Cálculo Diferencial e Integral en una variable

IMERL
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Gonzalo Cousillas escribió “Conjuntos”
Richard Muñiz escribió “Número Real”
Alexandre Miquel escribió “Integración”, “Límites y continuidad”
Matilde Martínez escribió “Derivadas”, “Teorema fundamental del cálculo y métodos de integración”, “Polinomio de Taylor”
Edición: Jazmín Finot

Índice general

1. Conjuntos **1**
- 1.1. Conjuntos, elementos y pertenencia . . . 1
- 1.2. Operaciones con conjuntos . . . 4

2. Número real **9**
- 2.1. ¿Qué es un número real? . . . 9
- 2.2. Desigualdades . . . 12
- 2.3. Completitud . . . 14

3. Integración **21**
- 3.1. Integral de una función . . . 22
  - 3.1.1. Objetivo y método . . . 22
  - 3.1.2. Particiones de un intervalo . . . 23
  - 3.1.3. Sumas inferiores y superiores . . . 25
  - 3.1.4. Integral inferior y superior . . . 30
  - 3.1.5. Ejemplos y contraejemplo . . . 34
- 3.2. Propiedades de la integral . . . 39
  - 3.2.1. Monotonía . . . 39
  - 3.2.2. Linealidad . . . 41
  - 3.2.3. Integral y valor absoluto . . . 47
  - 3.2.4. Aditividad respecto al intervalo . . . 51
  - 3.2.5. Extensión de la notación $\int_a^b f$ a los casos donde $a = b$ y $a > b$ . . . 54
  - 3.2.6. Otras propiedades geométricas de la integral . . . 56
- 3.3. Ejemplos de funciones integrables . . . 60
  - 3.3.1. Funciones escalonadas . . . 60
  - 3.3.2. Integración de funciones polinomiales . . . 65
  - 3.3.3. Integral de la función $t \mapsto 1/t$ . . . 72

4. Límites y continuidad **79**
- 4.1. Límite . . . 79
  - 4.1.1. Entornos . . . 79
  - 4.1.2. Noción de límite . . . 81
  - 4.1.3. Ejemplos y contraejemplos . . . 83
  - 4.1.4. Propiedades algebraicas de los límites . . . 89
  - 4.1.5. Propiedades de monotonía . . . 95
  - 4.1.6. Composición de límites . . . 97

4.1.7. Generalización de la noción de límite 99
4.2. Funciones continuas 111
4.2.1. Observación y definición 111
4.2.2. Propiedades algebraicas 112
4.2.3. Valores intermedios 115
4.2.4. Extremos absolutos 118
4.2.5. Funciones inversas 123
4.2.6. Función continua definida por una integral 128
4.3. Continuidad uniforme 130
4.3.1. Observaciones y definición 130
4.3.2. Teorema de Heine-Cantor 132
4.3.3. Más funciones integrables 135
4.3.4. Aplicación: el teorema del valor medio 138

5. Derivadas **141**
5.1. Definición de la derivada 142
5.1.1. Velocidad 142
5.1.2. Pendiente de la recta tangente 144
5.1.3. Límite del cociente incremental 146
5.1.4. Continuidad de las funciones derivables 147
5.2. Cálculo de derivadas 148
5.2.1. Primeros ejemplos 148
5.2.2. Un ejemplo que desafía la intuición 153
5.2.3. Álgebra de derivadas 155
5.2.4. Regla de la cadena 157
5.2.5. Teorema de la función inversa 159
5.2.6. Regla de L'Hôpital 165
5.3. Teorema del valor medio 167
5.3.1. Extremos relativos 167
5.3.2. Teorema de Rolle 169
5.3.3. Teorema del valor medio de Lagrange 170
5.3.4. Demostración de la Regla de L'Hôpital 172
5.4. Crecimiento y clasificación de extremos 174
5.4.1. Crecimiento y signo de la derivada 174
5.4.2. Clasificación de extremos a partir del signo de la derivada 177
5.4.3. Clasificación de extremos con la derivada segunda 178

6. Teorema fundamental del cálculo y métodos de integración **185**
6.1. Teorema Fundamental del Cálculo 186
6.1.1. Teorema Fundamental del Cálculo: enunciado y demostración 186
6.1.2. Primitivas de una función 190
6.1.3. Derivada de funciones dadas por expresiones integrales 192
6.2. Métodos de integración 195
6.2.1. Regla de Barrow 195
6.2.2. Integración por partes 196
6.2.3. Integración por sustitución o cambio de variable 199

6.2.4. Integración de funciones racionales 206

7. Polinomio de Taylor **219**

7.1. Definición del polinomio de Taylor 220

7.2. Ejemplos 224

7.3. El teorema de Taylor 226

7.4. Aplicación al cálculo de límites 234

7.5. Forma del resto de Lagrange y estimación de errores 236

Capítulo 1

Conjuntos

1.1. Conjuntos, elementos y pertenencia

En matemática se utilizan diferentes lenguajes para comunicarse; existen tres grandes categorías: *el lenguaje coloquial, el lenguaje simbólico y el lenguaje gráfico.* El lenguaje coloquial se utiliza para expresar ideas y conceptos en forma escrita u oral usando el lenguaje ordinario. El lenguaje simbólico se utiliza para expresar con símbolos en forma precisa los conceptos dados en lenguaje coloquial. El lenguaje gráfico se utiliza para aclarar conceptos y situaciones.

Al usar el lenguaje simbólico, usualmente utilizamos letras mayúsculas (A, B, $C, \ldots$) para designar los conjuntos y letras minúsculas (a, b, $c, \ldots$) para designar los elementos. Se considera un símbolo que relaciona un elemento con un conjunto ($\in$). Se escribe

$$a \in A$$

y se lee, *a pertenece al conjunto A*. Para indicar que un elemento no pertenece a un conjunto se escribe

$$a \notin A$$

Los símbolos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ denotan determinados conjuntos numéricos. $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales, $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales.
No ahondaremos aquí en la construcción de estos conjuntos numéricos y los supondremos conocidos.

Una de las primeras interrogantes que aparecen al trabajar con conjuntos es la forma de determinarlos. Se debe indicar de una forma precisa y sin ambigüedades, cuáles son sus elementos. Se pueden distinguir varias formas, una de estas es determinar al conjunto por *extensión*, esto es, listar todos los elementos del conjunto. Por ejemplo, si A es el conjunto de los números naturales mayores o iguales que 10 y menores que 20, entonces

$$A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Podemos observar que cada elemento está separado por una coma, y los mismos se encuentran entre llaves.

Otra forma de describir un conjunto es por *comprensión*, la misma consiste en indicar una propiedad que deben cumplir sus elementos y sólo estos (para no generar ambigüedades). Consideremos B como el conjunto de los números naturales que son pares y menores que nueve, entonces

$$B = \{n \in \mathbb{N} : n < 9 \text{ y } n = \dot{2}\}$$

Como última observación recordemos que el conjunto que no tiene elementos se denomina *conjunto vacío*, se lo denota usualmente $\{\ \}$ o $\varnothing$.

Ejemplo 1.1.1. *Determinar los siguientes conjuntos por extensión y por comprensión:*

1. *A es el conjunto formado por los cuadrados de los primeros diez números naturales.*

2. *B es el conjunto formado por las raíces cuadradas de los primeros cincuenta naturales y que además sean naturales.*

3. *C es el conjunto formado por los naturales múltiplos de tres que además son menores que diecisiete o múltiplos de cinco menores que treinta.*

Solución:

1. *Si deseamos determinar A por extensión, debemos elevar al cuadrado cada uno de los diez primeros números naturales y el elemento obtenido pertenecerá al conjunto. Realicemos los cálculos:* $0^2 = 0,\ 1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9,\ 4^2 = 16,\ 5^2 = 25,$ $6^2 = 36,\ 7^2 = 49,\ 8^2 = 64,\ 9^2 = 81,\ 10^2 = 100$. *Obtenemos entonces que*

$$A = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$$

   Ahora bien, para determinar por comprensión A, debemos indicar que propiedad cumplen sus elementos

$$A = \{x : \ x = n^2,\ n \in \mathbb{N},\ n \leq 10\}$$

2. *Para determinar por extensión este conjunto podríamos probar aplicar raíz cuadrada a cada número entre 0 y 50 y ver si el resultado es un número natural. Luego de algunos cálculos obtenemos que*

$$B = \{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0\}$$

   Para expresar B por comprensión indicamos las propiedades que se deben cumplir:

$$B = \{x \in \mathbb{N} : x = \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}, n \leq 50\}$$

3. *Al determinar C debemos tener en cuenta las dos condiciones, la primera es ser múltiplo de tres menor que diecisiete, la segunda es ser múltiplo de cinco y menor que treinta. Entonces*

$$C = \{3, 6, 9, 12, 15, 5, 10, 20, 25\}$$

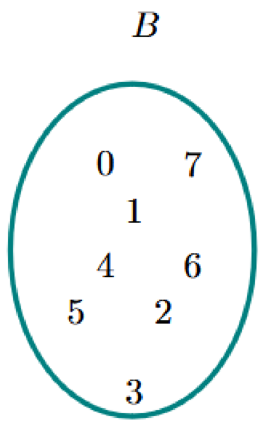
   Determinemos C por comprensión:

$$C = \{x : x = 3n,\ n \leq 5, n \in \mathbb{N} \ o\ x = 5m,\ m \leq 5,\ m \in \mathbb{N}\}$$

   Más adelante veremos una forma mas sencilla de determinar este conjunto teniendo en cuenta las operaciones entre conjuntos.

Observación 1.1.2. *Al determinar un conjunto por extensión, el orden en el cual aparecen los elementos no tiene importancia y si los elementos son repetidos, se cuentan una vez sola. A modo de ejemplo, si escribimos* $T = \{1, 2, 3, 2, 3\}$*, en realidad se considera* $T = \{1, 2, 3\}$*.*

Veamos ahora una representación en modo gráfico de los conjuntos, es claro que en ciertos casos manejar diferentes registros ayuda a la comprensión de la situación. Los conjuntos pueden representarse gráficamente utilizando diagramas de Venn, la idea es bastante simple y conocida,



denota el conjunto $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Veamos algunas relaciones básicas.

Definición 1.1.3. Sean A y B dos conjuntos, se dice que A está incluido en B o que A es un subconjunto de B y se denota $A \subset B$ si todo elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B.
En lenguaje simbólico:

$$A \subset B \text{ si } \forall\, x \;/\; x \in A \Rightarrow x \in B$$

La concatenación de símbolos $(\forall\ x\ /\ x \in A)$ se leen como "*para todo elemento x perteneciente al conjunto A*".

Decir que dos conjuntos son iguales $(A = B)$, es decir que tienen los mismos elementos, por tanto todo elemento de A debe pertenecer a B y asimismo, todo elemento de B debe pertenecer a A. En resumidas cuentas, $A = B$ si $A \subset B$ y $B \subset A$. En el caso que $A \subset B$ pero $A \neq B$ se dice que A está incluido estrictamente en B o que A es un subconjunto propio de B y se denota $A \subsetneq B$. En este caso todo elemento del conjunto A pertenece al conjunto B, pero existe al menos un elemento b que pertenece al conjunto B tal que éste no pertenece al conjunto A. En símbolos

$$A \subsetneq B \textbf{ si } \forall\, a \in A \Rightarrow a \in B \text{ y } \exists\, b \in B \;/\; b \notin A$$

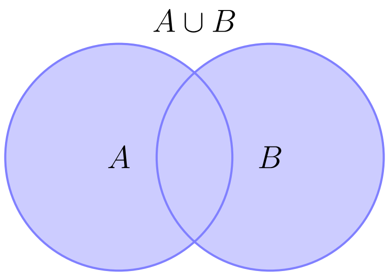
1.2. Operaciones con conjuntos

Unión de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos, la unión de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A o pertenecen a B. En símbolos matemáticos este concepto se expresa de la siguiente manera

$$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ o } x \in B\}$$

La representación de la unión en diagramas de Venn es



Ejemplo 1.2.1. *Sean* $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ *y* $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$. *Entonces* $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 14, 20, 22, 30, 31, 33\}$.

Ejemplo 1.2.2. *Consideremos los siguientes conjuntos,* $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. *Entonces*

- $A \cup A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{1, 3, 5, 7, 9\} = A$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = B \cup A$
- $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = A \cup B$

Proposición 1.2.3 (Propiedades de la Unión de Conjuntos)**.** *Sean A y B dos conjuntos. Entonces:*

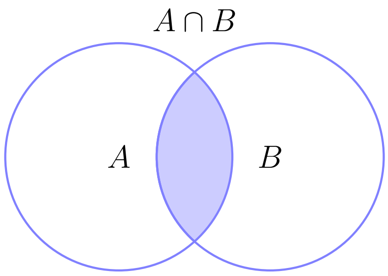
1. $A \cup A = A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cup \varnothing = A$
4. $A \subset A \cup B$
5. $B \subset A \iff B \cup A = A$.

Intersección de Conjuntos

Sean A y B dos conjuntos, la intersección de A y B es un nuevo conjunto cuyos elementos pertenecen a A y a B. En símbolos matemáticos

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ y } x \in B\}$$

La representación de la intersección con diagramas de Venn es



Ejemplo 1.2.4. *Sean* $A = \{1, 5, 7, 14, 22, 31, 33\}$ *y* $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 20, 22, 30\}$. *Entonces* $A \cap B = \{5, 7, 22\}$.

Ejemplo 1.2.5. *Consideremos* $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. *Entonces*

- $A \cap A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} = A$
- $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\} \cap \{2, 3, 4, 5, 7, 9\} = \{2, 3, 4\} = B \cap A$
- $A \cap B = \{2, 3, 4\} \subset \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

Proposición 1.2.6 (Propiedades de la intersección de conjuntos)**.** *Sean* A *y* B *conjuntos. Entonces:*

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap \varnothing = \varnothing$
4. $A \cap B \subset A$
5. $B \subset A \iff A \cap B = B$

Diferencia de Conjuntos

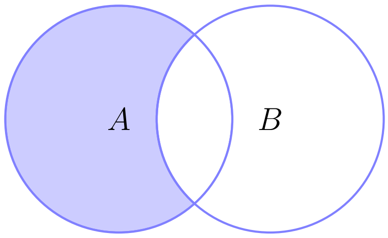
Sean A y B dos conjuntos, se llama diferencia de A y B al conjunto que tiene como elementos los que pertenecen al conjunto A y no pertenecen al conjunto B.
Simbólicamente se denota

$$A \setminus B = \{x \ / \ x \in A \text{ y } x \notin B\}$$

Es usual escribir también $A - B$ para notar $A \setminus B$.

La representación de la diferencia de conjuntos en diagramas de Venn es

$A \setminus B$



Ejercicio 1. Determinar si es cierto que si A y B son dos conjuntos, se cumple que $A \setminus B = B \setminus A$.

Proposición 1.2.7 (Propiedades de la Diferencia de Conjuntos)**.** *Sean A, B y C conjuntos. Entonces:*

1. $A \setminus A = \varnothing$
2. $A \setminus \varnothing = A$
3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

Complemento

Si $A \subset B$ se define el complemento de A respecto de B como el conjunto cuyos elementos pertenecen a B y no pertenecen a A. Simbólicamente,

$$A_B^C = \{x : x \in B \text{ y } x \notin A\}$$

. Observar que el subíndice indica el conjunto respecto del cual se complementa.

Observación 1.2.8. *Si no se indica el conjunto respecto al cual se complementa entonces $B^C = \{x : x \notin B\}$ quedando implícito el conjunto universal al cual pertenecen los elementos.*

Ejercicio 2.

1. Sean A, B, C tres conjuntos. Sabiendo que $A \cup C = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n < 9 \text{ y } n \neq 6\}$, $B \cup C = \{2, 5, 7, 8, 9\}$ $B \cap C = \{5, 7\}$, $A \cap C = \{2\}$ y $C \setminus (B \cup A) = \{8\}$, hallar A, B y C.

2. Dados $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.
   Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.

3. Considerar los conjuntos $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$, $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$, $D = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones justificando la respuesta

   a. $A = B$
   b. $A \subset B$
   c. $A \subset C$
   d. $A \in C$
   e. $A \subset D$
   f. $B \subset C$
   g. $B \subset D$
   h. $B \in D$
   i. $A \in D$

4. Dados los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 1 \leq x \leq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 1 \leq x \leq 4\}$.
   Hallar los conjuntos C tales que $A \subset C \subset B$.

5. Considere los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 6\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 8\}$, $C = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 6\}$, $D = \{x \in \mathbb{N} : 3 \leq x \leq 4\}$.
   Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando la respuesta.

   a. $3 \notin C$
   b. Si $x \in A \Rightarrow x \leq 5$
   c. Si $x \leq 8 \Rightarrow x \in B$
   d. Si $x \in B \Rightarrow x \geq 2$
   e. $C \subset D$
   f. $D \subset A$
   g. $A \cap B = C$
   h. $B \cap C = B$

6. Se le realizó a un grupo de 43 estudiantes un cuestionario que contenía las siguientes preguntas: ¿repite?, ¿tiene previas?, ¿posee todos los textos recomendados? Se obtuvieron los siguientes datos:

   (i) 12 estudiantes repiten
   (ii) 15 estudiantes poseen todos los textos
   (iii) 6 estudiantes repiten y tienen los textos
   (iv) 17 respondieron negativamente a las tres preguntas
   (v) 1 estudiante respondió afirmativamente a las tres preguntas
   (vi) 10 respondieron afirmativamente sólo a dos preguntas
   (vii) 15 estudiantes respondieron afirmativamente sólo a una pregunta

   a. De los estudiantes que no repiten ni tienen todos los textos, ¿cuántos tienen previas?
   b. De todo el grupo, ¿cuántos tienen previas?

Capítulo 2

Número real

2.1. ¿Qué es un número real?

Los números reales son básicamente aquellos que sirven para "hacer cálculo". Siendo un tanto esquemáticos podemos decir que existen dos enfoques, en cierta forma contrapuestos, para abordar la definición:

- La definición axiomática;
- La definición constructiva.

En estas notas nos inclinaremos por la segunda alternativa, y no nos preocuparemos demasiado por los aspectos formales de ésta. En primer lugar, consideraremos que los números *naturales* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ son las piezas fundamentales a partir de las cuales vamos a construir todos los demás "números" (parafraseando a Leopold Kronecker, asumiremos los naturales como dados por Dios, y construiremos todo lo demás).

La primera construcción que surge a partir de los naturales es la de las proporciones o *razones*, que son cocientes de naturales

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$$

y que tienen un significado claro (sobre todo si uno tiene hermanos). Por otro lado, para poder restar números naturales sin problema, se puede agregar el 0 y los negativos de los naturales, obteniéndose así los números *enteros*:

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}.$$

Y por qué no, considerar también las proporciones entre números enteros, que es los que se conoce como los números *racionales* (se denominan así porque son proporciones, ¡no porque piensen lógicamente!):

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}.$$

Detengámonos un momento y observemos que con los números racionales podemos realizar tranquilamente las operaciones de suma, multiplicación, resta y división (simpre que no tratemos de dividir entre cero) y éstas cumplirán todas las propiedades usuales a las que estamos acostumbrados. Un sistema numérico con esas propiedades es lo que los matemáticos denominan *cuerpo*. La pregunta sería ¿por qué no detenernos acá? La respuesta se puede rastrear al menos hasta la antigua Grecia, y fue un pitagórico el primero en darse cuenta de que la diagonal de un cuadrado de lado 1 tiene una longitud que no es racional (WTF!?)[1]. Dicho en términos más modernos, la raíz cuadrada de 2 no es un número racional.

Proposición 2.1.1. *$\sqrt{2}$ no es racional. O, equivalentemente, $\nexists\ q \in \mathbb{Q}$ tal que $q^2 = 2$.*

Demostración.

Sea

$$q = \frac{m}{n} \quad m, n \in \mathbb{Z},\ \text{con } n \neq 0.$$

Podemos suponer que la fracción está reducida, i.e.[2] que m y n no tienen factores en común, con lo cual m^2 y n^2 tampoco tendrán factores en común. Entonces,

$$q^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$$

si y solo si $m^2 = 2$ y $n = 1$, pero no hay ningún entero cuyo cuadrado sea 2. □

Siguiendo con nuestra construcción podríamos considerar entonces los números *constructibles* (aquellos que se pueden construir con regla y compás). Y por qué no, los números que son raíces de polinomios con coeficientes racionales, que se llaman números *algebraicos*. También están los números que se llaman *computables*... y *ainda mais*. Cada uno de los conjuntos numéricos mencionados anteriormente es un cuerpo más grande que el anterior, pero si seguimos así no vamos a llegar muy lejos. Así que vamos a intentar algo radicalmente diferente.

