se relacionan por el producto cruz $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, tema que estudiaremos cuando consideremos el movimiento de rotación en el capítulo 11. Si los tres vectores cambian de signo en la inversión, entonces las relaciones entre los vectores reflejados serían $-\mathbf{v} = (-\omega) \times -(\mathbf{r}) = \omega \times \mathbf{r}$. Esto es una contradicción, ya que $\omega \times \mathbf{r}$ no puede ser $-\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}$ a la vez (a no ser que **v** sea cero, lo cual no es el caso aquí). Así, la transformación $\omega' = \omega$ es absolutamente necesaria, con objeto de que la relación física $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ tenga la misma forma $\mathbf{v}' = \omega' \times \mathbf{r}'$ en el sistema reflejado. Esto es lo que significa la invariancia de una ley física frente a una cierta transformación del sistema de coordenadas. Esto es, si escribimos una ecuación para una ley física en un sistema de coordenadas, transformamos cada vector correspondiente a las coordenadas transformadas, y sustituimos los vectores transformados en la ley física, el resultado sería una ecuación de forma idéntica a la original.

Hasta alrededor de 1956, se creía que todas las leyes físicas no sufrían cambios por inversiones como la de la figura 19 (ni tampoco por rotaciones o por traslaciones). Sin embargo, en 1956 se descubrió que la simetría de la inversión se violaba en cierto tipo de desintegraciones radiactivas llamadas desintegraciones beta, en las cuales son emitidos electrones por el núcleo atómico. Los núcleos giran en sus ejes como pequeños trompos (o peonzas), y es posible asignar a cada núcleo un vector como ω que represente su rotación. En el experimento de desintegración beta, se estudió la dirección de la emisión de electrones con relación a la dirección de ω (Fig. 20). Si se emitían números iguales de electrones paralelos a ω y antiparalelos a ω, entonces el experimento de reflexión se vería exactamente como el original y la simetría de la inversión sería válida. Se descubrió que casi todos los electrones eran emitidos en oposición a ω, de modo que en el experimento de reflexión se emitirían más electrones a lo largo de ω (porque **v** cambia de signo en la reflexión, mientras que ω no cambia). El experimento difiere de la imagen de un espejo; se encontró que la simetría de la inversión y la ley de conservación asociada llamada *conservación de la paridad* no eran válidas en este caso.*

Este experimento comenzó a revolucionar nuestro pensamiento con respecto a los procesos fundamentales, y proporcionó una clave esencial con respecto a la naturaleza de la ley física que es responsable del proceso de desintegración beta, una de las cuatro fuerzas básicas. Fue el preludio de una serie de experimentos que han revelado otras relaciones entre las propiedades de la transformación, los principios de la invariancia, y las simetrías. ■

* Véase *the New Ambidextrous Universe*, por Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).

PREGUNTAS

1. En 1969, tres astronautas del Apolo salieron de Cabo Cañaveral, fueron a la Luna y regresaron, cayendo en el agua en un lugar de acuatizaje elegido en el océano Pacífico; véase la figura 21. Un almirante les dio el adiós en la base y luego zarpó al océano Pacífico en un portaviones para recogerlos. Compare los desplazamientos de los astronautas y del almirante.

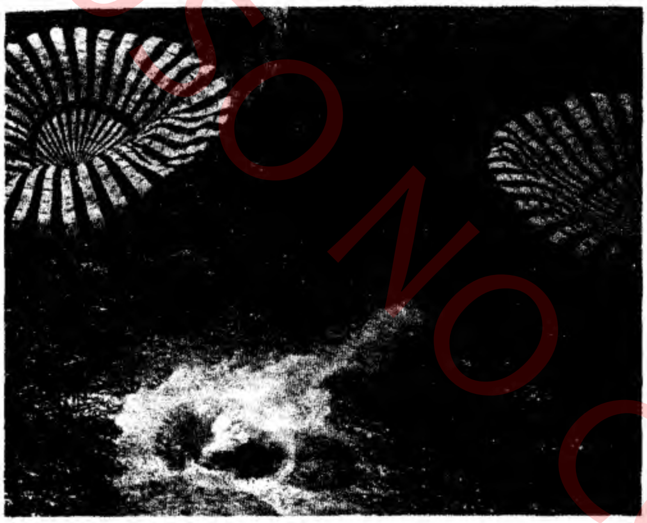

Figura 21 Pregunta 1.