[1] Del inglés *what a terrible fact!*

[2] Abreviación de la locusión latina *id est* que significa “esto es”.

Expresiones decimales

A todo número racional $q \in \mathbb{Q}$ lo podemos expresar usando decimales:

$$q = \pm q_0.q_1q_2q_3\cdots$$

donde

$$q_0 \in \mathbb{N}, \quad q_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

De manera que podemos escribir

$$q = \pm\left(q_0 + q_1 10^{-1} + q_2 10^{-2} + \ldots\right)$$

Notar que la expresión decimal de cualquier racional es necesariamente periódica a partir de cierto momento (esto se deduce del algoritmo de la división de Euclides), por lo que no toda expresión decimal corresponde a un número racional. Podríamos considerar entonces el conjunto de todas las expresiones decimales posibles. ¿Acaso eso no sería el conjunto de todos los números posibles? Para nuestros intereses la respuesta es que sí.

Observación 2.1.2. *Las expresiones decimales no están univocamente determinadas, o dicho de otra forma, dos expresiones decimales diferentes pueden corresponder a un mismo racional. El único caso de discrepancia, sin embargo, es cuando se repite el dígito 9 indefinidamente y esto se debe a que* $0{,}999\ldots = 1{,}000\ldots$ *Una forma muy simple de ver esto es la siguiente:*

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{3} &= 0{,}333\ldots \\ \frac{2}{3} &= 0{,}666\ldots \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 0{,}999\ldots$$

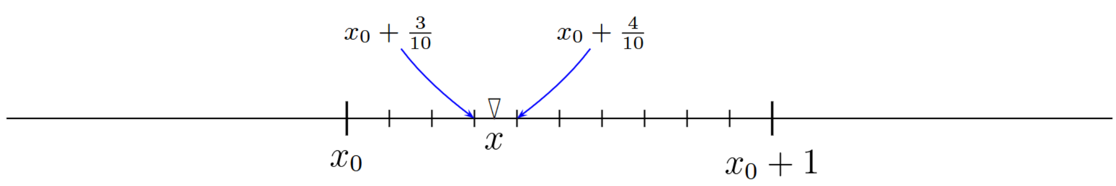
En las expresiones decimales descartaremos entonces las que terminan con una repetición de infinitos nueves, utilizando en su lugar la expresión decimal finita correspondiente.

Definición 2.1.3. Llamaremos número *irracional* a las expresiones decimales que no representan un número racional. Notemos que acá no hay ambigüedad, un número irracional tiene una única expresión decimal. Los números *reales* serán la unión de los racionales y los irracionales, y los denotaremos por $\mathbb{R}$. Entonces,

$$\mathbb{R} := \{\pm x_0.x_1x_2\ldots \ : \ x_0 \in \mathbb{N}, \ x_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ para } i = 1, 2, \ldots\}.$$

Consideremos un número real

$$x \in \mathbb{R}^+, \quad x = x_0 + x_2 10^{-1} + x_2 10^{-2} + \cdots$$
$$x = x_0.x_1x_2x_3\ldots$$



notemos que $x_0 \in \mathbb{Z}$ es el único entero de manera que $x \in [x_0, x_0 + 1)$. Aprovechamos para dar la siguiente definición:

Definición 2.1.4. Dado un número real x cualquiera siempre existe un único entero x_0 tal que $x \in [x_0, x_0 + 1)$. Tal x_0 se llama *parte entera* de x.

Si dividimos el intervalo $[x_0, x_0 + 1)$ en 10 partes iguales

$$\left[x_0 + \tfrac{i}{10}, x_0 + \tfrac{i+1}{10}\right) \qquad \text{con} \qquad i = 0, \dots, 9,$$

existirá un único $x_1 \in \{0, \dots, 9\}$ tal que $x \in \left[x_0 + \frac{x_1}{10}, x_0 + \frac{x_1+1}{10}\right)$; x_1 es la parte entera de $10(x - x_0)$.

En el dibujo tenemos $x \in \left[x_0 + \frac{3}{10}, x_0 + \frac{4}{10}\right)$, así que

$$\begin{aligned} x &= x_0 + 3 \times 10^{-2} + \cdots \\ x &\approx x_0{,}3 \end{aligned}$$

Por inducción podemos hallar todos los dígitos decimales de x.

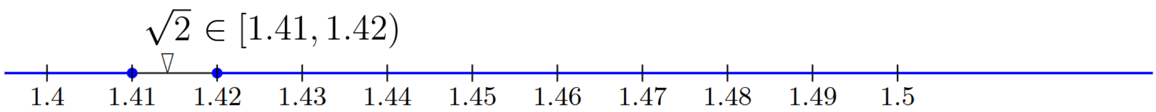
Ejemplo 2.1.5. *Veamos cómo funciona esto en el caso de* $\sqrt{2}$. *Es fácil ver que que la parte entera de* $\sqrt{2}$ *es 1 ya que* $1 < \sqrt{2} < 2$. *Dividimos* $[1, 2]$ *en 10 partes iguales:*

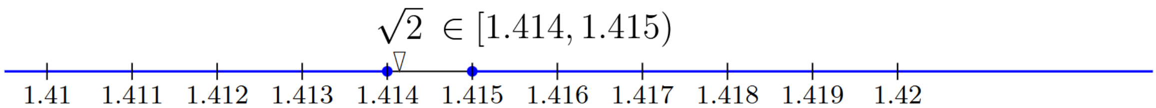
$$[1, 1{,}1), [1{,}1, 1{,}2), \cdots, [1{,}9, 2).$$

Tenemos que

$$\sqrt{2} \in [1{,}4, 1{,}5) \quad \textit{ya que } (1{,}4)^2 < 2 < (1{,}5)^2,$$

con lo cual $x_1 = 4$. *Análogamente, podemos continuar con el mismo razonamiento,*





$$\Rightarrow \sqrt{2} \approx 1.\boxed{414}$$ estos son los primeros tres decimales exactos de $\sqrt{2}$

2.2. Desigualdades

Los naturales están ordenados

$$0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < n < n + 1 < \ldots$$

- Dados dos naturales m, m se cumple la ley de tricotomía:

$$\text{vale una y sólo una de las relaciones} \quad m < n, \; n < m, \; \text{o } m = n.$$

- Si $m < n \Rightarrow m+p < n+p \quad \forall\, p \in \mathbb{N}$. De lo cual también tendremos $pm < pn \;\forall\, p \in \mathbb{N}$.

El orden en $\mathbb{N}$ se puede extender a un orden en $\mathbb{R}$ definiendo los reales positivos como las expresiones decimales de la forma $x_0.x_1x_2\ldots$. Diremos que $x < y$ si $0 < y - x$ para $x, y \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $\mathbb{R}^+$ al conjunto de los reales positivos,

$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \{x_0.x_1\ldots : x_0 \in \mathbb{N}, x_i \in \{1, \ldots, 9\} \text{ para } i \geqslant 1\}$$

Teorema 2.2.1. *El orden en $\mathbb{R}$ satisfece:*

1. *Transitividad: $x < y, \; y < z \Rightarrow x < z$.*
2. *Tricotomía: se cumple una y sólo una de las siguientes relaciones*

$$x < 0, \; x > 0 \text{ o } x = 0$$

.

3. *Monotonía con respecto a la adición: $x < y \Rightarrow x + z < y + z$*
4. *Monotonía con respecto a la multiplicación: $x < y$, $z > 0 \Rightarrow xz < yz$.*

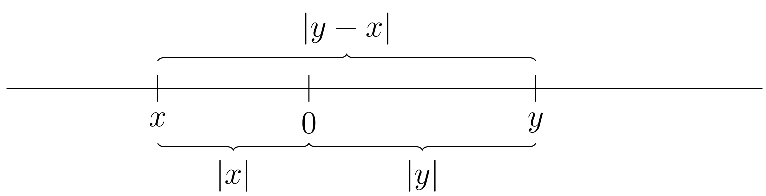
De la propiedad 4 se pueden deducir las bien conocidas reglas de que "más por más es más y menos por más es menos". Supongamos, por ejemplo, que a y b son dos reales positivos. Poniendo $x = 0$, $y = a$ y $z = b$ en 4, obtenemos que $0 = 0b < ab$. Todas las demás propiedades conocidas, se deducen de las propiedades anteriores. Dejamos como ejercicio demostrar que si $0 < x$ entonces $0 < \frac{1}{x}$.

Valor absoluto

La función *valor absoluto* $|\cdot| \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto |x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Geométricamente $|x|$ = "distancia de x a 0". Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $|y - x|$ = será la "distancia de x a y".



Proposición 2.2.2. *Si* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *son tales que* $x^n > y^n$ *para algún* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $x > y$.

Demostración. Demostraremos el contrarrecíproco

$$x < y \Rightarrow x^n < y^n,$$

por inducción en n.

- Si $n = 1$ es obvio.
- Supongamos que $x^n < y^n$.

Multiplicando la desigualdad $x < y$ de ambos lados por x^n, y usando que $x^n < y^n$, se tiene que

$$x^{n+1} = x^n x < x^n y < y^n y = y^{n+1}.$$

□

Teorema 2.2.3 (Desigualdad triangular)**.** *Si* $x, y \in \mathbb{R}$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Demostración.

$$\left.\begin{array}{l} x \leqslant |x| \\ y \leqslant |y| \end{array}\right\} \Rightarrow x + y \leqslant |x| + |y|$$

$$\left.\begin{array}{l} -x \leqslant |x| \\ -y \leqslant |y| \end{array}\right\} \Rightarrow -x - y \leqslant |x| + |y|$$

$$\Rightarrow \quad |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

□

2.3. Completitud

$\mathbb{R}$ tiene una estructura algebraica que se denomina *cuerpo*: podemos sumar, restar, multiplicar y dividir usando todas las propiedades usuales.

¿Qué es un cuerpo?

Un *cuerpo* es un conjunto, usualmente denotado por $\mathbb{K}$, en el que están definidas operaciones de "suma" $+$ y "multiplicación" $\cdot$ de manera que se verifican las siguientes propiededes (*axiomas de cuerpo*):

- *Asociatividad*: $(a+b)+c = a+(b+c)$
  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *Conmutatividad*: $a+b = b+a$
  $a \cdot b = b \cdot a$
- *Existencia de neutros*: $\exists\ 0 \in \mathbb{K}$ tal que $a+0 = a \quad \forall\ a \in \mathbb{K}$.
  $\exists\ 1 \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot 1 = a \quad \forall\ a \in \mathbb{K}$
- *Distributiva*: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
- *Existencia de inversos*: $\forall\ a \in \mathbb{K}\ \exists\ -a \in \mathbb{K}$ tal que $a+(-a) = 0.$.
  $\forall a \in \mathbb{K},\ a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ tal que $a \cdot a^{-1} = 1$

$\mathbb{N}$ no es un cuerpo porque no podemos restar ni dividir, $\mathbb{Z}$ no es un cuerpo porque no podemos dividir, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son cuerpos. Pero además $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son *cuerpos ordenados*. Un cuerpo se llama ordenado cuando existe un orden que es compatible con las operaciones de cuerpo en el sentido del teorema 2.2.1 (normalmente esas propiedades se enuncian como *axiomas de orden*, agregando que $0 < 1$ para que todo quede ordenado de la manera usual). El orden en $\mathbb{R}$ nos permite pensar los números reales como puntos en una recta. Además $\mathbb{Q}$ tiene la propiedad de *densidad*: entre dos racionales siempre habrá otro racional, i.e. dados racionales $p < q$ existe $r \in \mathbb{Q}$ tal que $p < r < q$. Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ los reales son también densos. Sabemos que los racionales no son todos los puntos de la recta porque por ejemplo $\sqrt{2} \neq \mathbb{Q}$, es decir, la recta racional tiene agujeros. Vamos a ver a continuación que $\mathbb{R}$ es el cuerpo que se obtiene al "rellenar" esos agujeros y esa será la diferencia fundamental entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ que nos permite desarrollar el cálculo infinitesimal.

Vamos a definir ahora unos conjuntos especiales, que serán fundamentales para todo lo que vamos a desarrollar más adelante.

Intervalos

Definición 2.3.1.
Intervalos cerrados: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$ para $a, b \in \mathbb{R}$.
Intervalos abiertos: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ para $a, b \in \mathbb{R}$ o $a = -\infty$, o $b = +\infty$. En particular, $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
Intervalos semiabiertos: $(a, b]$, $[a, b)$ para $a, b \in \mathbb{R}$ pudiendo ser también $a = -\infty$ en el primer caso y $b = +\infty$ en el segundo.

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}$$

En términos geométricos, un intervalo es un segmento de recta, que puede ser finito o infinito y que puede contener a los extremos o no.

Cotas superiores e inferiores

Definición 2.3.2. Sea $S \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío.

1. Decimos que S es *acotado superiormente* si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $\forall\, x \in S$ se tiene que $x \leqslant K$. En palabras, hay un número real de manera que ningún número de S es más grande que él. Utilizando intervalos podemos decir que $S \subset (-\infty, K]$ para algún $K \in \mathbb{R}$. Análogamente, decimos que S es acotado *inferiormente*, si existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $S \subset [K, +\infty)$. Nos referimos a K como siendo cota superior o inferior de S, respectivamente.

2. Si S es acotado superiormente decimos que $K \in \mathbb{R}$ es el *supremo* de S si es cota superior de S y no hay una cota superior que sea menor. Análogamente, se define *ínfimo* como la mayor de las cotas inferiores.

3. Si $\sup(S) \in S$ decimos que S tiene máximo y lo denotaremos como $\max(S)$. Si $\inf(S) \in S$ decimos que S tiene mínimo y lo denotamos por $\min(S)$.

Es claro que tanto el supremo como el ínfimo, si existen, son únicos debido a la ley de tricotomía.

Ejemplo 2.3.3. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.*

- $S = (a, b) \Rightarrow b$ *es el supremo de* S
- $S = [a, b] \Rightarrow \max(S) = a, \min(S) = b$
- $S = (a, b)$ *no tiene máximo ni mínimo*
- $S = [a, b) \Rightarrow S$ *no tiene máximo pero tiene mínimo* $\min(S) = a$
- $S = (a, b] \Rightarrow S$ *no tiene mínimo pero tiene máximo* $\max(S) = b$

Notemos que $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente ya que si $x \in \mathbb{R}^+$, entonces $\exists\, m \in \mathbb{N}$ tal que

$$m < x < m + 1.$$

Consecuencia. $\forall a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a > \frac{1}{n} > 0$.

Demostración. $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{a} < n \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{n} < a$ (multiplicando la desigualdad por $\frac{a}{n}$). $\square$

Ejemplo 2.3.4. *Todo conjunto de enteros que está acotado superiormente tiene máximo.*

Para la definición de $\mathbb{R}$ que dimos, es posible demostrar que se cumple la siguiente propiedad, que normalmente se enuncia como axioma.

Teorema 2.3.5 (Axioma de Completitud)**.** *Todo conjunto no vacío y acotado superiormente (inferiormente), de números reales, tiene un supremo (ínfimo).*

Una vez demostrado el teorema para el supremo (no veremos esta demostración), para ver lo análogo con el ínfimo basta considerar el conjunto $-S = \{-x \ : \ x \in S\}$. Si S es acotado inferiormente, $-S$ será acotado superiormente, tendrá un supremo, y tendremos $\inf(S) = -\sup(-S)$.

Si $S \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente y no vacío,

$$\text{cotas superiores de } S = [\sup(S), +\infty).$$

y análogamente, si S es no vacío y acotado inferiormente,

$$\text{cotas inferiores de } S = (-\infty, \inf(S)].$$

Si $S \subset \mathbb{R}$ es acotado inferior y superiormente, entonces

$$S \subset [\inf(S), \sup(S)]$$

Por cuestiones prácticas, conviene extender la noción de supremo e ínfimo a conjuntos no acotados. Si S no es acotado superiormente pondremos $\sup(S) = +\infty$ y si no es acotado inferiormente escribiremos $\inf(S) = -\infty$.

Una observación sobre la unicidad del cuerpo de los reales.

Un cuerpo ordenado que satisface la propiedad del teorema anterior se denomina *completo*. Es posible demostrar que todo cuerpo ordenado y completo es escencialmente igual a $\mathbb{R}$, es decir, es escencialmente único. Por esta razón los axiomas cuerpo + orden + completitud podemos decir que "definen" $\mathbb{R}$ (la mala noticia es que no sabemos si existe, ¡por eso preferimos la definición constructiva!).

Ya vimos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ahora vamos a ver que $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ usando lo anterior, es decir, vamos a probar que existe un real que elevado al cuadrado es 2. De hecho vamos a probar que para todo real positivo existe una raíz cuadrada (para 0 es obvio).

Teorema 2.3.6. *Para todo real positivo b existe un real a tal que $a^2 = b$.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 < b\right\}$$

Se tiene que

- $S \neq \emptyset$ pues $0 \in S$.
- S está acotado superiormente:

Si $x \in S$, entonces $x^2 < b < (b+1)^2$, de donde $x^2 < (b+1)^2$, por lo cual $x < b+1$, y $b+1$ es cota superior de S.

Por el teorema de completitud sabemos que existe $\sup(S) \in \mathbb{R}$. Afirmamos que si $a = \sup(S)$, entonces $a^2 = b$. Lo demostraremos usando la ley de tricotomía. Primero supongamos que $a^2 < b$. Notemos que

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < a^2 + \frac{2a+1}{n}.$$

Por otro lado,

$$\frac{b-a^2}{2a+1} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \frac{1}{n} < \frac{b-a^2}{2a+1} \Rightarrow \quad \frac{2a+1}{n} < b - a^2.$$

Por lo tanto

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < a^2 + b - a^2 = b,$$

y $a + \frac{1}{n} \in S$, lo cual es absurdo.

Análogamente, podemos ver que a^2 no puede ser mayor que b ya que tomando $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tendremos que $(a - \frac{1}{n})^2 > b$. Así que por la ley de tricotomía llegamos a que $a^2 = b$. $\square$

Observación 2.3.7. *Si $b > 0$ y $a^2 = b$, entonces $(-a)^2 = b$. El real positivo que verifica $a^2 = b$ es único y se llama raíz cuadrada de b, y se denota por $\sqrt{b}$. Análogamente podemos considerar la raíz n-ésima de un número:*

- *$n \in \mathbb{N}$ impar $\Rightarrow \forall\, b \in \mathbb{R}\ \exists!\ a \in \mathbb{R}$ tal que $a^n = b$*

- *$n \in \mathbb{N}$ par $\Rightarrow \forall\ b \in \mathbb{R}^+\ \exists!\ a > 0$ tal que $a^n = b$.*
  $\sqrt[n]{b}$ es la notación para la raíz n-ésima de b, aunque es más conveniente escribir $b^{\frac{1}{n}}$.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 1 - Primer parcial segundo semestre 2023) Se considera el conjunto

$$A = \left\{ \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\}$$

Entonces

A) A no está acotado inferiormente.

B) A tiene ínfimo pero no mínimo.

C) A tiene supremo pero no máximo.

D) A tiene supremo y máximo.

E) A no está acotado superiormente.

Solución.

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{2^{n+1}}{2^n} - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\} \\ &= \left\{ 2 - \frac{1}{2^n} : n \in \mathbb{Z}, n \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

Dado que $\frac{1}{2^n} > 0$ para todo $n \geq 0$, tenemos que $2 - \frac{1}{2^n} < 2$ para todo $n \geq 0$. Obtenemos, entonces, que 2 es una cota superior de A. Veamos que 2 es el supremo de A. Para ello, queremos probar que 2 es la menor cota superior de A, es decir dado $\epsilon > 0$, hay que probar que $2 - \epsilon$ no es cota superior de A. Tomamos $N > 0$ tal que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$ y se cumple que

$$2 + \frac{1}{2^N} < 2 + \epsilon \quad \Rightarrow \quad 2 - \epsilon < 2 - \frac{1}{2^N}$$

Entonces $x = 2 - \frac{1}{2^N} \in A$ pero $2 - \epsilon < x$ por lo que $2 - \epsilon$ no es cota superior de A. Por lo tanto, $\sup(A) = 2$ y, como $2 \notin A$, conluímos que A tiene supremo pero no máximo. Luego, la respuesta correcta es **C)**.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 1 - Primer parcial primer semestre 2019) Consideremos el conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \colon x^2 < 2\} \cap [0, +\infty)$$

Elija la opción correcta:

A) Este conjunto tiene supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

B) El mínimo de este conjunto es 0 y no hay máximo.

C) Este conjunto tiene supremo e ínfimo, pero no tiene ni máximo ni mínimo.

D) Este conjunto tiene ínfimo pero no supremo.

E) Este conjunto tiene supremo pero no ínfimo.

Solución.

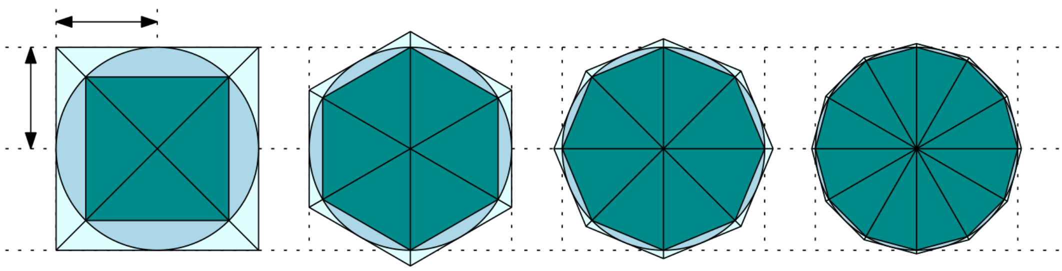
$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Q} \colon x^2 < 2\} \cap [0, +\infty) \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < 2\} \cap \mathbb{Q} \cap [0, +\infty) \\ &= (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \cap [0, +\infty) \\ &= [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Dado que $A \subset [0, \sqrt{2})$, tenemos que $0 \leq x$ para todo $x \in A$. Como además $0 \in A$, tenemos que 0 es el mínimo del conjunto A. Por otro lado, dado que $A \subset [0, \sqrt{2})$, tenemos que $x < \sqrt{2}$ para todo $x \in A$, es decir $\sqrt{2}$ es una cota superior de A. Además, si $y \in \mathbb{R}$ verifica $0 < y < \sqrt{2}$ entonces existe un racional z tal que $y < z < \sqrt{2}$, es decir, $\sqrt{2}$ es la menor cota superior de A. Por lo tanto $\sup(A) = \sqrt{2}$. Luego, dado que $\sqrt{2} \notin A$, concluímos que A no tiene máximo y la respuesta correcta es la **B)**.

Capítulo 3

Integración

La teoría de la integración es una herramienta fundamental para calcular las áreas de las regiones del plano definidas a partir de curvas. Sus orígenes se remontan a más de 2300 años, cuando los matemáticos griegos calculaban áreas por el método de *exhaución* [1]. Este método consistía en aproximar las figuras curvas (tales como los círculos, las elipses o las parábolas) por polígonos para obtener aproximaciones del área de dichas figuras. Por ejemplo, la siguiente figura muestra cómo se puede aproximar un círculo por pares de polígonos regulares (uno adentro, y otro afuera), para obtener aproximaciones por defecto y por exceso de su área:



Los matemáticos griegos también usaron el mismo método con éxito para calcular los volúmenes de sólidos tales como las esferas, los cilindros o los conos, aproximándolos por poliedros.

El cálculo integral moderno apareció al final del siglo XVII, cuando el matemático y filósofo alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) descubrió un vínculo sorprendente entre la integración y la derivación [2]. Sin embargo, la definición de Leibniz carecía de una

[1] El método de exhaución fue introducido por Eudoxo de Cnido (390–337 a.C.) y completado por Arquímedes de Siracusa (287–212 a. C.), quienes lo usaron para calcular múltiples áreas y volúmenes.

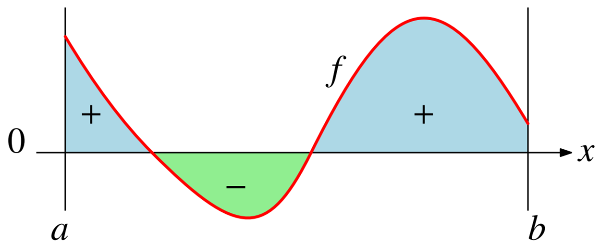
[2] Este vínculo es el objeto del *teorema fundamental del cálculo*, que veremos más adelante en este curso. En este capítulo, sólo nos interesaremos por el problema que consiste en definir rigurosamente la noción de área.

fundamentación rigurosa, pues le faltaba una definición precisa de los números reales. (De hecho, las nociones fundamentales de ínfimo y de supremo, así como el axioma de completitud, fueron introducidos recién en la primera mitad del siglo XIX.) La primera formalización rigurosa de la teoría de la integración fue dada por el matemático alemán Bernhard Riemann (1826–1866), y es esencialmente ésta la que vamos a presentar en este capítulo [3].

3.1. Integral de una función

3.1.1. Objetivo y método

El problema de la teoría de la integración es el siguiente: dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), ¿cómo medir el área algebraica de la región del plano ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f?



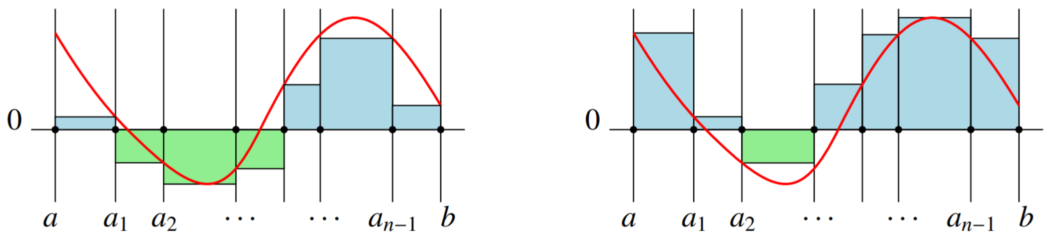
Por *área algebraica*, se entiende el número real (positivo, negativo o nulo) obtenido contando con un signo positivo las áreas por encima del eje x, y con un signo negativo las áreas por debajo del eje x, como indicado en la figura anterior [4]. En matemática, el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f se llama *integral* de la función f en el intervalo $[a, b]$, y el proceso que permite determinar dicha área se llama *integración*.

El método: Para determinar la integral de la función f en el intervalo $[a, b]$, el método de Riemann consiste en aproximar (por defecto y por exceso) la región correspondiente por regiones poligonales construidas a partir de rectángulos, y cuya área (algebraica) se calcula

[3]Existe otra teoría de la integración, debida al matemático francés Henri Lebesgue (1875–1941), que permite integrar más funciones, y que constituye hoy el marco de referencia de la teoría de la integración. En este curso, nos restringiremos a la teoría de Riemann, cuyas definiciones son más sencillas y que es (más que) suficiente para las necesidades de este curso introductorio.

[4]El *área algebraica* de la región ubicada entre entre el eje x y la gráfica de la función f tiene propiedades algebraicas mucho mejores que el *área geométrica* correspondiente (obtenida contando todas las áreas involucradas con un signo positivo), y es la razón por qué la teoría de la integración sólo considera ésa. Por otro lado, ambas nociones de área (algebraica y geométrica) coinciden para las funciones positivas o nulas, y cuando se trata de calcular el área geométrica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de un función f con un signo cualquiera, basta con remplazar la función f por la función $x \mapsto |f(x)|$ (véase Sección 3.2.3).

fácilmente sumando las áreas (algebraicas) de dichos rectángulos[5] (Sección 3.1.3):



Formalmente, cada par de aproximaciones (una por defecto y otra por exceso) es construido a partir de una *partición* $P = \{a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, b\}$ del intervalo $[a, b]$ (Sección 3.1.2), cuyos puntos definen los límites horizontales de los rectángulos que usaremos para construir dichas aproximaciones. Considerando particiones cada vez más finas del intervalo $[a, b]$, se obtienen aproximaciones cada vez más precisas del área deseada, la cual puede ser definida como el "límite" (Sección 3.1.4) de las áreas de todas las aproximaciones así definidas.

3.1.2. Particiones de un intervalo

Definición 3.1.1 (Partición de un intervalo)**.** Sea un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, con $a < b$. Se llama *partición* de $[a, b]$ a todo subconjunto finito $P \subset [a, b]$ tal que $a \in P$ y $b \in P$.

Notación

En lo siguiente, escribiremos sistemáticamente las particiones P del intervalo $[a, b]$ ordenando sus elementos de modo creciente; es decir: de la forma

$$P = \{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \text{ con } a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

Intuitivamente, una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$ sirve para descomponer dicho intervalo en una unión finita de subintervalos esencialmente disjuntos[6]:

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots [a_{n-1}, a_n]$$

Definición 3.1.2 (Orden entre las particiones)**.** Las particiones de un intervalo $[a, b]$ están ordenadas por el orden de la inclusión. Así, dadas dos particiones P y Q del intervalo $[a, b]$ tales que $P \subset Q$, se dice que Q es más *fina* que P, o que P es más *gruesa* de Q.

[5] El área algebraica de un rectángulo de ancho $l < 0$ (positivo) y de altura $L \in \mathbb{R}$ (algebraica) es el producto $l \times L$. Este producto es positivo, negativo o nulo según si la altura algebraica L es positiva, negativa o nula (siendo el ancho positivo, por convención).

[6] Es decir: subintervalos que no se intersectan, salvo quizás en sus puntos extremos.

Observación 3.1.3. *La relación de inclusión entre las particiones del intervalo* $[a, b]$ *es una relación de orden parcial, en el sentido de que es una relación*

- ***reflexiva:*** $P \subset P$
- ***transitiva:*** *si* $P \subset Q$ *y* $Q \subset R$*, entonces* $P \subset R$
- ***antisimétrica:*** *si* $P \subset Q$ *y* $\mathrm{P} \subset Q$*, entonces* $P = Q$*.*

para todas las particiones $P, Q, R \subset [a, b]$*. Por otro lado, esta relación no es una relación de orden total (al contrario de la relación de orden usual sobre los números reales*[7]*), pues existen pares de particiones no comparables, como lo muestra el siguiente ejemplo:*

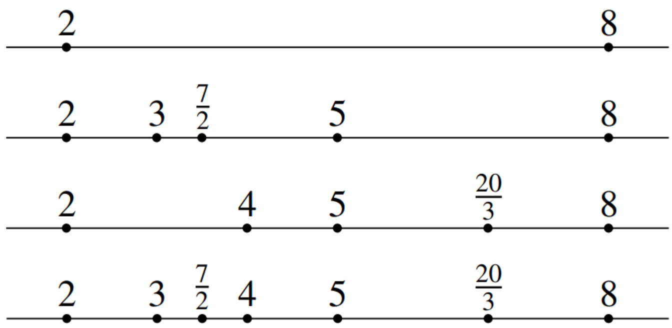
Ejemplo 3.1.4. *Sean las siguientes cuatro particiones del intervalo* $[2, 8]$*:*

$$P_0 = \{2, 8\}$$

$$P_1 = \{2, 3, \tfrac{7}{2}, 5, 8\}$$

$$P_2 = \{2, 4, 5, \tfrac{20}{3}, 8\}$$

$$P_3 = \{2, 3, \tfrac{7}{2}, 4, 5, \tfrac{20}{3}, 8\}$$



Se observa que $P_0 = \{2, 8\}$ *es la partición más gruesa del intervalo* $[2, 8]$*, pues está incluida en cualquier otra partición de* $[2, 8]$*. En particular, está incluida en las particiones* P_1, P_2 *y* P_3*. Por otro lado, las particiones* P_1 *y* P_2 *no son comparables, pues* $P_1 \not\subset P_2$ *y* $P_2 \not\subset P_1$ *(aunque tengan tres elementos comunes:* $2, 5$ *y* 8*). Finalmente, se observa que la partición* $P_3 = P_1 \cup P_2$ *es más fina que las particiones* P_0, P_1 *y* P_2*, pues* $P_0 \subset P_1 \subset P_3$ *y* $P_0 \subset P_2 \subset P_3$*.*

Observación 3.1.5.

- *Dado un intervalo cerrado* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *(con* $a < b$*), se observa más generalmente que el conjunto* $P_0 = \{a, b\}$ *es una partición del intervalo* $[a, b]$ *: es la partición más gruesa de* $[a, b]$*, pues* $P_0 \subset P$ *para toda partición* P *de* $[a, b]$*.*
- *Dadas dos particiones* P_1 *y* P_2 *de* $[a, b]$*, su unión* $P_1 \cup P_2$ *también es una partición de* $[a, b]$*, que es más fina que* P_1 *y* P_2 *a la vez:* $P_1 \subset P_1 \cup P_2$ *y* $P_2 \subset P_1 \cup P_2$*. Se dice que la unión* $P_1 \cup P_2$ *es el refinamiento común de las dos particiones* P_1 *y* P_2*.*

Definición 3.1.6 (Norma de una partición)**.** Dada una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$, se llama *norma* de P y se escribe $\|P\|$ a la longitud del subintervalo $[a_i, a_{i+1}] \subset [a, b]$, más grande definido por la partición P:

$$\|P\| = \max_{i=0,\ldots,n-1}(a_{i+1} - a_i)$$

[7] Recordemos que para todos los números reales x e y, tenemos que $x \leq y$ o $y \leq x$ (“o” inclusivo)

Por construcción, tenemos que: $0 \leq \|P\| \leq b - a$.

Observación 3.1.7. *Dadas dos particiones P y Q del intervalo $[a, b]$, es claro que $P \subset Q$ implica que $\|Q\| \leq \|P\|$, pero el recíproco no se cumple en general (véase el ejercicio más abajo).*

Ejercicio 3.

1. Construir dos particiones P y Q del intervalo [0, 1] que no sean comparables (es decir: $P \not\subset Q$ y $Q \not\subset P$) y tales que $\|Q\| < \|P\|$
2. Dada una partición P de un intervalo $[a, b]$, demostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $Q \subset [a, b]$ tal que $P \subset Q$ (es decir: Q es más fina que P) y $\|Q\| < \epsilon$.

3.1.3. Sumas inferiores y superiores

En esta sección, se considera una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida sobre un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (con $a < b$). Además, asumiremos que la función f está acotada[8] en el intervalo $[a, b]$, en el sentido de que existen dos números k_* y k^* tales que

$$k_* \leq f(x) \leq k^* \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Notación

Dado un subintervalo $[a_1, b_1] \subset [a, b]$ (con $a \leq a_1 < b_1 \leq b$), se observa que el conjunto $\{f(x) \colon x \in [a_1, b_1] \subset \mathbb{R}\}$ está acotado inferiormente por k_* y superiormente por k^*. Por el axioma de completitud, este conjunto tiene ínfimo y supremo, que escribiremos:

$$\text{ínf}(f, [a_1, b_1]) = \inf \{f(x) \colon x \in [a_1, b_1]\}$$
$$\sup(f, [a_1, b_1]) = \sup \{f(x) \colon x \in [a_1, b_1]\}$$

Por construcción, tenemos que: $k_* \leq \text{ínf}(f, [a_1, b_1]) \leq \sup(f, [a_1, b_1]) \leq k^*$.

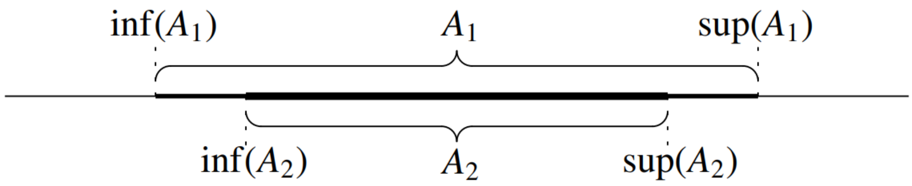
Lema 3.1.8. *Si $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] \subset [a, b]$, entonces:*

$$\text{ínf}(f, [a_1, b_1]) \leq \text{ínf}(f, [a_2, b_2]) \leq \sup(f, [a_2, b_2]) \leq \sup(f, [a_1, b_1])$$

Demostración.

Sean $A_1 = \{f(x) \colon x \in [a_1, b_1]\}$ y $A_2 = \{f(x) \colon x \in [a_2, b_2]\}$. Por construcción, tenemos que $A_2 \subset A_1$ pues $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$:

[8] En lo siguiente, sólo integraremos funciones definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$, y cuyos valores están acotados por dos números k_* y k^* fijados. Ambas condiciones sirven para asegurarnos que la región que nos interesa está incluida en un rectángulo (aquí: el producto cartesiano $[a, b] \times [k_*, k^*]$) y que su área es finita.

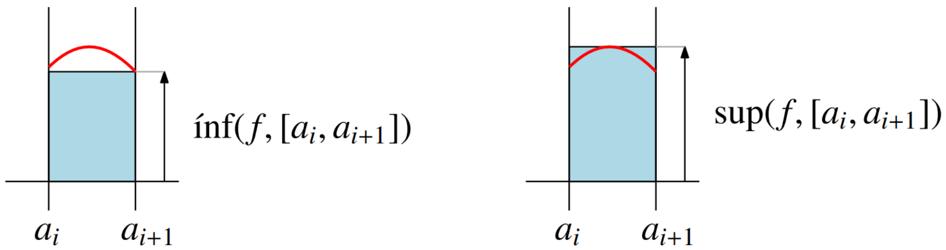


Se trata de demostrar que $\text{ínf}(A_1) \leq \text{ínf}(A_2) \leq \sup(A_2) \leq \sup(A_1)$. Demostremos la primera desigualdad. Por construcción, el número $\text{ínf}(A_1)$ es una cota inferior del conjunto A_1, y como $A_2 \subset A_1$, el mismo número también es una cota inferior del conjunto A_2. Pero como todas las cotas inferiores de A_2 son menores o iguales a $\text{ínf}(A_2)$ (que es la cota inferior más grande de A_2), se deduce que $\text{ínf}(A_1) \leq \text{ínf}(A_2)$. La desigualdad $\sup(A_2) \leq \sup(A_1)$ se demuestra de manera análoga, y la desigualdad central $\text{ínf}(A_2) \leq \sup(A_2)$ es obvia. $\square$

Ahora, consideremos una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$.

En cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ (con $i = 0, \ldots, n-1$), la función f toma valores entre los dos números $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$ y $\sup(f, [a_i, a_{i+1}])$. Así, en dicho subintervalo, se puede aproximar el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f por las áreas de los siguientes dos rectángulos:

- un rectángulo de ancho $a_{i+1} - a_i > 0$ y de altura algebraica $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \in \mathbb{R}$, cuya área algebraica es $(a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$ (aproximación por defecto)
- un rectángulo de ancho $a_{i+1} - a_i > 0$ y de altura algebraica $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \in \mathbb{R}$, cuya área algebraica es $(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$ (aproximación por exceso)



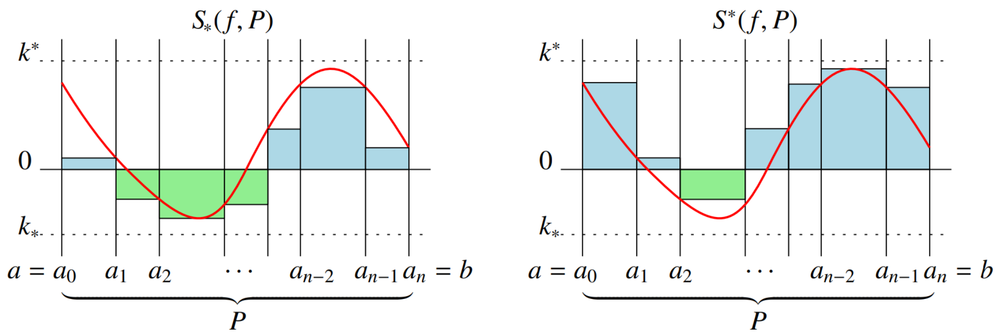
Sumando estas dos familias de números para todo $i = 0, \ldots, n-1$, se obtienen las siguientes dos aproximaciones del área algebraica de la región que nos interesa:

Definición 3.1.9 (Suma inferior y suma superior respecto a una partición.)**.** Dada una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$, definen la *suma inferior* $S_*(f, P)$ y la *suma superior* $S^*(f, P)$ de la función f respecto a la partición P por:

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \quad \text{(suma inferior de } f \text{ respecto a } P\text{)}$$

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) \quad \text{(suma superior de } f \text{ respecto a } P\text{)}$$

Gráficamente, la suma inferior $S_*(f, P)$ y la suma superior $S^*(f, P)$ de la función f respecto a la partición P representan las áreas algebraicas de las regiones poligonales dibujadas en la siguiente figura (a la izquierda para la suma inferior y a la derecha para la suma superior):



Intuitivamente, la suma inferior $S_*(f, P)$ constituye una aproximación por defecto del área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f , mientras la suma superior $S^*(f, P)$ constituye una aproximación por exceso de dicha área. Se demuestra que:

Proposición 3.1.10. *Para toda partición $P \subset [a, b]$, tenemos que:*

$$S_*(f, P) \leq S^*(f, P)$$

Demostración. Escribamos $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ con $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$. Para cada $i = 0, \ldots, n-1$, se observa que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \leq \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$. Multiplicando ambos lados de la desigualdad anterior por el número $a_{i+1} - a_i > 0$, se obtiene la desigualdad

$$(a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \leq (a_{i+1} - a_i) \cdot \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

y sumándola para todo $i = 0, \ldots, n-1$, se deduce $S_*(f, P) \leq S^*(f, P)$. □

Ejercicio 4. A partir de lo anterior, demostrar que

$$(b - a)k_* \leq S_*(f, P) \leq S^*(f, P) \leq (b - a)k^*$$

para toda partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a, b]$.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 2 - primer parcial segundo semestre 2023) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$ y $P = \{-1, 0, 1, 2\}$ una partición del intervalo $[-1, 2]$. Si $S_*(f, P)$ es la suma inferior correspondiente a la partición P, entonces $S_*(f, P)$ vale:

A) -2 B) 0 C) $\frac{2}{3}$ D) 3 E) 5

Solución.

$$\begin{aligned} S_*(f,P) &= \sum_{i=0}^{3} \text{ínf}(f,[a_i,a_{i+1}]) \cdot (a_{i+1} - a_i) \\ &= \underbrace{\text{ínf}(f,[-1,0])}_{f(0)} \cdot (0-(-1)) + \underbrace{\text{ínf}(f,[0,1])}_{f(0)} \cdot (1-0) + \underbrace{\text{ínf}(f,[1,2])}_{f(1)} \cdot (2-1)) \\ &= (-1)\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

Donde $\text{ínf}(f,[-1,0]) = f(0)$ ya que f es decreciente en el intervalo $[-1,0]$, $\text{ínf}(f,[0,1]) = f(0)$ ya que f es creciente en el intervalo $[0,1]$ y $\text{ínf}(f,[1,2]) = f(1)$ ya que f es creciente en el intervalo $[1,2]$.