2. Un perro corre 100 m hacia el sur, 100 m hacia el este, y 100 m al norte, terminando en el punto de arranque, por lo que su desplazamiento de todo el viaje es igual a cero. ¿Dónde está su punto de arranque? Una respuesta clara es que en el Polo Norte; pero hay otra solución, localizada cerca del Polo Sur. Descríbala.
3. ¿Pueden combinarse dos vectores que tengan diferentes magnitudes para dar una resultante de cero? ¿Y tres vectores?
4. ¿Puede tener un vector una magnitud cero si una de sus componentes no es cero?
5. ¿Puede ser la suma de las magnitudes de dos vectores alguna vez igual a la magnitud de la suma de estos dos vectores?
6. ¿Puede ser la magnitud de la diferencia entre dos vectores alguna vez mayor que la magnitud de cualquiera de ellos? ¿Puede ser mayor que la magnitud de su suma? Dé ejemplos.
7. Supongamos que $\mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2$. ¿Significa esto que debemos tener ya sea $d \geq d_1$, o $d \geq d_2$? Si no, explique por qué.
8. Si tres vectores se suman para ser cero, deben estar todos en el mismo plano. Haga que esto parezca razonable.
9. ¿Tienen unidades los vectores unitarios **i**, **j**, y **k**?
10. Explique en qué sentido una ecuación vectorial contiene más información que una cantidad escalar.
11. Nombre varias cantidades escalares. ¿Depende el valor de una cantidad escalar del sistema de coordenadas elegido?
12. Usted puede ordenar acontecimientos en el tiempo. Por ejemplo, el suceso *b* debe preceder al suceso *c* pero seguir del *a*, dándonos un orden de tiempo de los acontecimientos *a*, *b*, *c*. Por lo tanto, existe un sentido del tiempo, distinguiendo el pasado, el presente, y el futuro. ¿Es el tiempo, por lo tanto, un vector? Si no, ¿por qué no?
13. Se aplican las leyes conmutativa y asociativa a la resta de vectores?
14. ¿Puede ser un producto escalar una cantidad negativa?
15. (*a*) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, ¿se deduce que **a** y **b** son perpendiculares entre sí? (*b*) Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, ¿se deduce que $\mathbf{b} = \mathbf{c}$?
16. Si $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, ¿deben **a** y **b** ser paralelos entre sí? ¿Es verdad lo recíproco?
17. Un vector **a** yace paralelo al eje de rotación de la Tierra, apuntando de sur a norte. Un segundo vector **b** apunta verticalmente hacia arriba hacia donde usted se encuentra. ¿Cuál es la dirección del vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$? ¿En qué lugares de la superficie de la Tierra es la magnitud $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ un máximo? ¿Y un mínimo?
18. ¿Debe usted especificar un sistema de coordenadas cuando (*a*) suma dos vectores, (*b*) forma su producto escalar, (*c*) forma su producto vectorial, o (*d*) halla sus componentes?
19. (*a*) Demuestre que si todas las componentes de un vector invierten su dirección, entonces el propio vector invierte su dirección. (*b*) Demuestre que si las componentes de los dos vectores que forman un vector producto se invierten, entonces el vector producto no cambia. (*c*) ¿Es un vector producto, entonces, un vector?
20. Hemos estudiado la adición, la resta y la multiplicación de vectores. ¿Por qué supone usted que no hemos estudiado la división de vectores? ¿Es posible definir tal operación?
21. ¿Es convencional usar, como lo hicimos, la regla de la mano derecha en el álgebra vectorial? ¿Qué cambios se requerirían si se adoptase en su lugar una convención de la mano izquierda?
22. (*a*) Convénzase usted mismo de que el producto vectorial de dos vectores polares es un vector axial. (*b*) ¿Cuál es el producto vectorial de un vector polar por un vector axial?