Ejercicio 5. Sea $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = 4x - x^2$.

1. Bosquejar la gráfica de la función f.
2. Demostrar que f es monótona creciente en $[0,2]$ y monótona decreciente en $[2,4]$. (Sugerencia: se puede estudiar el signo de la derivada de f, o bien demostrar el resultado directamente, observando que $f(x) = 4 - (x-2)^2$.)
3. Rellenar la siguiente tabla de valores:

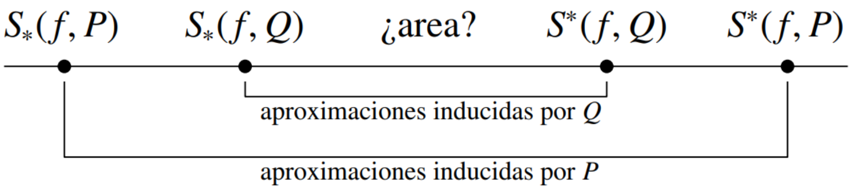
$x =$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x) =$									

4. Calcular las sumas inferiores $S_*(f,P)$y las sumas superiores $S^*(f,P)$ para las siguientes particiones del intervalo $[0,4]$, así como las normas de dichas particiones:
   - $P_0 = \{0; 4\}$
   - $P_1 = \{0; 2; 4\}$
   - $P_2 = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
   - $P_3 = \{0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4\}$

   Observación: Para determinar los ínfimos y supremos de la función f en los subintervalos definidos por las particiones P_0, P_1, P_2 y P_3, conviene usar las propiedades de monotonía demostradas en 2.

5. Comparar los pares de aproximaciones $S_*(f,P)$ y $S^*(f,P)$ para $P = P_0, P_1, P_2, P_3$. ¿Cuál es el mejor par de aproximaciones? ¿y el peor?

Más generalmente, se puede demostrar que cuando dos particiones P y Q del intervalo $[a,b]$ son tales que $P \subset Q$ (es decir: Q es más fina que P), las sumas $S_*(f,P)$ y $S^*(f,P)$ inducidas por la partición más fina siempre constituyen un mejor par de aproximaciones del área deseada que las sumas $S_*(f,P)$ y $S^*(f,P)$ inducidas por la partición más gruesa:



Formalmente:

Proposición 3.1.11. *Si dos particiones $P, Q \subset [a,b]$ son tales que $P \subset Q$, entonces*

$$S_*(f,P) \leq S_*(f,Q) \leq S^*(f,Q) \leq S^*(f,P)$$

Demostración. En primer lugar, se considera el caso particular donde las particiones P y Q sólo difieren por un punto, es decir: $Q = P \cup \{a'\}$, con $a' \notin P$. En este caso, se pueden escribir

$$P = \{a_0, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\} \quad \text{y} \quad Q = \{a_0, \ldots, a_k, a', a_{k+1}, \ldots, a_n\}$$

suponiendo que el nuevo punto a' agregado por la partición Q se interpone entre los puntos a_k y a_{k+1} de la partición inicial P (para algún $k = 0, \ldots, n-1$). Así, la suma inferior de la función f respecto a la partición P se puede descomponer del modo siguiente

$$\begin{aligned} S_*(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf(f, [a_i, a_{i+1}]) \\ &= S_{i<k} + (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}]) + S_{i>k} \end{aligned}$$

agrupando todos los sumandos correspondientes a los índices $i < k$ en la suma $S_{i<k}$, y todos los sumandos correspondientes a los índices $i > k$ en la suma $S_{i>k}$. Así obtenemos que

$$\begin{aligned} S_*(f,P) &= S_{i<k} + (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}]) + S_{i>k} \\ &= S_{i<k} + ((a' - a_k) + (a_{k+1} - a')) \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}]) + S_{i>k} \\ &= S_{i<k} + (a' - a_k) \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}]) + (a_{k+1} - a') \cdot \inf(f, [a_k, a_{k+1}]) + S_{i>k} \\ &\leq S_{i<k} + (a' - a_k) \cdot \inf(f, [a_k, a']) + (a_{k+1} - a') \cdot \inf(f, [a', a_{k+1}]) + S_{i>k} \\ &= S_*(f, P \cup \{a'\}) \\ &= S_*(f,Q) \end{aligned}$$

observando que $\inf(f,[a_k,a_{k+1}]) \leq \inf(f,[a_k,a'])$ y $\inf(f,[a_k,a_{k+1}]) \leq \inf(f,[a',a_{k+1}])$ por el lema 3.1.8. De modo análogo, se demuestra que

$$S^*(f,P) \geq S^*(f,P\cup\{a'\}) = S^*(f,Q)$$

usando de nuevo el lema 3.1.8, pero con los supremos. Ahora, consideremos el caso general, donde P y Q son dos particiones tales que $P \subset Q$, pero de tamaños cualesquiera. Como P y Q son conjuntos finitos tales que $P \subset Q$, se puede escribir $Q = P \cup \left\{a'_1,\ldots,a'_p\right\}$ para algún $p \in \mathbb{N}$. Usando de modo repetido el caso particular demostrado anteriormente, obtenemos[9] que

$$S_*(f,P) \leq S_*(f,P\cup\{a'_1\}) \leq S_*(f,P\cup\{a'_1,a'_2\}) \leq \cdots \leq S_*(f,P\cup\left\{a'_1,a'_2,\ldots,a'_p\right\}) \leq S_*(f,Q)$$

y

$$S^*(f,P) \geq S^*(f,P\cup\{a'_1\}) \geq S^*(f,P\cup\{a'_1,a'_2\}) \geq \cdots \leq S^*(f,P\cup\left\{a'_1,a'_2,\ldots,a'_p\right\}) \geq S^*(f,Q)$$

lo que acaba demostrar que $S_*(f,P) \leq S_*(f,Q) \leq S^*(f,Q) \leq S^*(f,P)$. □

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que todas las sumas inferiores $S_*(f,P)$ (las "aproximaciones por defecto") son menores o iguales a todas la sumas superiores $S^*(f,P)$ (las "aproximaciones por exceso"), independientemente de las particiones P y Q:

Proposición 3.1.12. *Para todas las particiones $P,Q \subset [a,b]$, tenemos que:*

$$S_*(f,P) \leq S^*(f,Q)$$

Demostración.

Por la proposición anterior, tenemos que

$$S_*(f,P) \leq S_*(f,P\cup Q) \leq S^*(f,P\cup Q) \leq S^*(f,Q)$$

□

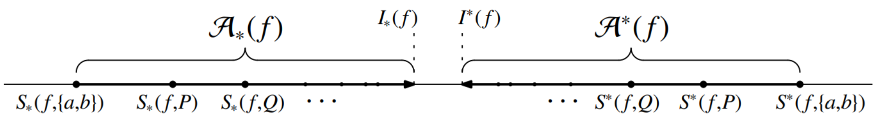
3.1.4. Integral inferior y superior

Los lectores habrán observado que nunca definimos formalmente lo que es el "área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica", y que tampoco usamos esta noción para demostrar los resultados anteriores. Hasta ahora, la noción de área es una noción puramente intuitiva, sin definición formal, que sólo usamos como un hilo conductor para definir (formalmente) las sumas inferiores y superiores. Al final, se obtienen dos conjuntos de "aproximaciones":

[9] Formalmente, la demostración del caso general se efectúa por inducción sobre el número p de elementos agregados, usando el caso particular para pasar de p a $p+1$ en el paso inductivo (ejercicio).

- el conjunto $\mathcal{A}_*(f) = \{S_*(f, P) \colon P$ partición de $[a, b]\}$ formado por todas las sumas inferiores de la función f, que se pueden considerar como aproximaciones por defecto del área deseada (y todavía no definida)
- conjunto $\mathcal{A}^*(f) = \{S^*(f, P) \colon P$ partición de $[a, b]\}$ formado por todas las sumas superiores de la función f, que se pueden considerar como aproximaciones por exceso del área deseada.

Además, demostramos (Proposición 3.1.12) que todos los elementos del conjunto $\mathcal{A}_*(f)$ son menores o iguales a todos los elementos del conjunto $\mathcal{A}^*(f)$:



En particular:

- el conjunto $\mathcal{A}_*(f)$ está acotado superiormente (por cualquier elemento de $\mathcal{A}^*(f)$)
- el conjunto $\mathcal{A}^*(f)$ está acotado inferiormente (por cualquier elemento de $\mathcal{A}_*(f)$)

Lo que justifica la siguiente definición:

Definición 3.1.13 (Integral inferior y superior.)**.** Se llaman *integral inferior* e *integral superior* de la función f a los dos números $I_*(f)$ y $I^*(f)$ definidos por:

$$I_*(f) = \sup(\mathcal{A}_*(f)) = \sup_{P \subset [a,b]} S_*(f, P) \qquad \text{(integral inferior de } f\text{)}$$

$$I^*(f) = \inf(\mathcal{A}^*(f)) = \inf_{P \subset [a,b]} S^*(f, P) \qquad \text{(integral superior de } f\text{)}$$

Así:

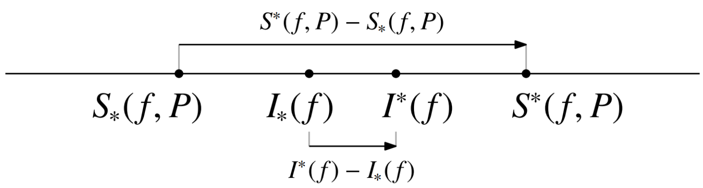
- La integral inferior $I_*(f)$ de la función f es definida como el supremo de todas las sumas inferiores de la función f. Intuitivamente, este número constituye la mejor aproximación por defecto del área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f
- La integral superior $I^*(f)$ de la función f es definida como el ínfimo de todas las sumas superiores de la función f. Intuitivamente, este número constituye la mejor aproximación por exceso de la misma área.

En particular, se verifica fácilmente que:

Proposición 3.1.14.
$$I_*(f) \leq I^*(f)$$

Demostración. Se sigue de la proposición 3.1.12 (ejercicio). $\square$

Observación 3.1.15. *Por definición de las integrales inferior $I_*(f)$ y superior $I^*(f)$, tenemos que $S_*(f,P) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S^*(f,P)$ para toda partición $P \subset [a,b]$, lo que implica que*
$$0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S^*(f,P) - S_*(f,P)$$
como se puede observar en la siguiente figura:



Más generalmente, se verifica de mismo modo (usando la proposición 3.1.11) que si $P, Q, R, \dots$ son particiones del intervalo $[a,b]$ tales que $P \subset Q \subset R \subset \dots$ entonces:

$$0 \leq I^* - I_*(f) \leq \cdots \leq S^*(f,R) - S_*(f,R) \leq S^*(f,Q) - S_*(f,Q) \leq S^*(f,P) - S_*(f,P)$$

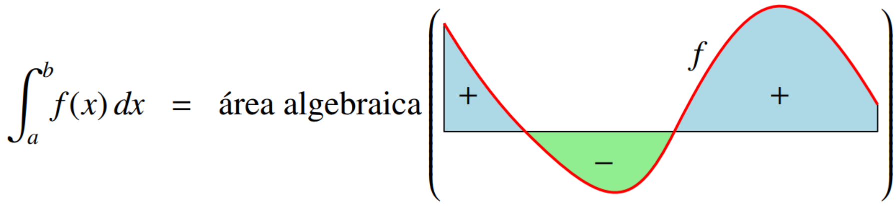
En lo siguiente, veremos que cuando la función f es suficientemente regular (lo que será el caso para la gran mayoría de las funciones que consideraremos en este curso), los dos números $I^*(f)$ y $I^*(f)$ son iguales. En este caso, podremos considerar que el número $I^*(f) = I^*(f)$ constituye una definición del área deseada. En los otros casos, consideraremos que la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f no tiene área bien definida. Formalmente:

Definición 3.1.16 (Función integrable)**.** Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (acotada) es *integrable* cuando sus integrales inferior y superior coinciden:

$$I_*(f) = I^*(f)$$

Cuando es el caso, este número se llama la *integral* de la función f en el intervalo $[a,b]$, y se escribe
$$\int_a^b f \qquad \text{o bien} \qquad \int_a^b f(x)dx$$

Así, por construcción, la integral de la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ representa el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de f:



Recordemos que, por definición, sólo las funciones acotadas pueden ser integrables.

Observación 3.1.17. *Históricamente, la notación anterior fue introducida en 1686 por Leibniz, que definía la integral de una función f como una "suma continua"*[10] *de áreas de rectángulos infinitamente finos, de altura $f(x)$ y de ancho infinitesimal dx:*

$$\int_a^b f(x)dx = \text{“}\sum_{a\in[a,b]}\text{”}\, f(x)\cdot dx$$

En particular, el símbolo $\int$ viene de la caligrafía de la letra s[11] *en el siglo XVII.*

En lo que sigue, usaremos con frecuencia los siguientes dos criterios para demostrar que una función acotada es integrable:

Proposición 3.1.18 (Criterio de integración "a menos de ϵ")**.** *Para toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y para todo número $I \in \mathbb{R}$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(1) La función f es integrable en $[a,b]$ y su integral vale I.

(2) Para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que

$$I - \epsilon < S_*(f,P) \leq S^*(f,P) < I + \epsilon$$

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que $I_*(f) = I^*(f) = I$. Dado $\epsilon > 0$, queremos construir una partición P que cumpla las desigualdades deseadas. Como $I = I_*(f)$ es el supremo de las sumas inferiores de f, existe una partición $P_1 \subset [a,b]$ tal que tal que $I - \epsilon < S_*(f,P_1) \leq I$. Y como $I = I^*(f)$ es el ínfimo de las sumas superiores de f, existe una partición $P_2 \subset [a,b]$ tal que $I \leq S^*(f,P_2) < I + \epsilon$. Tomando $P = P_1 \cup P_2$, se deduce de lo anterior (por la proposición 3.1.11)) que

$$I - \epsilon < S_*(f,P_1) \leq S_*(f,P) \leq S^*(f,P) \leq S^*(f,P_2) < I + \epsilon$$

[10] Aunque la definición de Leibniz ya no sea considerada como correcta según los criterios modernos, las intuiciones subyacentes todavía son muy útiles en física y a veces también en matemática.

[11] La s de la palabra latina «summa» (suma), que se escribía «$\int$umma» en el tiempo de Leibniz.

(2) $\Rightarrow$ (1) Como ambos números $I_*(f)$ e $I^*(f)$ se intercalan entre las sumas inferior $S_*(f,P)$ y superior $S^*(f,P)$ de la función f para toda partición $P \subset [a,b]$, la condición (2) implica que

$$I - \epsilon < I_*(f) < I + \epsilon \quad \text{e} \quad I - \epsilon < I^*(f) < I + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, tenemos que $I_*(f) = I^*(f) = I$ □.

Observación 3.1.19. *El criterio anterior es un criterio de integración, que sirve (1) para determinar si la función considerada es integrable y (2) para determinar el valor de su integral. A veces, sólo se necesita determinar si la función considerada es integrable, sin conocer el valor de su integral. En este caso, se usa el siguiente criterio de integrabilidad:*

Proposición 3.1.20 (Criterio de integrabilidad “a menos de ϵ”)**.** *Para toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y para todo número $I \in \mathbb{R}$, las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(1) La función f es integrable en $[a,b]$ y su integral vale I.

(2) Para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que

$$0 \leq S^*(f,P) - S_*(f,P) \leq \epsilon$$

.

Demostración.

(1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que la función f es integrable en $[a,b]$, y llamaremos I a su integral. Dado $\epsilon > 0$, existe por la proposición anterior una partición $P \subset [a,b]$ tal que

$$I - \epsilon/2 < S_*(f,P) \leq S^*(f,P) < I + \epsilon/2$$

Entonces, tenemos que $0 \leq S^*(f,P) - S_*(f,P) < (I + \epsilon/2) - (I - \epsilon/2) = \epsilon$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Como $0 \leq I^*(f) - I_*(f) \leq S^*(f,P) - S_*(f,P)$ para toda partición $P \subset [a,b]$, la condición (2) implica que $0 \leq I^*(f) - I_*(f) < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, $I_*(f) = I^*(f)$. □

3.1.5. Ejemplos y contraejemplo

Ejemplo 3.1.21 (Integración de una función constante.)**.** *Dados un intervalo cerrado $[a,b]$ (con $a < b$) y un número $k \in \mathbb{R}$, se considera la función constante $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = k$$

para todo $k \in \mathbb{R}$.

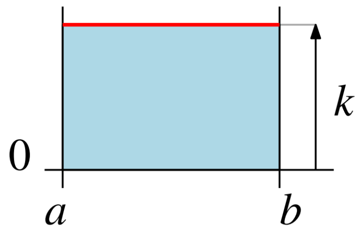
Para demostrar que la función f es integrable, se considera una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ (cualquiera) del intervalo $[a, b]$, y se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ (con $i = 0, \ldots, n-1$), tenemos que $\inf(f, [a_i, a_{i+1}]) = \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = k$. Así, la sumas inferior $S_*(f, P)$ y superior $S^*(f, P)$ de la función f respecto a la partición P son iguales, y:

$$S_*(f,P) = S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot k = k \cdot \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) = k \cdot (a_n - a_0) = k \cdot (b - a)$$

Por lo tanto, tenemos que $\mathcal{A}_*(f) = \mathcal{A}^*(f) = \{(b-a)k\}$ (todas las aproximaciones son iguales), de tal modo que $I_*(f) = I^*(f) = (b-a)k$. Así, la función f es integrable en $[a, b]$ y

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx = (b-a)k$$

Observación 3.1.22. *Como era de esperar, la integral $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b kdx$ de la función constante $f(x) = k$ en el intervalo $[a, b]$ es igual al área algebraica $(b-a) \times k$ de un rectángulo de ancho $b - a > 0$ y de altura algebraica $k \in \mathbb{R}$.*



En la Sección 3.3 y en resto del curso, veremos otros muchos ejemplos (menos triviales) de funciones integrables cuyas integrales se pueden calcular sencillamente en algunos casos. Sin embargo, también existen funciones no integrables, así como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3.1.23 (Función de Dirichlet)**.** *Consideremos la función de Dirichlet $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, que está definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sea una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ cualquiera del intervalo $[0, 1]$. Se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ (con $i = 0, \ldots, n-1$), existen a la vez números racionales (para los cuales $f(x) = 1$) y números irracionales (para los cuales $f(x) = 0$, de tal modo que

$$\inf(f, [a_i, a_{i+1}]) = 0 \quad \textit{mientras} \quad \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = 1$$

. Calculando las sumas inferior y superior correspondientes, se obtiene

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \cdot 0 = 0$$

y

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot 1 = a_n - a_0 = 1$$

y eso para todas las particiones $P \subset [0,1]$. Por lo tanto, tenemos que $I_*(f) = 0$ e $I^*(f) = 1$, lo que demuestra que la función de Dirichlet no es integrable, aunque esté acotada.

Observación 3.1.24. *Intuitivamente, la función de Dirichlet (que alterna entre los valores 0 y 1 infinitas veces en cada subintervalo de $[0,1]$) es tan irregular que el método de aproximación por rectángulos no logra capturar el área de la región correspondiente*[12].

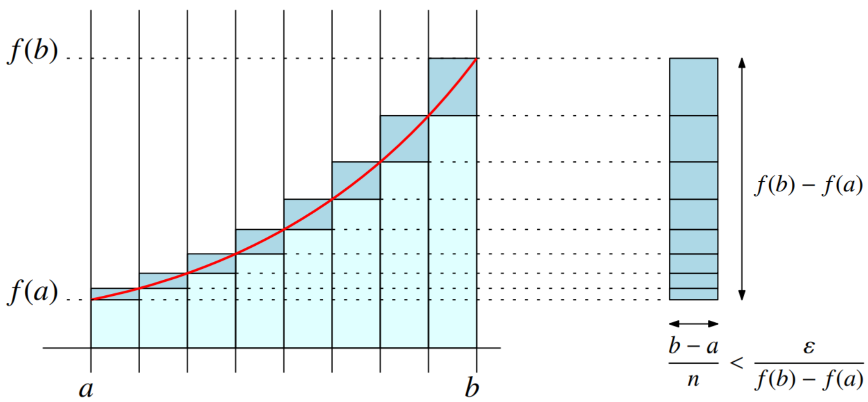
El primer resultado importante de la teoría de la integración es que todas las funciones monótonas (crecientes o decrecientes) son integrables:

Teorema 3.1.25 (Funciones monótonas)**.** *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función monótona creciente o decreciente en el intervalo $[a,b]$, entonces f es integrable en dicho intervalo.*

Demostración. Sólo consideraremos el caso donde f es monótona creciente; el caso donde es monótona decreciente es análogo. Como la función f es monótona creciente en el intervalo $[a,b]$ está acotada entre $f(a)$ y $f(b)$. En el caso particular donde $f(a) = f(b)$, la función f es constante, y ya vimos que es integrable. A partir de ahora, se supone que $f(a) < f(b)$. Para demostrar que la función f es integrable, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ϵ. Dado $\epsilon > 0$ fijado, se puede hallar un entero $n \geq 1$ suficientemente grande para que $\frac{b-a}{n} < \frac{\epsilon}{f(b)-f(a)}$ (por el principio de Arquímedes). Luego se considera la partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[a,b]$ definida por

$$a_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$$

para todo $i = 0, \ldots, n$, de tal modo que todos los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ tengan la misma longitud $\frac{b-a}{n}$.



[12]Sin embargo, la teoría de la integración de Lebesgue permite definir y calcular la integral de la función de Dirichlet, que vale 0. (Intuitivamente, este resultado extraño viene de que hay infinitamente más números irracionales en el intervalo $[0,1]$ que números racionales, aunque parezcan uniformemente mezclados).

Ahora, se observa que en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), la función f es monótona creciente, de tal modo que $\inf(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i)$ mientras $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_{i+1})$. Por lo tanto, tenemos que

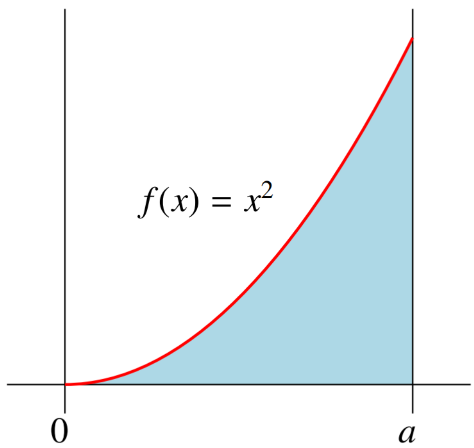
$$\begin{aligned} 0 \le S^*(f,P) - S_*(f,P) &= \sum_{i_0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot f(a_{i+1}) - \sum_{i_0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot f(a_i) \\ &= \sum_{i_0}^{n} (a_{i+1} - a_i) \cdot (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i_0}^{n} (f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} \cdot (f(b) - f(a)) \\ &\le \frac{\epsilon}{f(b) - f(a)} \cdot (f(b) - f(a)) = \epsilon \end{aligned}$$

(véase figura anterior). Así para cada $\epsilon > 0$, demostramos que existe una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \le S^*(f,P) - S_*(f,P) < \epsilon$. Por la Proposición 3.1.20, se deduce que la función f es integrable. $\square$

Ejercicio 6. Usando como modelo la demostración del caso donde la función f es monótona-creciente, redactar la demostración del caso donde f es monótona decreciente, modificando el razonamiento de modo adecuado.

El resultado anterior expresa que el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f siempre está bien definida cuando dicha función es monótona (creciente o decreciente). Sin embargo, este resultado no explica como calcular dicha área. En la práctica, el método de integración depende del ejemplo considerado. Aquí hay uno:

Ejemplo 3.1.26 (Integración de la función $f(x) = x^2$)**.** *Dado un número $a > 0$, queremos integrar la función $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, cuya gráfica es un arco de parábola:*



Como la función $f(x) = x^2$ es monótona creciente en el intervalo $[0, a]$, es integrable por el teorema anterior. Para determinar el valor de su integral, necesitaremos el siguiente lema:

Lema 3.1.27. *Para todos los números reales x e y tales que $0 \leq x \leq y$, tenemos que*

$$(y-x)x^2 \leq \frac{y^3 - x^3}{3} \leq (y-x)y^2$$

Demostración. Se observa que $y^3 - x^3 = (y-x)(x^2 + xy + y^2)$. Además, tenemos que:

$$3x^2 = x^2 + x^2 + x^2 \leq x^2 + xy + y^2 \leq y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2$$

(pues $0 \leq x \leq y$). Multiplicando los miembros extremos y el miembro central de las desigualdades anteriores por el número $y - x \geq 0$, se deduce que:

$$3(y-x)x^2 \leq \underbrace{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}_{y^3 - x^3} \leq 3(y-x)y^2$$

lo que implica inmediatamente las desigualdades deseadas. $\square$

Ahora, consideremos una partición cualquiera $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ del intervalo $[0, a]$. En cada uno de los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, la función f es monótona creciente, de tal modo que $\operatorname{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i) = a_i^2$, mientras $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_{i+1}) = a_{i+1}^2$. Entonces, tenemos que

$$S_*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot a_i^2 \leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_{i+1}^3}{3} - \frac{a_i^3}{3} \right) = \frac{a_n^3}{3} - \frac{a_0^3}{3} = \frac{a^3}{3}$$

(usando el lema anterior para establecer la desigualdad central), mientras

$$S^*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot a_{i+1}^2 \geq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{a_{i+1}^3}{3} - \frac{a_i^3}{3} \right) = \frac{a_n^3}{3} - \frac{a_0^3}{3} = \frac{a^3}{3}$$

(usando de vuelta el lema anterior para la desigualdad central). Así demostramos que

$$S_*(f, P) \leq \frac{a}{3} \leq S^*(f, P)$$

para todas las particiones P del intervalo $[a, b]$. Pasando al supremo (en la desigualdad izquierda) y al ínfimo (en la desigualdad derecha), se deduce que:

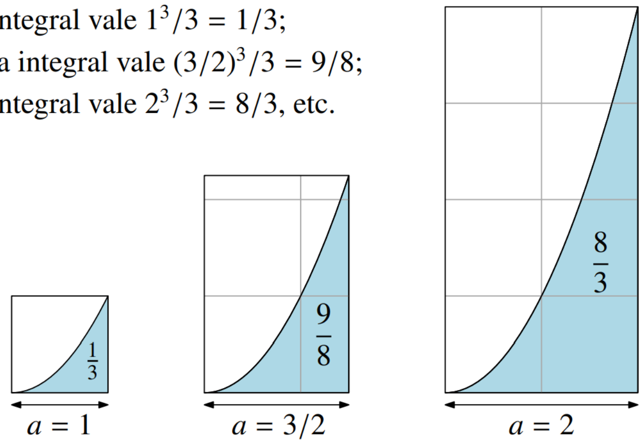
$$I_*(f) \leq \frac{a}{3} \leq I^*(f)$$

Como la función f es integrable, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$. Luego:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$$

En particular:

- cuando $a = 1$, dicha integral vale $1^3/3 = 1/3$;
- cuando $a = 3/2$, dicha integral vale $(3/2)^3/3 = 9/8$;
- cuando $a = 2$, dicha integral vale $2^3/3 = 8/3$, etc.



Ejercicio 7. Modificar el razonamiento del ejemplo anterior para demostrar más generalmente que para todos los números a y b tales que $0 \leq a < b$, tenemos que

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Ejercicio 8 (Integral de la función identidad). En un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), se considera la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$ para todo $x \in [a, b]$.

1. Demostrar que para todos los números $x \leq y$, tenemos que $(y-x)x \leq \frac{y^2-x^2}{2} \leq (y-x)y$. (Sugerencia: usar la identidad notable $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$.)
2. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Usando el resultado demostrado en 1, demostrar que $S_*(f, P) \leq \frac{b^2-a^2}{2} \leq S^*(f, P)$. (Sugerencia: usar la misma técnica que en el ejemplo 3.1.26).
3. Deducir de lo anterior que $I_*(f) \leq \frac{b^2-a^2}{2} \leq I^*(f)$.
4. Usando la monotonía de la función f, concluir que f es integrable y $\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$.
5. En el caso donde $0 < a < b$, se observa que la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f es un trapecio rectángulo. Calcular el área de dicho trapecio, y verificar que el resultado obtenido es consistente con el resultado del ítem 4.

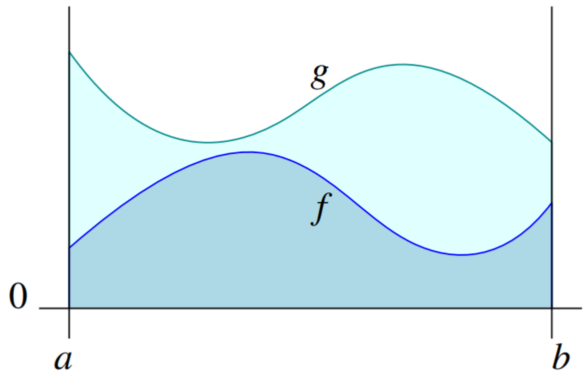
3.2. Propiedades de la integral

3.2.1. Monotonía

Una propiedad fundamental de la integral es que respeta el orden entre dos funciones:

Proposición 3.2.1 (Monotonía)**.** *Sean dos funciones integrables $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas en un mismo intervalo $[a, b]$ (con $a < b$). Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$



Demostración. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots . a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. En cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots . n - 1)$, se observa que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \leq f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a_i, a_{i+1}]$, de tal modo que $\text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \leq \text{ínf}(g, [a_i, a_{i+1}])$ (pasando al ínfimo). A partir de la desigualdad anterior, se deduce que

$$S_*(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \text{ínf}(g, [a_i, a_{i+1}]) = S_*(g, P)$$

y eso para toda partición $P \subset [a, b]$. Pasando al supremo entre todas las particiones $P \subset [a, b]$, obtenemos que $I_*(f) \leq I_*(g)$. Pero como ambas funciones f y g son integrables en el intervalo $[a, b]$, esto quiere decir que

$$\int_a^b f = I_*(f) \leq I_*(g) = \int_a^b g$$

$\square$

Observación 3.2.2 (Interpretación geométrica)**.** *La desigualdad $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ (que a veces, escribiremos $f \leq g$) expresa que la gráfica de la función f se ubica debajo de la gráfica de la función g cuando x recorre el intervalo $[a, b]$. En este caso, es obvio que el área (geométrica) de la región ubicada entre las dos gráficas es dada por la diferencia:*

$$\textit{área de la región ubicada entre } f \textit{ y } g = \int_a^b g - \int_a^b f$$

En la Sección 3.2.2 (Linealidad), veremos que la diferencia entre ambas integrales también es igual a la integral de la diferencia:

$$\int_a^b g - \int_a^b f = \int_a^b (g - f)$$

Una consecuencia obvia de la proposición anterior es que toda función positiva o nula (resp. negativa o nula) en el intervalo $[a, b]$ tiene integral positiva o nula (resp. negativa o nula):

Proposición 3.2.3. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable:*

1. *Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$*
2. *Si $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \leq 0$*

Demostración. Ejercicio.

Ejercicio 9. Usando la Proposición 3.2.1 y el resultado demostrado en el Ejemplo 3.1.21, demostrar que si una función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ está acotada por dos números $k_*, k^* \in \mathbb{R}$ tales que

$$k_* \leq f(x) \leq k^*$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces:

$$(b - a)k_* \leq \int_a^b f \leq (b - a)k^*$$

Se interpretará geométricamente el resultado.

3.2.2. Linealidad

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3.2.4 (Linealidad)**.** *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables. Entonces:*

1. *La función $f + g$ es integrable en $[a, b]$; además: $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$*
2. *Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, la función αf es integrable en $[a, b]$; además: $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \cdot \int_a^b$*

Observación 3.2.5 (Vínculo con el álgebra lineal)**.** *Desde el punto de vista del álgebra lineal, el teorema anterior expresa que:*

(a) el conjunto de todas las funciones integrables es un subespacio vectorial del espacio vectorial[13] *formado por todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

(b) la operación $f \mapsto \int_a^b f$ (que a cada función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ asocia su integral) es una transformación lineal del espacio de las funciones integrables hasta $\mathbb{R}$.

[13] Recordemos que el conjunto de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial, cuya suma es la suma de funciones, y cuyo producto por escalares es el producto αf de una función f por un número $\alpha \in \mathbb{R}$. (Ejercicio: verificar que esta suma y que este producto por escalares cumplen los axiomas de los espacios vectoriales.)

Más precisamente, se observa que el conjunto de las funciones integrables en el intervalo $[a,b]$ es un subespacio vectorial del espacio de las funciones acotadas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, que es a su vez un subespacio vectorial del espacio vectorial de las funciones (no necesariamente acotadas) de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, como indicado en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\boxed{\text{espacio vectorial de las funciones de } [a,b] \text{ en } \mathbb{R}} & & \\
\cup_{(\text{sev})} & & \\
\boxed{\text{subespacio de las funciones acotadas de } [a,b] \text{ en } \mathbb{R}} & & \\
\cup_{(\text{sev})} & & \\
\boxed{\text{subespacio de las funciones integrables de } [a,b] \text{ en } \mathbb{R}} & \xrightarrow{\int_a^b (_)} & \mathbb{R}
\end{array}$$

(Se puede demostrar que los tres espacios son de dimensión infinita.)

Como la demostración del Teorema 3.2.4 es algo larga, vamos a dividirla en múltiples resultados intermedios.

Lema 3.2.6. *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dos funciones acotadas cualesquiera. Entonces, para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a,b]$, tenemos que:*

1. $\inf(f+g, [a',b']) \geq \inf(f, [a',b']) + \inf(g, [a',b'])$
2. $\sup(f+g, [a',b']) \leq \sup(f, [a',b']) + \sup(g, [a',b'])$

Demostración.

1. Tenemos que $\inf(f, [a',b']) \leq f(x)$ y $\inf(g, [a',b']) \leq g(x)$ para todo $x \in [a',b']$, de tal modo que
$$\inf(f, [a',b']) + \inf(g, [a',b']) \leq f(x) + g(x)$$
para todo $x \in [a',b']$. Así, el número $\inf(f, [a',b']) + \inf(g, [a',b'])$ es una cota inferior de la función $f+g$ en el subintervalo $[a',b']$. Por lo tanto:
$$\inf(f, [a',b']) + \inf(g, [a',b']) \leq \inf(f+g, [a',b'])$$
pues $\inf(f+g, [a',b'])$ es la cota inferior más grande de la función $f+g$ en el subintervalo $[a',b']$.

2. Análogo al ítem 1, remplazando los ínfimos por supremos.

Ejercicio 10. Usando como modelo la demostración del ítem 1 del lema anterior, redactar la demostración del ítem 2, modificando el razonamiento de modo adecuado.

La siguiente proposición establece el ítem 1 del Teorema:

Proposición 3.2.7 (Aditividad)**.** *Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ son dos funciones integrables, entonces la función $f+g$ también es integrable en $[a,b]$; además:*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

Demostración. La demostración se efectúa en tres etapas.

ETAPA 1: Demostración de la desigualdad $I_*(f+g) \geq I_*(f) + I_*(g)$.

Dada una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$ cualquiera, se observa (por el Lema 3.2.6) que:

$$\begin{aligned}
S_*(f+g,P) &= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot \inf(f+g,[a_i,a_{i+1}]) \\
&\geq \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot (\inf(f,[a_i,a_{i+1}]) + \inf(g,[a_i,a_{i+1}])) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot \inf(f,[a_i,a_{i+1}]) + \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot \inf(g,[a_i,a_{i+1}]) \\
&= S_*(f,P) + S_*(g,P)
\end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$S_*(f,P) + S_*(g,P) \leq S_*(f+g,P) \leq I_*(f+g) \qquad (*)$$

(para toda partición P). Ahora, queremos demostrar que $I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g)$. Para ello, se fija $\epsilon > 0$.

- Como el número $I_*(f)$ es el supremo de todas las sumas inferiores $S_*(f,P)$, existe una partición P_1 del intervalo $[a,b]$ tal que $I_*(f) - \epsilon/2 < S_*(f,P_1) \leq I_*(f)$.
- Como el número $I_*(g)$ es el supremo de todas las sumas inferiores $S_*(g,P)$, existe una partición P_2 del intervalo $[a,b]$ tal que $I_*(g) - \epsilon/2 < S_*(g,P_2) \leq I_*(g)$.

Tomando la partición $P = P_1 \cup P_2$, se observa (usando la Proposición 3.1.11) que

$$S_*(f,P) \geq S_*(f,P_1) > I_*(f) - \epsilon/2$$

y

$$S_*(g,P) \geq S_*(g,P_2) > I_*(g) - \epsilon/2$$

y combinando ambas desigualdades anteriores con $(*)$, se deduce que:

$$I_*(f+g) \geq S_*(f,P) + S_*(g,P) > (I_*(f) - \epsilon/2) + (I_*(g) - \epsilon/2) = I_*(f) + I_*(g) - \epsilon$$

Así demostramos que $I_*(f) + I_*(g) < I_*(f+g) + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$ (desigualdad “a menos de ϵ”), lo que implica la desigualdad $I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g)$ deseada.

ETAPA 2: Demostración de la desigualdad $I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g)$

Análoga a la demostración de la Etapa 1, reemplazando los ínfimos por supremos.

ETAPA 3: Conclusión.

Como las funciones f y g son integrables en el intervalo $[a,b]$, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$ e $I_*(g) = I^*(g)$. Usando las desigualdades obtenidas en las etapas 1 y 2, se deduce que

$$I_*(f) + I_*(g) \leq I_*(f+g) \leq I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g) = I_*(f) + I_*(g)$$

Por lo tanto, tenemos que $I_*(f) + I_*(g) = I_*(f+g) = I^*(f+g) = I^*(f) + I^*(g)$, lo que demuestra que la función $f+g$ es integrable en el intervalo $[a,b]$ y que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

Ejercicio 11. Usando como modelo la demostración de la etapa 1 de la proposición anterior, redactar la demostración de la etapa 2, modificando el razonamiento de modo adecuado.

Ahora, nos queda demostrar el ítem 2 del teorema. Para ello, se necesita distinguir los casos donde $\alpha \geq 0$ y $\alpha < 0$. En primer lugar, se trata el caso donde $\alpha \geq 0$.

Lema 3.2.8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, para todo subintervalo $[a',b'] \subset [a,b]$ y para todo número $\alpha \geq 0$, tenemos que:*

1. $\text{ínf}(\alpha f, [a',b']) = \alpha \cdot \text{ínf}(f, [a',b'])$
2. $\sup(\alpha f, [a',b']) = \alpha \cdot \sup(f, [a',b'])$

Demostración.