PROBLEMAS

Sección 3-2 Suma de vectores: método gráfico

1. Considere dos desplazamientos, uno de magnitud 3 m y otro de magnitud 4 m. Muestre cómo pueden combinarse los vectores de desplazamiento para obtener un desplazamiento resultante de magnitud (*a*) 7 m, (*b*) 1 m, y (*c*) 5 m.

2. ¿Cuáles son las propiedades de dos vectores **a** y **b** tales que (*a*) **a** + **b** = **c** y $a + b = c$; (*b*) **a** + **b** = **a** − **b**; (*c*) **a** + **b** = **c** y $a^2 + b^2 = c^2$?
3. Una mujer camina 250 m en dirección 35° NE, y luego 170 m hacia el este. (*a*) Usando métodos gráficos, halle su desplazamiento final a partir del punto de arranque. (*b*) Compare la magnitud de su desplazamiento con la distancia que recorrió.
4. Una persona camina con el siguiente esquema: 3.1 km norte, luego 2.4 km oeste, y finalmente 5.2 km sur. (*a*) Construya el diagrama vectorial que representa a este movimiento. (*b*) ¿Qué tan lejos y en qué dirección volaría un pájaro en línea recta para llegar al mismo punto final?
5. Se suman dos vectores **a** y **b**. Muestre gráficamente con diagramas vectoriales que la magnitud de la resultante no puede ser mayor que $a + b$ ni menor que $|a - b|$, donde las barras verticales significan un valor absoluto.
6. Un automóvil recorre hacia el este una distancia de 54 km, luego al norte 32 km y luego en dirección 28° NE durante 27 km. Dibuje el diagrama vectorial y determine el desplazamiento total del automóvil desde el punto de arranque.
7. El vector **a** tiene una magnitud de 5.2 unidades y está dirigido hacia el este. El vector **b** tiene una magnitud de 4.3 unidades y está dirigido 35° NO. Construyendo los diagramas vectoriales, halle las magnitudes y direcciones de (*a*) **a** + **b**, y (*b*) **a** − **b**.
8. Un golfista ejecuta tres golpes para meter la bola en el hoyo cuando está en el green. El primer golpe desplaza a la bola 12 ft N, el segundo 6 ft SE, y el tercero 3 ft SO. ¿Qué desplazamiento se necesitaría para meter la bola en el hoyo al primer golpe? Trace el diagrama vectorial.
9. Hay un robo en un banco del centro de Boston (véase el mapa de la Fig. 22). Para eludir a la policía, los ladrones escapan en un helicóptero, haciendo tres vuelos sucesivos descritos por los desplazamientos siguientes: 20 mi, 45° SE; 33 mi, 26° al NO; 16 mi, 18° SE. Al final del tercer vuelo son capturados. ¿En qué ciudad fueron aprehendidos? (Use el método gráfico para sumar estos desplazamientos en el mapa.)

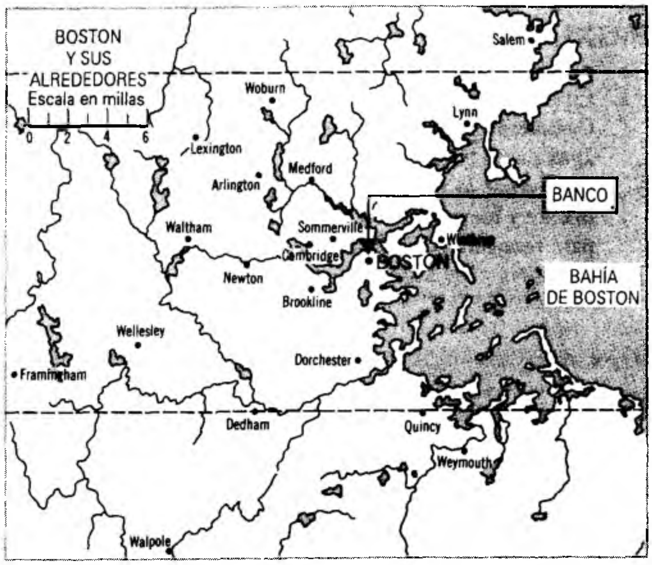

Figura 22 Problema 9.