1. En primer lugar, se observa que la propiedad es obvia cuando $\alpha = 0$, pues

$$\text{ínf}(0f, [a',b']) = 0 = 0 \cdot \text{ínf}(f, [a',b'])$$

Ahora, se supone que $\alpha > 0$. Para todo $x \in [a',b']$, tenemos que $\text{ínf}(f, [a',b']) \leq f(x)$. Multiplicando la desigualdad anterior por $\alpha > 0$, se obtiene que

$$\alpha \cdot \text{ínf}(f, [a',b']) \leq \alpha \cdot f(x)$$

para todo $x \in [a',b']$ y pasando al ínfimo, se deduce que

$$\alpha \cdot \text{ínf}(f, [a',b']) \leq \text{ínf}(\alpha f, [a',b'])$$

Pero el mismo razonamiento también se aplica a la función αf (en lugar de f) y al factor α^{-1} (en lugar de α), lo que nos da:

$$\alpha^{-1} \cdot \text{ínf}(\alpha f, [a',b']) \leq \text{ínf}(\alpha^{-1}\alpha f, [a',b'])$$

es decir:

$$\text{ínf}(\alpha f, [a', b']) \leq \alpha\, \text{ínf}(f, [a', b'])$$

(multiplicando ambos lados por $\alpha > 0$, y observando que $\alpha^{-1}\alpha f = 1 \cdot f = f$). Por lo tanto:

$$\text{ínf}(\alpha f, [a', b']) = \alpha \cdot \text{ínf}(f, [a', b'])$$

2. Análogo al ítem 1, remplazando los ínfimos por supremos.

Ejercicio 12. Usando como modelo la demostración del ítem 1 del lema anterior, redactar la demostración del ítem 2, modificando el razonamiento de modo adecuado.

Proposición 3.2.9. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces para todo número $\alpha \geq 0$, la función αf es integrable en el intervalo $[a, b]$ y, además:*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$$

Demostración. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a, b]$. Por el lema anterior, se observa que:

$$\begin{aligned}
S_*(f, P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf(\alpha f, [a_i, a_{i+1}]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\alpha \cdot \inf(f, [a_i, a_{i+1}])) \\
&= \alpha \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \inf(f, [a_i, a_{i+1}]) \\
&= \alpha \cdot S_*(f, P)
\end{aligned}$$

y de modo análogo, se demuestra que $S^*(\alpha f, P) = \alpha S^*(f, P)$. Pasando al supremo (para las sumas inferiores) y al ínfimo (para las sumas superiores), se deduce que $I_*(\alpha f) = \alpha I_*(f)$ y que $I^*(\alpha f) = \alpha I^*(f)$. Como f es integrable, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$, de tal modo que

$$I_*(\alpha f) = \alpha I_*(f) = \alpha I^*(f) = I^*(\alpha f)$$

Por lo tanto, la función αf es integrable, y se cumple que $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$. □

Ahora, nos queda demostrar el ítem 2 del teorema en el caso donde $\alpha < 0$. Para ello, se necesita relacionar las integrales de la función f y de la función opuesta $-f$.

Lema 3.2.10. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$, tenemos que:*

1. $\inf(-f, [a', b']) = -\sup(f, [a', b'])$

2. $\sup(-f, [a', b']) = -\inf(f, [a', b'])$

Demostración. Ejercicio.

Proposición 3.2.11. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en $[a, b]$, entonces la función $-f$ también es integrable en $[a, b]$ y, además:*

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$$

Demostración. Usando el lema anterior, se verifica sin dificultad que $S_*(-f, P) = -S^*(f, P)$ y $S^*(-f, P) = -S_*(f, P)$ para toda partición P del intervalo $[a, b]$. Pasando al supremo (para la sumas inferiores) y al ínfimo (para las sumas superiores), se deduce que $I_*(-f) = -I^*(f)$ y que $I^*(-f) = -I_*(f)$. Como la función f es integrable en $[a, b]$, tenemos que $I_*(f) = I^*(f)$, de tal modo que

$$I_*(-f) = -I^*(f) = -I_*(f) = I^*(f)$$

Por lo tanto, la función $-f$ es integrable en $[a, b]$, y se cumple que $\int_a^b (-f) = -\int_a^b f$. □

Ahora se puede concluir que:

Proposición 3.2.12 (Homogeneidad)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable, entonces para todo número $\alpha \in \mathbb{R}$, la función αf también lo es y, además:*

$$\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$$

Demostración. Ya demostramos la propiedad en el caso donde $\alpha \geq 0$ (Proposición 3.2.9), y la demostración en el caso $\alpha < 0$ se sigue directamente de las Proposiciones 3.2.9 y 3.2.11 (ejercicio). □

Esto acaba la demostración del teorema.

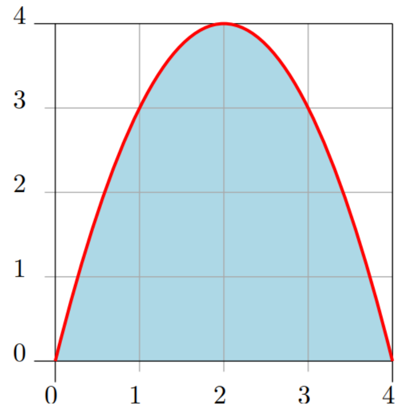
Más en general, se demuestra que:

Corolario 3.2.13 (Combinaciones lineales)**.** *Si $f_1, \dots, f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones integrables, entonces para todos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, la función $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$ (combinación lineal de las funciones $f_1, \dots, f_n$) también lo es. Además, su integral está dada por:*

$$\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 \int_a^b f_1 + \cdots \alpha_n \int_a^b f_n$$

Demostración. Ejercicio.

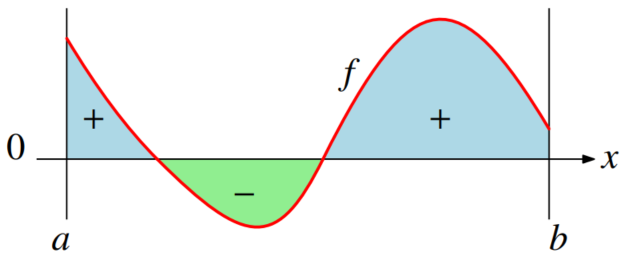
Ejercicio 13. Se considera la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ del Ejercicio 5 p.28 , la cual está definida por $f(x) = 4x - x^2$ para todo $x \in [0, 4]$.



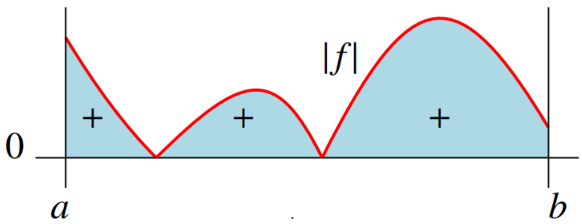
1. Escribir la función f como una combinación lineal de las funciones $f_1(x) = x$ (Ejercicio 8 p.39) y $f_2(x) = x^2$ (Ejemplo 3.1.26).
2. Usando la linealidad de la integral así como los resultados demostrados en el Ejemplo 3.1.26 y en el Ejercicio 8 p.39, calcular la integral $\int_0^4 f(x)dx$.
3. Comparar el resultado con las aproximaciones construidas en el Ejercicio 5 p.28.

3.2.3. Integral y valor absoluto

Por construcción, la integral $\int_a^b f$ de una función integrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ representa el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f, contando las áreas arriba del eje x con un signo positivo y las áreas abajo del eje x con un signo negativo:



Para calcular el área geométrica de la misma región (contando esta vez todas las áreas con un signo positivo), una solución sencilla consiste en remplazar la función f por su valor absoluto $|f|$, es decir: por la función definida por $|f|(x) = |f(x)|$ para todo $x \in [a, b]$.



En efecto, es claro que las regiones inducidas por las gráficas de la función f y de su valor absoluto $|f|$ tienen misma área geométrica (por un argumento obvio de simetría, véase figura anterior). Por otro lado, como la función $|f|$ es positiva o nula, el área geométrica de la región inducida por su gráfica coincide con el área algebraica de la misma región, la cual se puede calcular con la integral $\int_a^b |f(x)|dx$. Dicho de otro modo, tenemos que:

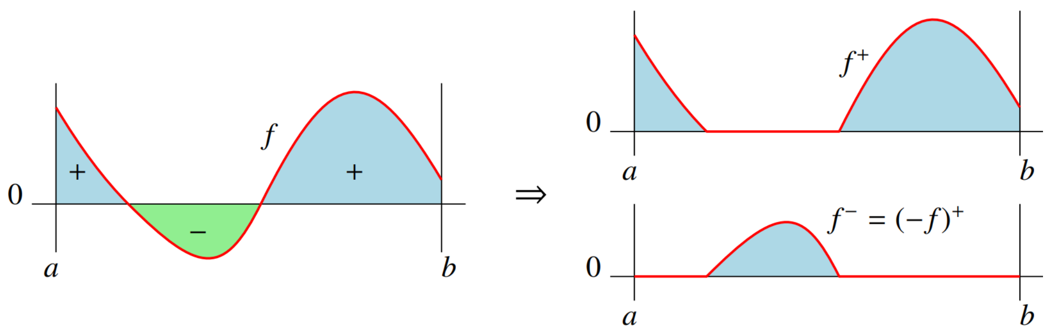
$$\begin{aligned}\text{área geométrica inducida por } f &= \text{área geométrica/algebraica inducida por } |f| \\ &= \int_a^b |f(x)|dx\end{aligned}$$

Aunque el argumento anterior sea bastante intuitivo, plantea un problema formal que es el siguiente: dado que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, ¿se puede deducir que su valor absoluto $|f| : [a, b] \to \mathbb{R}$ también es integrable? Para resolver este problema, se necesita introducir la descomposición de una función en sus partes positiva y negativa:

Definición 3.2.14 (Partes positiva y negativa de una función)**.** Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se llama *parte positiva* de la función f a la función $f^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f^+(x) = \text{máx}(0, f(x)) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

Se llama *parte negativa* de la función f a la función $f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f^- = (-f)^+$ (es decir: como la parte positiva de la función opuesta $-f$).



Observación 3.2.15. *Por construcción, ambas funciones f^+ y f^- son positivas o nulas, y permiten descomponer las funciones f y $|f|$ del modo siguiente:*

$$f = f^+ - f^- \qquad y \qquad |f| = f^+ + f^-$$

(Ejercicio: demostrar ambas igualdades.)

Lema 3.2.16. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Entonces, la parte positiva f^+ de la función f también está acotada, y para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ tenemos que:*

$$\sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) \leq \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b'])$$

Demostración. Es claro que la función f^+ está acotada inferiormente por 0, y superiormente por el máximo de los dos números 0 y $\sup(f, [a, b])$. Ahora, se distinguen los siguientes tres casos, en función de la posición de la gráfica de f respecto al eje x en el subintervalo $[a', b']$:

- Caso donde $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a', b']$. En este caso, se observa que $f^+(x) = f(x)$ para todo $x \in [a', b']$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) = \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b'])$$

- Caso donde $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a', b']$. En este caso, se observa que $f^+(x) = 0$ para todo $x \in [a', b']$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\sup(f^+, [a', b']) - \inf(f^+, [a', b']) = 0 - 0 \leq \sup(f, [a', b']) - \inf(f, [a', b'])$$

- Caso donde existen $x^+, x^- \in [a', b']$ tales que $f(x^+) > 0$ y $f(x^-) < 0$. En este caso, se observa que:
  - $\sup(f^+, [a_i, a_{i+1}]) = \sup(f, [a_i, a_{i+1}]) > 0$ (ejercicio)
  - $\text{ínf}(f^+, [a', b']) = 0$ (ya que $f^+ \geq 0$ y $f^+(x^-) = 0$)
  - $\text{ínf}(f, [a', b']) < 0$ (ya que $f(x^-) < 0$)

  Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} \sup(f^+, [a', b']) - \text{ínf}(f^+, [a', b']) &= \sup(f, [a', b']) - 0 \\ &< \sup(f, [a', b']) - \text{ínf}(f, [a', b']) \end{aligned}$$

□

Proposición 3.2.17. *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) es integrable, entonces sus partes positiva y negativa $f^+, f^- : [a, b] \to \mathbb{R}$ también son integrables en $[a, b]$.*

Demostración. Para demostrar que la función $f^+ : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ϵ. Dado $\epsilon > 0$, como f es integrable en $[a, b]$, existe una partición $P \subset [a,b]$ tal que $0 \leq S^*(f,P) - S_*(f,P) < \epsilon$. Escribiendo $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, se observa (por el lema anterior) que:

$$\begin{aligned} 0 \leq S^*(f^+,P) - S_*(f^+,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f^+, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f^+, [a_i, a_{i+1}])) \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\ &= S^*(f,P) - S_*(f,P) < \epsilon \end{aligned}$$

Luego, se concluye por la Proposición 3.1.20 que la función f^+ es integrable en $[a,b]$. Para demostrar que f^- también es integrable en $[a,b]$, basta con observar que $f^- = (-f)^+$. □

Ahora se puede demostrar la propiedad que relaciona las integrales de una función (integrable) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y de su valor absoluto $|f|$:

Proposición 3.2.18 (Valor absoluto)**.** *Si una funcón $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces la función $x \mapsto |f(x)|$ (valor absoluto de f) también es integrable en el intervalo $[a,b]$ y*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Demostración. Por la proposición anterior, sabemos que ambas funciones $f^+, f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ son integrables, lo que implica que la función $|f| = f^+ + f^-$ también es integrable. Además, como $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$ (con $f^+, f^- \leq 0$), obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f \right| &= \left| \int_a^b (f^+ - f^-) \right| \\ &= \left| \int_a^b f^+ - \int_a^b f^- \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f^+ \right| + \left| \int_a^b f^- \right| \\ &= \int_a^b f^+ + \int_a^b f^- \\ &= \int_a^b (f^+ + f^-) \\ &= \int_a^b |f| \end{aligned}$$

□

Observación 3.2.19. *Intuitivamente, la proposición anterior expresa que el área algebraica de la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f siempre es menor o igual al área geométrica de la misma región en valor absoluto.*

Ejercicio 14 (Máximo y mínimo de dos funciones). Dadas dos funciones $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$), se consideran las funciones $h_1, h_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \qquad \text{y} \qquad h_2(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$$

(1) Demostrar que $h_1 = f - (f - g)^+$ y $h_2 = f + (g - f)^+$.

(2) Deducir que si f y g son integrables, entonces las funciones h_1 y h_2 también lo son.

3.2.4. Aditividad respecto al intervalo

Por construcción, la noción de integral sólo tiene sentido en un intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$. Sin embargo, cuando se trabaja con una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I cualquiera de $\mathbb{R}$, siempre se puede restringir el estudio a un subintervalo cerrado $[a, b] \subset I$ para determinar si la función f es integrable en dicho subintervalo y, llegado el caso, calcular el valor de la integral $\int_a^b f$. Por supuesto, la propiedad de integrabilidad depende del subintervalo considerado, y una misma función $f : I \to \mathbb{R}$ puede ser integrable en algunos subintervalos de I y no ser integrable en otros subintervalos.

Ejercicio 15. A partir de los ejemplos anteriores, construir una función $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ que sea integrable en el intervalo $[0, 1]$ y no sea integrable en el intervalo $[1, 2]$.

Sin embargo, se puede demostrar que toda función integrable en un intervalo $[a, b]$ también es integrable en cualquier subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$:

Proposición 3.2.20 (Restricción del intervalo de integración)**.** *Si una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable en el intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), entonces también es integrable en cualquier subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ (con $a \le a' < b' \le b$).*

Demostración. Sea $f_1 = f\big|_{[a',b']}$ la restricción[14] de la función $f : I \to \mathbb{R}$ al intervalo $[a', b'] \subset [a, b]$. Dado que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es integrable, queremos demostrar que la función $f_1 : [a', b'] \to \mathbb{R}$ también es integrable. Para ello, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ϵ, y se fija $\epsilon > 0$. Como la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$, existe (por la Propiedad 3.1.20) una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \le S^*(f, P) - S_*(f, P) < \epsilon$. Ahora, se considera la partición $Q \subset [a, b]$ definida pot $Q = P \cup \{a', b'\}$. Por construcción, la partición Q es más fina que P, de tal modo que

$$0 \le S^*(f, Q) - S_*(f, Q) \le S^*(f, P) - S_*(f, P) < \epsilon$$

(por la Proposición 3.1.11). Escribimos $Q = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$, con $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$. Como $a', b' \in Q$ (por construcción), tenemos que $a' = a_p$ y $b' = a_q$ para algunos índices $p < q$

[14]Formalmente, la *restricción* de la funcipon f al subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ es la función $f\big|_{[a',b']}$ definida por $\text{dom}(f\big|_{[a',b']}) = [a', b']$, $\text{cod}(f\big|_{[a',b']}) = \mathbb{R}$ y $f\big|_{[a',b']}(x) = f(x)$ para todo $x \in [a', b']$.

entre 0 y n. Escribiendo $Q' = Q \cap [a', b'] = \{a_p, a_{p+1}, \ldots, a_q\}$, se observa que el subconjunto $Q' \subset Q$ es una partición del subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$. Respecto a dicha partición, tenemos que[15]:

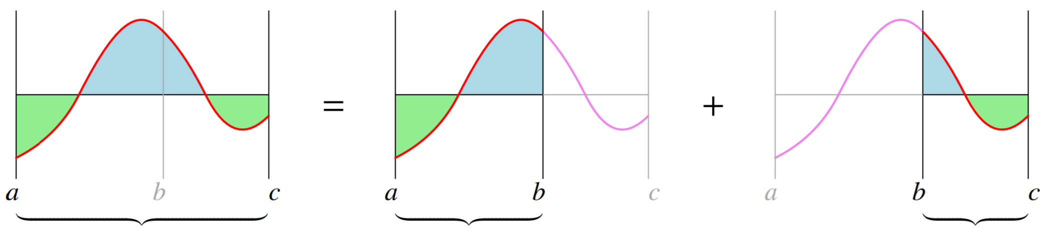
$$\begin{aligned}
0 \leq S^*(f_1, Q') - S_*(f_1, Q') &= \sum_{i=p}^{q-1} (a_{i+1} - a_i) \cdots (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdots (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\
&= S^*(f, Q) - S_*(f, Q) < \epsilon
\end{aligned}$$

Se concluye por la Proposición 3.1.20 que la función $f_1 = f\big|_{[a',b']}$ es integrable. □

Observación 3.2.21. *En lo siguiente, diremos que una fucnión $f : I \to \mathbb{R}$ (definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$) es localmente integrable cuando es integrable en todos los subintervalos $[a, b] \subset I$ (con $a < b$). Por la proposición anterior, es claro que cuando el intervalo de definición ya es de la forma $I = [a, b]$ (con $a < b$), una función $f : I \to \mathbb{R}$ es localmente integrable en $I = [a, b]$ si y sólo si es integrable*[16] *en $[a, b]$.*

Proposición 3.2.22 (Aditividad respecto al intervalo)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y tres puntos $a, b, c \in I$ tales que $a < b < c$. Si la función f es integrable en ambos intervalos $[a, b]$ y $[b, c]$, entonces es integrable en el intervalo $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$ también, y se cumple que*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$



Demostración. Sean $f_1 = f\big|_{[a,b]}$, $f_2 = f\big|_{[b,c]}$ y $f_3 = f\big|_{[a,c]}$ las restricciones de la función f a los tres intervalos $[a, b]$, $[b, c]$ y $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$. Por hipótesis, las funciones $f_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ y$f_2 : [b, c] \to \mathbb{R}$ son integrables, lo que nos permite escribir $I_1 = \int_a^b f_1 = \int_a^b f$ e $I_2 = \int_b^c f_2 = \int_b^c f$. Queremos demostrar que la función $f_3 : [a, c] \to \mathbb{R}$ es integrable y que su integral vale $I_1 + I_2$. Para ello, se usa el criterio de integración a menos de ϵ, y se fija un número $\epsilon > 0$.

[15] La desigualdad $\sum_{i=p}^{q-1} \cdots \leq \sum_{i=0}^{n-1} \cdots$ viene de que todos los sumandos de ambas sumatorias son positivos o nulos, y de que la segunda sumatoria contiene todos los sumandos de la primera.

[16] Así, la noción de *función localmente integrable* sólo tiene interés cuando la función considerada es definida en un intervalo que no es de la forma $[a, b]$, con $a < b$.

- Como la función f_1 es integrable en el intervalo $[a, b]$, existe una partición $P_1 \subset [a, b]$ tal que
$$I_1 - \frac{\epsilon}{2} < S_*(f_1, P_1) \leq S^*(f_1, P_1) < I_1 + \frac{\epsilon}{2} \qquad (1)$$
- Como la función f_2 es integrable en el intervalo $[b, c]$, existe una partición $P_2 \subset [b, c]$ tal que
$$I_2 - \frac{\epsilon}{2} < S_*(f_2, P_2) \leq S^*(f_2, P_2) < I_2 + \frac{\epsilon}{2} \qquad (2)$$

Sea $P_3 = P_1 \cup P_2$. Por construcción, el conjunto (finito) P_3 constituye una partición del intervalo $[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$, obtenida "pegando" ambas particiones $P_1 \subset [a, b]$ y $P_2 \subset [b, c]$ en su punto común $b \in P_1 \cap P_2$. Se verifica sin dificultad (ejercicio) que
$$S_*(f_3, P_3) = S_*(f_1, P_1) + S_*(f_2, P_2)$$
y
$$S^*(f_3, P_3) = S^*(f_1, P_1) + S^*(f_2, P_2)$$
Sumando las desigualdades (1) y (2), se deduce que:
$$I_1 + I_2 - \epsilon < \underbrace{S_*(f_1, P_1) + S_*(f_2, P_2)}_{S_*(f_3,P_3)} \leq \underbrace{S^*(f_1, P_1) + S^*(f_2, P_2)}_{S^*(f_3,P_3)} < I_1 + I_2 + \epsilon$$

Así demostramos que para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $P_3 \subset [a, b]$ tal que $I_1 + I_2 - \epsilon < I_*(f, P_3) \leq I^*(f, P_3) < I_1 + I_2 + \epsilon$. Por la Proposición 3.1.18 la función $f_3 = f\big|_{[a,c]}$ es integrable en el intervalo $[a, c]$ y su integral vale $I_1 + I_2 = \int_a^b f + \int_b^c f$. $\square$

Ejercicio de parcial

(Primer parcial - segundo semestre 2023) Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables tales que:
$$\textstyle\int_0^4 f(x)dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^2 f(x)dx = 3, \quad \text{y} \quad \int_2^4 g(x)dx = \frac{3}{2}.$$
La integral $\int_2^4 (5f(x) - g(x))dx$ es igual a

A) -14 B) $-\frac{25}{2}$ C) -10 D) $\frac{27}{2}$ E) 16

Solución. Por linealidad de la integral, tenemos que
$$\int_2^4 (5f(x) - g(x))dx = 5\int_2^4 f(x)dx - \int_2^4 g(x)dx$$
Además, por aditividad sobre el intervalo, se tiene que
$$\int_0^4 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^4 f(x)dx$$
Es decir,
$$\int_2^4 f(x)dx = \int_0^4 f(x)dx - \int_0^2 f(x) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int_2^4 (5f(x) - g(x))dx &= 5\int_2^4 f(x)dx - \int_2^4 g(x)dx \\ &= 5 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{3}{2} = -\frac{28}{2} = -14\end{aligned}$$

3.2.5. Extensión de la notación $\int_a^b f$ a los casos donde $a = b$ y $a > b$

Hasta ahora, sólo definimos la notación $\int_a^b f$ en el caso donde $a < b$. En la práctica, es muy cómodo extender la notación anterior a los casos donde $a = b$ y $a > b$, escribiendo

$$\int_a^b f = \begin{cases} 0 & \text{si } a = b \\ -\int_b^a f & \text{si } a > b \end{cases}$$

cuando los lados derechos están bien definidos.

Gracias a esta extensión de la notación $\int_a^b f$, se puede generalizar la propiedad de aditividad respecto al intervalo del modo siguiente:

Proposición 3.2.23 (Aditividad generalizada respecto al intervalo)**.** *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces para todos $a, b, c \in I$, tenemos que*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

(independientemente de las propiedades relativas de los tres puntos $a, b, c \in I$).

Demostración. Se distinguen los siguientes 5 casos:

(1) Caso donde $a = b = c$. En este caso, ambos números $\int_a^c f$ y $\int_a^b f + \int_b^c f$ son nulos por definición y la igualdad deseada se cumple trivialmente.

(2) Caso donde $a = b \neq c$. En este caso tenemos que

$$\int_a^c f = \underbrace{\int_a^a f}_{0} + \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

pues $a = b$

(3) Caso $a \neq b = c$. En este caso, tenemos que

$$\int_a^c f = \int_a^c f + \underbrace{\int_c^c f}_{0} = \int_a^b f + \int_b^c f$$

pues $c = b$

(4) Caso donde $a = c \neq b$. En este caso, tenemos que

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} 0 \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^c f + \int_b^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$$

pues $c = a$.

(5) Caso donde a, b y c son distintos dos a dos. En este caso, se distinguen los siguientes 6 subcasos, según las posiciones relativas de los tres números $a, b, c \in I$:

(5.1) Subcaso donde $a < b < c$. Obvio por la Proposición 3.2.22.

(5.2) Subcaso donde $a < c < b$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Prop,3,2,22}}{=} \int_a^b f - \int_c^b f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b + \int_b^c f$$

(5.3) Subcaso donde $b < a < c$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Prop,3,2,22}}{=} \int_b^c f - \int_b^a f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b + \int_b^c f$$

(5.4) Subcaso donde $b < c < c$: En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} -\int_c^a f \underset{\text{Prop,3,2,22}}{=} -\left(\int_b^a f - \int_b^c f\right) = -\int_b^a f + \int_b^c f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f$$

(5.5) Subcaso donde $c < a < b$. En este caso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} -\int_c^a f \underset{\text{Prop,3,2,22}}{=} -\left(\int_c^b f - \int_a^b f\right) = -\int_c^b f + \int_a^b f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f$$

(5.6) Subcaso donde $c < b < a$. En este subcaso, tenemos que:

$$\int_a^c f \underset{\text{Def.}}{=} -\int_c^a f \underset{\text{Prop,3,2,22}}{=} -\left(\int_c^b f + \int_b^a f\right) = -\int_c^b f - \int_b^a f \underset{\text{Def.}}{=} \int_a^b f + \int_b^c f$$

Lo que acaba de demostrar la propiedad deseada. $\square$

Observación 3.2.24. *De mismo modo se extiende la propiedad de linealidad (Teorema 3.2.4) a los caos donde $a = b$ y $a > b$ (ejercicio). Por otro lado, la propiedad de monotonía (Proposición 3.2.1) y la propiedad del valor absoluto (Proposición 3.2.18) sólo se cumplen en el caso donde $a \leq b$, y no se extienden al caso donde $a > b$. Se encontrará en el Cuadro 1 más abajo un resumen de las propiedades algebraicas de la integral extendida.*

Monotonía	Si $f \leq g$, entonces $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ Si $f \geq 0$, entonces $\int_a^b f \geq 0$ Si $f \leq 0$, entonces $\int_a^b f \leq 0$	(sólo si $a \leq b$)
Valor absoluto	$\left\lvert \int_a^b f \right\rvert \leq \int_a^b \lvert f \rvert$	(sólo si $a \leq b$)
Linealidad	$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \cdot \int_a^b f$ $\int_a^b (\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n) = \alpha_1 \cdot \int_a^b f_1 + \cdots + \alpha_n \cdot \int_a^b f_n$	(a, b cualesquiera)
Aditividad con respecto al intervalo	$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$ $\int_b^a f = -\int_a^b f$ $\int_a^a f = 0$	(a, b, c cualesquiera)

(Suponiendo que las funciones consideradas son integrables en los correspondientes intervalos)

Cuadro 1: Propiedades algebraicas de la integral (extendida)

Ejercicio 16. Verificar que la Proposición 3.2.1 (monotonía) y la Proposición 3.2.18 (valor absoluto) se extienden trivialmente al caso donde $a = b$, y explicar por qué no se extienden al caso donde $a > b$ mediante contraejemplos adecuados.

3.2.6. Otras propiedades geométricas de la integral

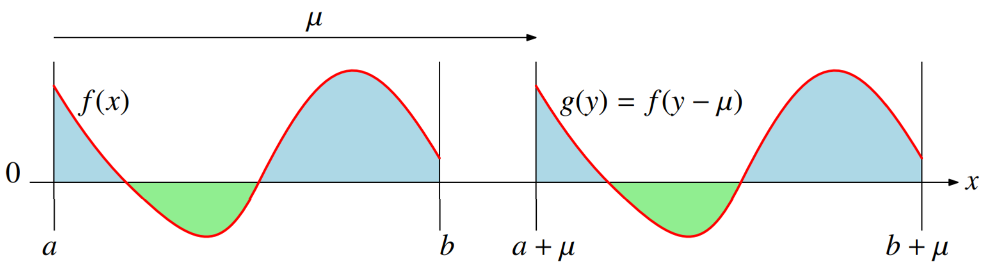
En esta sección, se presentan algunas propiedades geométricas notables de la integral, en forma de ejercicios para el lector.

Invarianza por traslación

Ejercicio 17. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Dado un número $\mu \in \mathbb{R}$, se considera la función $g : [a + \mu, b + \mu] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = f(y - \mu)$$

Por construcción, g es la función cuya gráfica se deduce de la gráfica de la función f por la traslación horizontal según el número μ:



El objetivo del ejercicio es demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[a + \mu, b + \mu]$, y que cuando es el caso, las correspondientes integrales son iguales:

$$\int_{a+\mu}^{b+\mu} g(y)dy = \int_{a+\mu}^{b+\mu} f(y - \mu)dy = \int_a^b f(x)dx$$

(1) Dados un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ y un número $k \in \mathbb{R}$, se escribe $S + k := \{x + k \colon x \in S\}$.

  a) Demostrar que si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces $P + \mu$ es una partición del intervalo $[a + \mu, b + \mu]$. Del mismo modo, demostrar que si Q es una partición de $[a + \mu, b + \mu]$, entonces $Q - \mu$ es una partición de $[a, b]$.

  b) Demostrar que las funciones $P \mapsto P + \mu$ y $Q \mapsto Q - \mu$ definen biyecciones inversas entre el conjunto de las particiones del intervalo $[a, b]$ y el conjunto de las particiones del intervalo $[a + \mu, b + \mu]$.

(2) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$\text{ínf}(g, [a_i + \mu, a_{i+1} + \mu]) = \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$$

y

$$\sup(g, [a_i + \mu, a_{i+1} + \mu]) = \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

para todo $i = 0, \ldots, n - 1$.

(3) Deducir de anterior que $I_*(g) = I_*(f)$ e $I^*(g) = I^*(f)$.

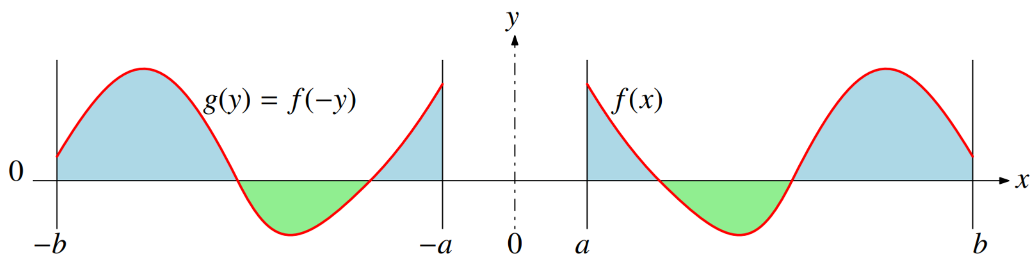
(4) Concluir que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[a + \mu, b + \mu]$, y que cuando es el caso, las integrables son iguales.

Integración en espejo

Ejercicio 18. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Se considera la función $g : [-b, -a] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = f(-y)$$

Por construcción, g es la función cuya gráfica se deduce de la gráfica de la fucnión f por la simetría axial respecto al eje y:



El objetivo del ejercicio es demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[-b, -a]$, y que cuando es el caso, las correspondientes integrales son iguales:

$$\int_{-b}^{-a} g(y)dy = \int_{-b}^{-a} f(-y)dy = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

(1) Dado un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$, se escribe $-S := \{-x : x \in S\}$.

(a) Demostrar que si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces $-P$ es una partición del intervalo $[-a, -b]$, y viceversa.

(b) Deducir que la función $P \mapsto -P$ define una biyección entre el conjunto de particiones del intervalo $[a, b]$ y el conjunto de particiones del intervalo $[-a, -b]$.

(2) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar que

$$\text{ínf}(g, [-a_{i+1}, -a_i]) = \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$$

y

$$\sup(g, [-a_{i+1}, -a_i]) = \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$

para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Deducir que $S_*(g, -P) = S_*(f, P)$ y $S^*(g, -P) = S^*(f, P)$.

(3) Deducir de lo anterior que $I_*(g) = I_*(f)$ e $I^*(g) = I^*(f)$.

(4) Concluir que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[-b, -a]$, y que cuando es el caso, las integrales son iguales.

Observación 3.2.25. *Intercambiando los extremos del intervalo de integración de la función $g(y) = f(-y)$, se deduce que:*

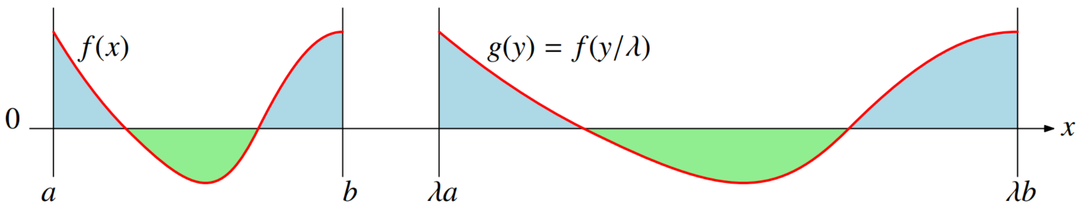
$$\int_{-a}^{-b} f(-y)dy = -\int_{-b}^{-a} f(-y)dy = -\int_{a}^{b} f(x)dx$$

Integración y dilatación

Ejercicio 19. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $[a, b]$, con $a < b$. Dado un número $\lambda > 0$, se considera la función $g : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(y) = f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$$

Por construcción, g es la función cuya gráfica se deduce de la la gráfica de la función f por una "dilatación" horizontal de factor $\lambda > 0$, como indicado en la siguiente figura, que muestra un ejemplo de dilatación para $\lambda = 2$:



El objetivo del ejercicio es demostrar que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[\lambda a, \lambda b]$, y que cuando es el caso, las correspondientes integrales están relacionadas por:

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(y)dy = \int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{y}{\lambda}\right) = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

1. Dados un subconjunto $S \subset \mathbb{R}$ y un número $k > 0$, se escribe $kS \coloneqq \{kx \colon x \in S\}$.
   (a) Demostrar que si P es una partición del intervalo $[a, b]$, entonces λP es una partición del intervalo $[\lambda a, \lambda b]$. Del mismo modo, demostrar que si Q es una partición de $[\lambda a, \lambda b]$, entonces $\frac{1}{\lambda}Q$ es una partición de $[a, b]$.
   (b) Demostrar que las funciones $P \mapsto \lambda P$ y $Q \mapsto \frac{1}{\lambda}Q$ definen biyecciones inversas entre el conjunto de las particiones del intervalo $[a, b]$ y el conjunto de las particiones del intervalo $[\lambda a, \lambda b]$.
2. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Demostrar que
$$\text{ínf}(g, [\lambda a_i, \lambda a_{i+1}]) = \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])$$
   y
$$\sup(g, [\lambda a_i, \lambda a_{i+1}]) = \sup(f, [a_i, a_{i+1}])$$
   para todo $i = 0, \ldots, n-1$.
   Deducir que $S_*(g, \lambda P) = \lambda S_*(f, P)$ y $S^*(g, \lambda P) = \lambda S^*(f, P)$.
3. Deducir de lo anterior que $I_*(g) = \lambda I_*(f)$ e $I^*(g) = \lambda I^*(f)$
4. Concluir que f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si g es integrable en $[\lambda a, \lambda b]$, y que cuando es el caso, tenemos que $\int_{\lambda a}^{\lambda b} g = \lambda \cdot \int_a^b f$.

Ejercicio 20. Combinando los resultados obtenidos en los Ejercicios 17, 18 y 19, demostrar que si f es una función integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces para todos los números $\lambda \neq 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$, la función $y \mapsto f\left(\frac{y-\mu}{\lambda}\right)$ es integrable en el intervalo $[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]$[17] y

$$\int_{\lambda a+\mu}^{\lambda b+\mu} f\left(\frac{y-\mu}{\lambda}\right) dy = \lambda \cdot \int_a^b f(x)dx$$

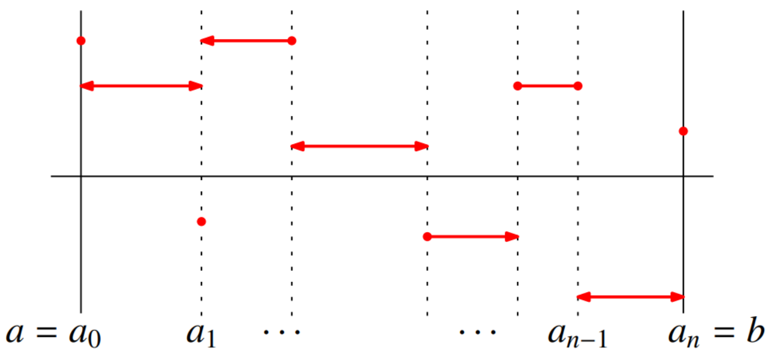
(Sugerencia: distinguir los casos donde $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$.)

[17] De hecho: en el intervalo $[\lambda a + \mu, \lambda b + \mu]$ si $\lambda > 0$, o el intervalo $[\lambda b + \mu, \lambda a + \mu]$ si $\lambda < 0$.

3.3. Ejemplos de funciones integrables

3.3.1. Funciones escalonadas

Definición 3.3.1 (Función escalonada)**.** Se dice que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) es *escalonada* cuando existe una partición $P = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que la función f es constante en cada uno de los subintervalos abiertos (a_i, a_{i+1}) $(i = 0, \dots n - 1)$.



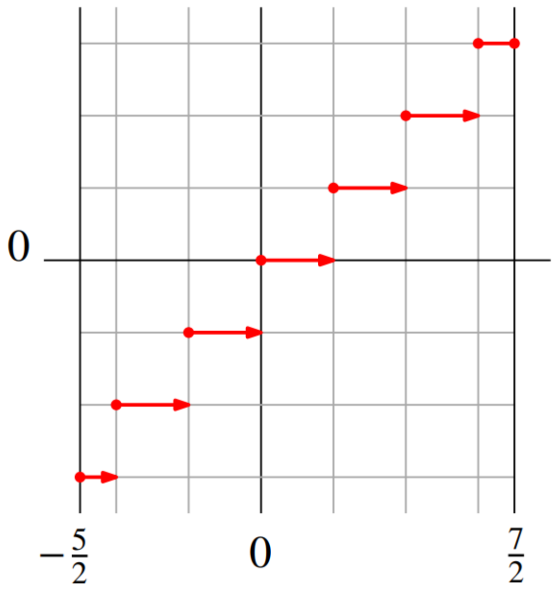
Observación 3.3.2. *Precisemos que una función escalonada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sólo necesita ser constante en los subintervalos abiertos (a_i, a_{i+1}) inducidos por la partición P, la cual define los "escalones" de dicha función. Por otro lado, la función f puede tomar valores cualesquiera en los puntos $a_0, a_1, \dots, a_n$ de la partición P, como se puede observar en la figura anterior.*

Ejercicio 21. Demostrar que toda función escalonada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ está acotada.

Ejemplo 3.3.3 (Parte entera)**.** *Se recuerda que la parte entera de un número real x está definida como el número entero más grande que es menor o igual a x. La parte entera del número x se escribe $\lfloor x \rfloor$, y por construcción, tenemos que*

$$\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z} \qquad y \qquad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, tenemos que $\lfloor x \rfloor = x$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Al estar definida en todo $\mathbb{R}$, la función $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ no puede ser calificada de escalonada, pero es claro que su restricción a cualquier intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (con $a < b$) define una función escalonada en dicho intervalo. Por ejemplo, la siguiente figura representa la función $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ restringida al intervalo $[-\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]$



y, en este caso, la partición que define los escalones es $P = \left\{-\frac{5}{2}, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \frac{7}{2}\right\}$.