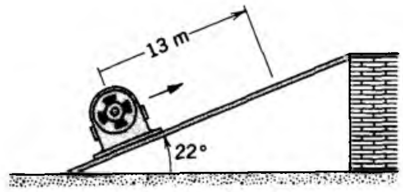

Figura 23 Problema 11.

Sección 3-3 Componentes de vectores

10. (*a*) ¿Cuáles son las componentes de un vector **a** en el plano *xy* si su dirección es 252° a antihorario del eje *x* positivo y su magnitud es de 7.34 unidades? (*b*) La componente *x* de cierto vector es de −25 unidades y la componente *y* es de +43 unidades. ¿Cuál es la magnitud del vector y el ángulo entre su dirección y el eje *x* positivo?
11. Una pieza pesada de maquinaria es elevada y deslizada a lo largo de 13 m en un plano inclinado orientado a 22° de la horizontal, como se muestra en la figura 23. (*a*) ¿A qué altura de su posición original es levantada? (*b*) ¿A qué distancia se movió horizontalmente?
12. La manecilla minutera de un reloj de pared mide 11.3 cm del eje a la punta. ¿Cuál es el vector del desplazamiento de su punta (*a*) desde un cuarto de hora hasta la media hora, (*b*) en la siguiente media hora, y (*c*) en la siguiente hora?
13. Una persona desea llegar a un punto que está a 3.42 km de su ubicación actual y en una dirección de 35.0° NE. Sin embargo, debe caminar a lo largo de calles que van ya sea de norte a sur o de este a oeste. ¿Cuál es la distancia mínima que podría caminar para llegar a su destino?
14. Un barco se dispone a zarpar hacia un punto situado a 124 km al norte. Una tormenta inesperada empuja al barco hasta un punto a 72.6 km al norte y 31.4 km al este de su punto de arranque. ¿Qué distancia, y en qué dirección, debe ahora navegar para llegar a su destino original?
15. Las *fallas* de las rocas son roturas a lo largo de las cuales se han movido las caras opuestas de la masa rocosa, paralelas a la superficie de fractura. Este movimiento está a menudo acompañado de terremotos. En la figura 24 los puntos *A* y *B* coincidían antes de la falla. La componente del desplazamiento neto *AB* paralela a una línea horizontal en la superficie de la falla se llama *salto de la dislocación* (*AC*). La componente del desplazamiento neto a lo largo de la línea con mayor pendiente del plano de la falla es la *brecha de la dislocación* (*AD*). (*a*) ¿Cuál es la desviación neta si el salto de la dislocación es de 22 m y la brecha de la dislocación es de 17 m? (*b*) Si el plano de la falla está inclinado a 52° de la horizontal, ¿cuál es el desplazamiento *vertical* neto de *B* como resultado de la falla en (*a*)?
16. Una rueda de radio de 45 cm gira sin resbalamiento a lo largo de un piso horizontal, como se muestra en la figura 25. *P* es un punto pintado sobre la llanta de la rueda. En

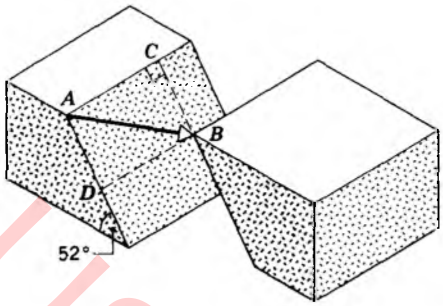

Figura 24 Problema 15.

el tiempo t_1, *P* está en el punto de contacto entre la rueda y el piso. En un tiempo t_2 posterior, la rueda ha rodado a la mitad de una vuelta. ¿Cuál es el desplazamiento de *P* durante el intervalo?

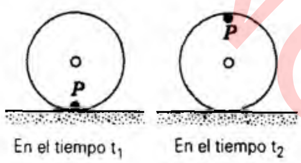

Figura 25 Problema 16.

17. Una habitación tiene las dimensiones de 10 ft × 12 ft × 14 ft. Una mosca que sale de una esquina termina su vuelo en la esquina diametralmente opuesta. (*a*) Halle el vector del desplazamiento en un marco con los ejes de coordenadas paralelos a las aristas de la habitación. (*b*) ¿Cuál es la magnitud del desplazamiento? (*c*) ¿Podría la longitud de la trayectoria viajada por la mosca ser menor que esta distancia? ¿Mayor que esta distancia? ¿Igual a esta distancia? (*d*) Si la mosca caminara en lugar de volar, ¿cuál sería la longitud de la trayectoria más corta que puede recorrer?

Sección 3-4 Suma de vectores: método de las componentes

18. (*a*) ¿Cuál es la suma, en la notación del vector unitario, de los dos vectores **a** = 5**i** + 3**j** y **b** = −3**i** + 2**j**? (*b*) ¿Cuáles son la magnitud y la dirección de **a** + **b**?

19. Dos vectores están dados por **a** = 4**i** − 3**j** + **k** y **b** = −**i** + **j** + 4**k**. Halle (*a*) **a** + **b**, (*b*) **a** − **b**, y (*c*) un vector **c** tal que **a** − **b** + **c** = 0.

20. Dados dos vectores, **a** = 4**i** − 3**j** y **b** = 6**i** + 8**j**, halle las magnitudes y direcciones (con el eje +*x*) de (*a*) **a**, (*b*) **b**, (*c*) **a** + **b**, (*d*) **b** − **a**, y (*e*) **a** − **b**.

21. (*a*) Un hombre sale de la puerta frontal, camina 1400 m E, 2100 m N, y luego saca un centavo de su bolsillo y lo suelta desde un acantilado de 48 m de altura. En un sistema de coordenadas en el cual los ejes *x*, *y*, y *z* positivos apunten al este, al norte, y hacia arriba, estando el origen en la ubicación del centavo según el hombre sale de su puerta frontal, escriba una expresión, usando vectores unitarios, para el desplazamiento del centavo. (*b*) El hombre regresa a su puerta frontal, siguiendo una trayectoria diferente en el viaje de regreso. ¿Cuál es su desplazamiento resultante para el viaje redondo?

22. Una partícula experimenta tres desplazamientos sucesivos en un plano, como sigue: 4.13 m SO, 5.26 m E, y 5.94 m en una dirección de 64.0° NE. Elija el eje *x* apuntando al este y el eje *y* apuntando hacia el norte, y halle (*a*) las componentes de cada desplazamiento, (*b*) las componentes del desplazamiento resultante, (*c*) la magnitud y la dirección del desplazamiento resultante, y (*d*) el desplazamiento que se requeriría para traer de nuevo a la partícula hasta el punto del arranque.

23. Dos vectores **a** y **b** tienen magnitudes iguales de 12.7 unidades. Están orientados como se muestra en la figura 26 y su vector suma es **r**. Halle (*a*) las componentes *x* y *y* de **r**, (*b*) la magnitud de **r**, y (*c*) el ángulo que forma **r** con el eje +*x*.

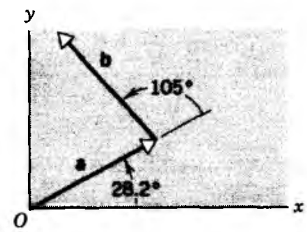

Figura 26 Problema 23.

24. Una estación de radar detecta a un cohete que se aproxima desde el este. En el primer contacto, la distancia al cohete es de 12,000 ft a 40.0° sobre el horizonte. El cohete es rastreado durante otros 123° en el plano este-oeste, siendo la distancia del contacto final de 25,800 ft (véase la Fig. 27). Halle el desplazamiento del cohete durante el periodo de contacto del radar.

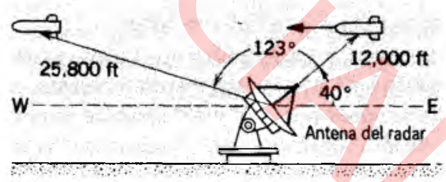

Figura 27 Problema 24.

25. Dos vectores de magnitudes *a* y *b* forman un ángulo θ entre sí cuando son situados cola con cola. Pruebe, tomando componentes a lo largo de dos ejes perpendiculares, que la magnitud de su suma es

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}.$$

26. Pruebe que dos vectores deben tener magnitudes iguales si su suma es perpendicular a su diferencia.

27. (*a*) Usando vectores unitarios a lo largo de tres aristas de un cubo, exprese las diagonales (las líneas de una esquina a otra a través del centro del cubo) de un cubo en términos de sus aristas, las cuales tienen una longitud a. (*b*) Determine los ángulos formados por las diagonales con las aristas adyacentes. (*c*) Determine la longitud de las diagonales.

28. Un turista vuela de Washington, DC a Manila. (*a*) Describa el vector de desplazamiento. (*b*) ¿Cuál es su magnitud? La latitud y la longitud de las dos ciudades es de 39° N, 77° O y 15° N, 121° E. (*Sugerencia:* véase la Fig. 7 y las Ecs. 7. Haga que el eje z esté a lo largo del eje de rotación de la Tierra, de modo que θ = 90° - latitud y ϕ = longitud. El radio de la Tierra es de 6370 km.)

29. Sea N un entero mayor que 1; entonces

$$\cos 0 + \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \cdots + \cos(N-1)\frac{2\pi}{N} = 0;$$

esto es,

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

También

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \operatorname{sen} \frac{2\pi n}{N} = 0.$$

Pruebe estos dos planteamientos considerando la suma de N vectores de igual longitud, formando cada vector un ángulo de $2\pi/N$ con el precedente.

Sección 3-5 Multiplicación de vectores

30. Un vector **d** tiene una magnitud de 2.6 m y apunta hacia el norte. ¿Cuáles son las magnitudes y las direcciones de los vectores (*a*) -**d**, (*b*) **d**/2.0, (*c*) -2.5**d**, y (*d*) 5.0**d**?

31. Demuestre para cualquier vector **a** que (*a*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ y (*b*) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

32. Un vector **a** de 12 unidades de magnitud y otro vector **b** de 5.8 unidades de magnitud apuntan en direcciones que difieren en 55°. Halle (*a*) el producto escalar de los dos vectores y (*b*) el producto vectorial.

33. Dos vectores, **r** y **s**, se hallan en el plano xy. Sus magnitudes son 4.5 y 7.3 unidades, respectivamente, mientras que sus direcciones son 320° y 85° medidas en sentido antihorario desde el eje x positivo. ¿Cuáles son los valores de (*a*) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$ y (*b*) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}$?

34. Halle (*a*) "norte" cruz "oeste", (*b*) "abajo" punto "sur", (*c*) "este" cruz "arriba", (*d*) "oeste" punto "oeste", y (*e*) "sur" cruz "sur". Haga que cada vector tenga una magnitud unitaria.

35. Dados dos vectores, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, demuestre que el producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ está dado en términos de las componentes por la ecuación 15.

36. Dados dos vectores, $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$, Pruebe que el producto vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ está dado en términos de las componentes por la ecuación 17.

37. Demuestre que $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ puede ser expresada por un determinante de 3 × 3 tal como

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

38. Use las ecuaciones 13 y 15 para calcular el ángulo entre los dos vectores $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ y $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

39. Tres vectores están dados por $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Halle (*a*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, (*b*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, y (*c*) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

40. (*a*) Calcule $\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = 5\mathbf{i}\ 4\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, y $\mathbf{c} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. (*b*) Calcule el ángulo entre **r** y el eje $+z$. (*c*) Halle el ángulo entre **a** y **b**.

41. Tres vectores suman cero, como en el triángulo rectángulo de la figura 28. Calcule (*a*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, y (*c*) $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

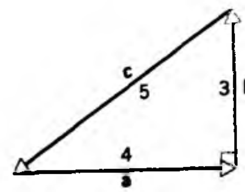

Figura 28 Problemas 41 y 42.

42. Tres vectores suman cero, como en la figura 28. Calcule (*a*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} \times \mathbf{c}$, y (*c*) $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$.

43. El vector **a** está en el plano yz a 63.0° del eje $+y$ con una componente z positiva y tiene una magnitud de 3.20 unidades. El vector **b** se halla en el plano xz a 48.0° del eje $+x$ con una componente z positiva y tiene una magnitud de 1.40 unidades. Halle (*a*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, (*b*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, y (*c*) el ángulo entre **a** y **b**.

44. (*a*) Hemos visto que la ley conmutativa *no* se aplica a los productos vectoriales; esto es, $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ no es igual a $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Demuestre que la ley conmutativa *sí* se aplica a los productos escalares; esto es, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$. (*b*) Demuestre que la ley distributiva se aplica tanto a los productos escalares como a los productos vectoriales; esto es, demuestre que

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$$

y que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

(*c*) ¿Se aplica la ley asociativa a los productos vectoriales, esto es, es $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ igual a $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$? (*d*) ¿Tiene algún sentido hablar de una ley asociativa para los productos escalares?

45. Demuestre que el área del triángulo contenido entre los vectores **a** y **b** (Fig. 29) es $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$, donde las barras verticales significan una magnitud.

46. Demuestre que la magnitud de un producto vectorial da numéricamente el área del paralelogramo formado por los dos vectores componentes como lados (véase la Fig. 29). ¿Sugiere esto cómo un elemento de área orientado en el espacio estaría representado por un vector?

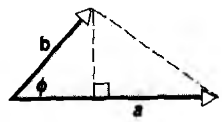

Figura 29 Problemas 45 y 46.

47. Demuestre que $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ es igual en magnitud al volumen del paralelepípedo formado sobre los tres vectores **a**, **b**, y **c** como se muestra en la figura 30.

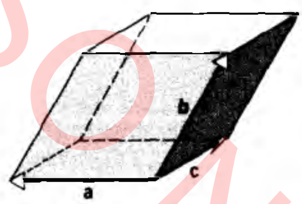

Figura 30 Problema 47.

48. Dos vectores **a** y **b** tienen componentes, en unidades arbitrarias, $a_x = 3.2$, $a_y = 1.6$; $b_x = 0.50$, $b_y = 4.5$. (*a*) Halle el ángulo entre **a** y **b**. (*b*) Halle las componentes de un vector **c** que sea perpendicular a **a**, esté en el plano xy, y tenga una magnitud de 5.0 unidades.

49. Halle los ángulos entre las diagonales del cuerpo de un cubo. Véase el problema 27.

50. Los tres vectores que se muestran en la figura 31 tienen magnitudes $a = 3$, $b = 4$ y $c = 10$. (*a*) Calcule las componentes x y y de estos vectores. (*b*) Halle los números p y q tales que $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$.

Sección 3-6 Leyes vectoriales en la física

51. Use la figura 10*b* para derivar las ecuaciones 18.

52. Un vector **a** con una magnitud de 17 m está dirigido 56° en sentido antihorario del eje $+x$, como se muestra en la figura 32. (*a*) ¿Cuáles son las componentes a_x y a_y del vector? (*b*) Un segundo sistema de coordenadas está inclinado en 18° con respecto al primero. ¿Cuáles son las componentes a_x' y a_y' en este sistema "primo" de coordenadas?

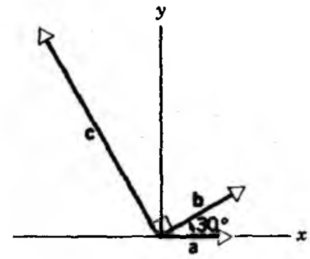

Figura 31 Problema 50.

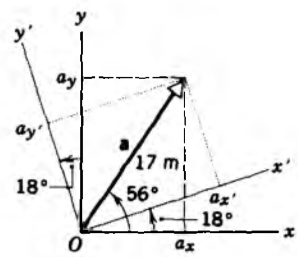

Figura 32 Problema 52.

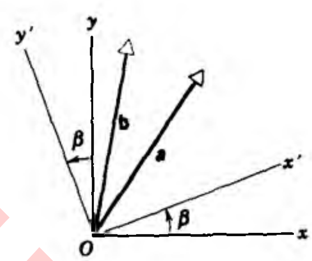

Figura 33 Problema 53.

53. La figura 33 muestra dos vectores **a** y **b** y dos sistemas de coordenadas que difieren en que los ejes x y x' y los ejes y y y' forman cada uno un ángulo β con el otro. Pruebe analíticamente que $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ tiene la misma magnitud y dirección sin importar qué sistema se haya usado para llevar a cabo el análisis. (*Sugerencia*: Use las Ecs. 18).