En la práctica, la función parte entera $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ permite construir múltiples ejemplos de funciones escalonadas, así como lo ilustra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 22. Se consideran las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 : [0, 4] \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$f_1(x) = \lfloor x^2 \rfloor \qquad f_3(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor \qquad f_5(x) = \lfloor \sqrt{x} \rfloor^2$$

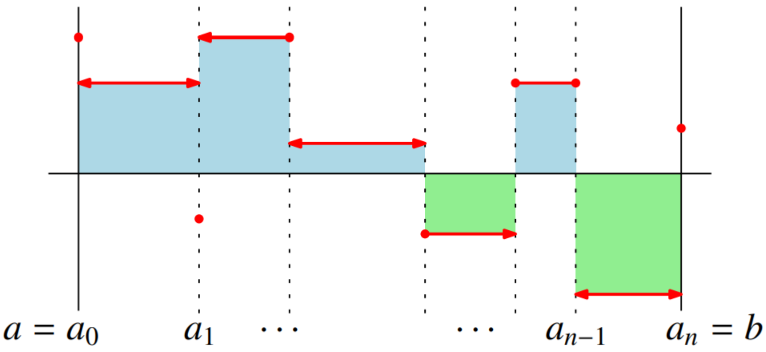
$$f_2(x) = \lfloor x \rfloor^2 \qquad f_4(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor} \qquad f_6(x) = \sqrt{\lfloor x^2 \rfloor}$$

Para cada una de las funciones $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$, demostrar que dicha función es escalonada (explicitando la partición que define sus escalones), y bosquejar su gráfica.

Proposición 3.3.4 (Integral de una función escalonada)**.** *Toda función escalonada* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es integrable, y su integral en* $[a, b]$ *está dada por*

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) k_i$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *son los puntos de la partición de* $[a, b]$ *que define los escalones de* f, *y* $k_0, \ldots k_{n-1}$ *son los valores tomados por* f *en los subintervalos* $(a_0, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$.



Conceptualmente, la demostración de la proposición anterior es sencilla: consiste en calcular la integral de la función f en cada subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \dots, n-1)$, y en pegar los resultados obtenidos usando la propiedad de aditividad respecto al intervalo (Proposición 3.2.22). La única dificultad viene del comportamiento de la función f en los puntos $a_0, a_1, \dots, a_n$, donde puede tomas valores cualesquiera (que al final no contribuyen al resultado).

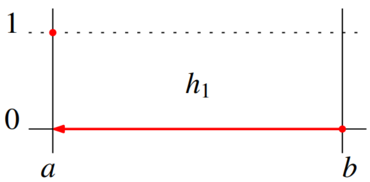
Así, empezaremos por tratar esta dificultad:

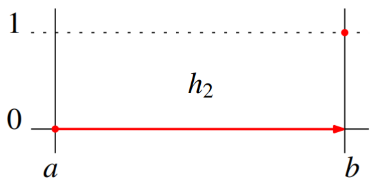
Lema 3.3.5. *Si una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es constante en el intervalo abierto (a,b) y vale k en dicho intervalo (aunque pueda tomar valores cualesquiera en los extremos a y b), entonces f es integrable en el intervalo $[a,b]$ y su integral está dada por*

$$\int_a^b f = (b-a)k$$

Demostración Sea $f_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ la función (realmente) constante definida por $f_0(x) = k$ para todo $x \in [a,b]$. Ya sabemos que la función f_0 es integrable en el intervalo $[a,b]$ y que su integral está dada por $\int_a^b f_0 = (b-a)k$. Ahora se consideran las dos funciones $h_1, h_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases} \qquad \text{y} \qquad h_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b \\ 1 & \text{si } x = a \end{cases}$$





Demostremos que la función h_1 es integrable en $[a,b]$ y que su integral vale 0. Para ello se fija $\epsilon > 0$, y se considera la partición $P \subset [a,b]$ definida por $P = \{a, a', b\}$, donde a' es un punto del intervalo (a,b) tal que $a' - a < \epsilon$. Se verifica por un cálculo sencillo (ejercicio) que

$$S_*(h_1, P) = 0 \qquad \text{mientras que} \qquad S^*(h_1, P) = (a' - a) \cdot 1 < \epsilon$$

Así demostramos que para todo $\epsilon > 0$, existe una partición $P \subset [a, b]$ tal que $0 \leq S_*(h_1, P) \leq S^*(h_1, P) < \epsilon$. Esto implica, por la proposición 3.1.18 que la función h_1 es integrable en $[a, b]$ y que su integral es nula. De modo análogo se demuestra que la función h_2 es integrable en $[a, b]$ y que su integral es nula. Para conluir, basta con observar que la función "casi constante" $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se puede escribir como la siguiente combinación lineal

$$f = f_0 + (f(a) - k)h_1 + (f(b) - k)h_2$$

de las tres funciones integrables f_0, h_1 y h_2 (ejercicio). Por lo tanto, la función f es integrable en el intervalo $[a, b]$, y su integral está dada por

$$\int_a^b f = \int_a^b f_0 + (f(a) - k) \underbrace{\int_a^b h_1}_{0} + (f(b) - k) \underbrace{\int_a^b h_2}_{0} = \int_a^b f_0 = (b - a)k$$

$\square$

Ahora podemos demostrar la proposición anterior:

Demostración de la Proposición 3.3.4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función escalonada cuyos escalones están definidos por una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a, b]$, y que toma los valores $k_0, \ldots, k_{n-1}$ en los intervalos abiertos $(a_0, a_1), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$. Por el lema anterior, sabemos que la función f es integrable en cada uno de los intervalos $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n-1)$, con $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f = (a_{i+1} - a_i)k_i$. Por la Proposición 3.2.22, se deduce que la función f es integrable en $[a, b]$, y

$$\int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)k_i$$

$\square$

Ejercicio 23. Calcular la integral $\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} \lfloor x \rfloor \, dx$ (véase el Ejemplo 3.3.3) así como las integrales de las funciones definidas en el Ejercicio 22.

Una consecuencia importante de la proposición anterior es que siempre se pueden cambiar los valores tomados por una función integrable en un número finito de puntos de su intervalo de definición sin cambiar su integral ni su carácter integrable:

Proposición 3.3.6. *Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) dos funciones tales que:*

(1) f es integrable en $[a, b]$

(2) $g = f$ en $[a, b]$, salvo en un número finito de puntos de $[a, b]$

Entonces la función g es integrable en el intervalo $[a, b]$, y tiene la misma integral que f.

Demostración. Sean $a_1, \cdots, a_n$ los puntos de $[a,b]$ donde las funciones f y g difieren. Se observa que la función $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $s(x) = g(x) - f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ es una función escalonada cuyos escalones son definidos por la partición $P = \{a_1, \ldots, a_n\} \cup (a,b)$, y que toma el valor 0 en cada uno de los subintervalos inducidos por la partición P. Por la Proposición 3.3.4, la función escalonada s es integrable en el intervalo $[a,b]$ y su integral vale 0. Por lo tanto, la función $g = f + s$ es integrable en el intervalo $[a,b]$, y

$$\int_a^b g = \int_a^b (f+s) = \int_a^b f + \underbrace{\int_a^b s}_{0} = \int_a^b f$$

$\square$

Ejercicio 24. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (con $a < b$) una función acotada. El objetivo de este ejercicio es demostrar que sus integrales inferior $I_*(f)$ y superior $I^*(f)$ se pueden caracterizar por

$$I_*(f) = \sup\left\{\int_a^b s \text{ tal que } s : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \leq f\right\}$$

$$I^*(f) = \text{ínf}\left\{\int_a^b t \text{ tal que } t : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \geq f\right\}$$

(1) Demostrar que existen funciones escalonadas $s_0, t_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$ tales que $s_0 \leq f \leq t_0$.

(2) Sea $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada[18] tal que $s \leq f$ en $[a,b]$.

  (a) Demostrar que $S_*(s,P) \leq S_*(f,P)$ para toda partición $P \subset [a,b]$.

  (b) Deducir $I_*(f) \leq I_*(f)$.

(3) Deducir de (2) que $\sup\left\{\int_a^b s \text{ tal que } s : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \leq f\right\} \leq I_*(f)$.

(4) Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. Definir a partir de la partición P una función escalonada $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $s \leq f$ y $\int_a^b s = S_*(f,P)$. (¡Cuidado con la definición de la función s en los puntos $a_0, a_1, \ldots, a_n$!)

(5) Deducir de (4) que $\sup\left\{\int_a^b s \text{ tal que } s : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \leq f\right\} \geq I_*(f)$. Sugerencia: se podrá demostrar (usando (4)) que para todo $\epsilon > 0$, existe una función escalonada $s \leq f$ tal que $\int_a^b s > I_*(f) - \epsilon$.

(6) Deducir de lo anterior que

$$\sup\left\{\int_a^b s \text{ tal que } s : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \leq f\right\} = I_*(f)$$

.

[18] En este ítem, no se necesita suponder que s es una función escalonada.

(7) De modo análogo, demostrar que

$$\text{ínf}\left\{\int_a^b t \text{ tal que } t : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \geq f\right\} = I^*(f)$$

. Sugerencia: se podrá usar como modelo el razonamiento efectuado en los ítems (2) – (6), adáptondolo de modo adecuado.

(8) Deducir de lo anterior que si la función f es integrable en $[a,b]$, entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \sup\left\{\int_a^b s \text{ tal que } s : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \leq f\right\}\\ &= \text{ínf}\left\{\int_a^b t \text{ tal que } t : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ escalonada y } s \geq f\right\}\end{aligned}$$

3.3.2. Integración de funciones polinomiales

El objetivo de esta sección es demostrar que todas las funciones polinomiales son localmente integrables, y presentar el método que permite calcular su integral en cualquier intervalo $[a,b]$. Para ello, se comienza por estudiar el caso particular de la función

$$x \mapsto x^p$$

con $p \in \mathbb{N}$.

Proposición 3.3.7 (Integral de la función $x \mapsto x^p$)**.** *Para todo $p \in \mathbb{N}$, la función $x \mapsto x^p$ es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$ (con $a < b$) y*

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

La demostración se basa en el siguiente lema:

Lema 3.3.8. *Para todos los números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $0 \leq x \leq y$, tenemos que*

$$(y-x)x^p \leq \frac{y^{p+1} - x^{p+1}}{p+1} \leq (y-x)y^p$$

Demostración. En primer lugar, se demuestra por inducción sobre $p \in \mathbb{N}$ que

$$(y-x)\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} = (y-x)(y^p + xy^{p-1} + \cdots x^{p-1} + x^p) = y^{p+1} - x^{p+1} \qquad (*)$$

- Caso base. En el caso donde $p = 0$, tenemos que

$$(y-x)\sum_{i=0}^{0} x^i y^{0-i} = (y-x)x^0y^0 = (y-x)\cdot 1 = y^{0+1} - x^{0+1}$$

- Paso inductivo. Supongamos que la propiedad deseada se cumple para algún $p \in \mathbb{N}$ (hipotesis de inductiva: HI). Queremos demostrar que la misma propiedad también se cumple para $p+1$. Para ello, basta observar que

$$
\begin{aligned}
(y-x)\sum_{i=0}^{p+1} x^i y^{p+1-i} &= (y-x)(y \cdot \sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} + x^{p+1}) \\
&= y\left((y-x)\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i}\right) + (y-x)x^{p+1} \\
&= y(y^{p+1} - x^{p+1}) + (y-x)x^{p+1} && \text{(por HI)} \\
&= y^{p+2} - yx^{p+1} + yx^{p+1} - x^{p+2} \\
&= y^{p+2} - x^{p+2}
\end{aligned}
$$

(lo que acaba la demostración de la igualdad deseada). Ahora, se oberva que

$$\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} \geq \sum_{i=0}^{p} x^i x^{p-i} = (p+1)x^p$$

pues $x^i \geq 0$ e $y^{p-i} \geq x^{p-i}$, mientras

$$\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i} \leq \sum_{i=0}^{p} y^i y^{p-i} = (p+1)y^p$$

pues $x^i \leq y^i$ e $y^{p-i} \geq 0$.

Multiplicando las desigualdades anteriores por $\frac{y-x}{p+1} \geq 0$, se deduce que

$$\frac{y-x}{\cancel{p+1}} \cdot (\cancel{p+1})x^p \leq \underbrace{\frac{y-x}{p+1}\sum_{i=0}^{p} x^i y^{p-i}}_{\frac{y^{p+1}-x^{p+1}}{p+1} \text{ por } (*)} \leq \frac{y-x}{\cancel{p+1}} \cdot (\cancel{p+1})y^p$$

$\square$

Demostración de la Proposición 3.3.7. Queremos demostrar que la función $f(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) es integrable en cualquier intervalo $[a,b]$, con $a < b$. Para ello, distinguiremos tres casos, según la posición relativa del intervalo $[a,b]$ respecto a 0.

(1) Caso donde $[a,b] \subset [0,+\infty)$, es decir: $0 \leq a < b$. En este caso, la función f es monótona creciente en el intervalo $[a,b]$ (pues es monótona creciente en $[0,+\infty)$), entonces es integrable en $[a,b]$ por el Teorema 3.1.25. Sea $P = \{a_0, a_1, \ldots . a_n\}$ una partición cualquiera del intervalo $[a,b]$. En cada uno de los subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ ($i = 0, \ldots, n-1$), tenemos que $\inf(f, [a_i, a_{i+1}]) = f(a_i) = a_i^p$ y $\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) =$

$f(a_{i+1}) = a_{i+1}^p$, por la monotonía de f. Aplicando el Lema 3.3.8 a cada par de números (a_i, a_{i+1}), obtenemos que

$$S_*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot a_i^p \leq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i+1}^{p+1}-a_i^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

mientras que

$$S^*(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)\cdot a_{i+1}^p \geq \sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_{i+1}^{p+1}-a_i^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

Así, demostramos que

$$S_*(f,P) \leq \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \leq S^*(f,P)$$

para todas las particiones P del intervalo $[a,b]$. Pasando al supremo (en la desigualdad izquierda) y al ínfimo (en la desigualdad derecha), se deduce que:

$$I_*(f) \leq \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1} \leq I^*(f)$$

Pero como la función $f(x) = x^p$ es integrable en el intervalo $[a,b]$, se concluye que

$$\int_a^b x^p dx = I_*(f) = I^*(f) = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

(2) Caso donde $[a,b] \subset (-\infty, 0]$, es decir: $a < b \leq 0$. En este caso, ya sabemos por el caso (1) que la función $f(x) = x^p$ es integrable en el intervalo $[-b,-a] \subset [0+\infty)$. Usando la propiedad de integración en espejo (Ejercicio 18), se deduce que la función $g(x) = f(-x) = (-x)^p$ es integrable en $[a,b]$, y

$$\int_a^b (-x)^p dx = \int_{-b}^{-a} x^p dx = \frac{(-a)^{p+1}-(-b)^{p+1}}{p+1}$$

Ahora, se distinguen dos subcasos, según si el entero $p \in \mathbb{N}$ es par o impar.

(2.1) Subcaso donde p es par. En este subcaso, tenemos que $(-x)^p = x^p$; luego

$$\int_a^b x^p dx = \int_a^b (-x)^p dx = \frac{(-a)^{p+1}-(-b)^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

pues $(-a)^{p+1} = -a^{p+1}$ y $(-b)^{p+1} = -b^{p+1}$, ya que el entero $p+1$ es impar.

(2.2) Subcaso donde p es impar. En este subcaso, tenemos que $(-x)^p = -x^p$; luego

$$\int_a^b x^p dx = -\int_a^b (-x)^p dx = -\frac{(-a)^{p+1}-(-b)^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p+1}$$

pues $(-a)^{p+1} = a^{p+1}$ y $(-b)^{p+1} = b^{p+1}$, ya que el entero $p+1$ es par.

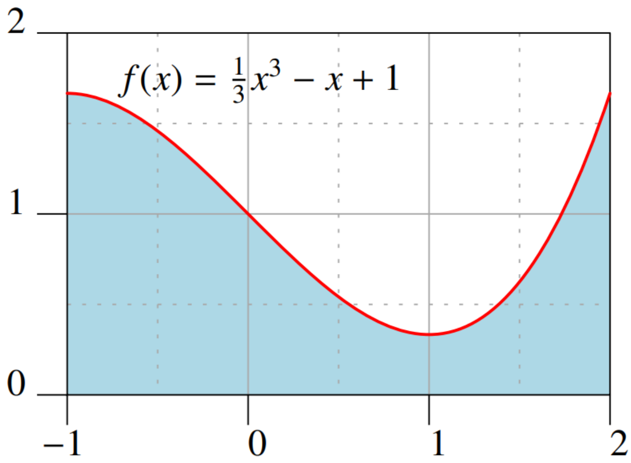
(3) Caso donde $a < 0$ y $b > 0$. Por los casos (1) y (2), ya sabemos que la función $f(x) = x^p$ es integrable en los intervalos $[a, 0] \subset (-\infty, 0]$ y $[0, b] \subset [0, +\infty)$, Entonces, es integrable en el intervalo $[a, b] = [a, 0] \cup [0, b]$, y

$$\int_a^b x^p dx = \int_a^0 x^p dx + \int_0^b x^p dx = \frac{0^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} + \frac{b^{p+1} - 0^{p+1}}{p+1} = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}$$

□

La proposición anterior no sólo permite integrar la función $x \mapsto x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) en cualquier intervalo $[a, b]$ (con $a < b$); además permite integrar todas las funciones polinomiales, usando la propiedad de linealidad de la integral. Aquí hay un ejemplo.

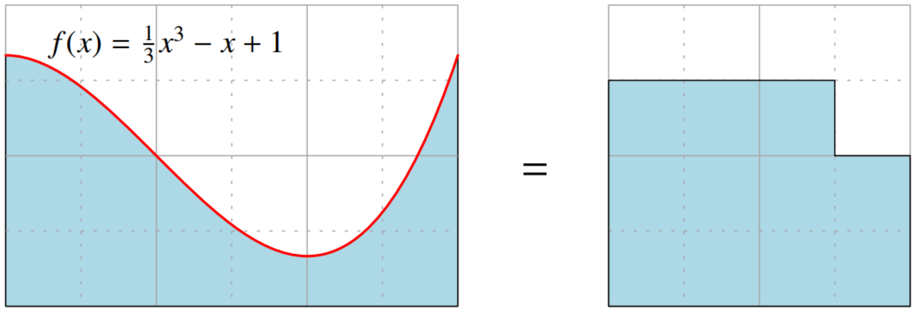
Ejemplo 3.3.9. *Queremos integrar la función* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ *en el intervalo* $[-1, 2]$.



Para ello, se observa que la función f *es una función lineal de las tres funciones* $x \mapsto x^3$, $x \mapsto x^1$ *y* $x \mapsto x^0 = 1$. *Así, es integrable en el intervalo* $[-1, 2]$, *y*

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^2 \left(\frac{1}{3}x^3 - x + 1\right) dx &= \frac{1}{3} \cdot \int_{-1}^2 x^3 dx - \int_{-1}^2 x^1 dx + \int_{-1}^2 x^0 dx \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2^4 - (-1)^4}{4} - \frac{2^2 - (-1)^2}{2} + \frac{2^1 - (-1)^1}{1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{15}{4} - \frac{3}{2} + \frac{3}{1} = \frac{11}{4}
\end{aligned}$$

Dicho de otro modo, demostramos que las siguientes dos área son iguales:



Ejercicio de parcial

(Ejercicio 4 - primer parcial segundo semestre 2024) Consideramos la función $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ y la partición $P_n = \{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ del intervalo $[1, 2]$ que divide al intervalo $[1, 2]$ en n intervalos de igual longitud.
Indicar el mínimo valor de $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^*(f, P_n) - S^*(f, P_n) < \frac{1}{2}$.

A) $n = 7$

B) $n = 8$

C) $n = 9$

D) $n = 6$

E) $n = 5$

F) $n = 4$

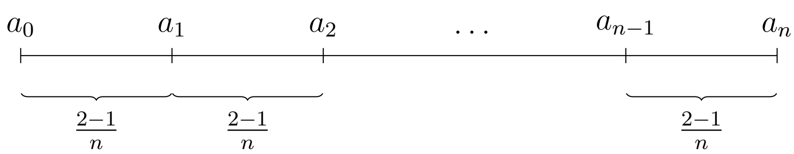
Solución. Sabemos que la función $f(x) = x^2$ es integrable en el intervalo $[1, 2]$, por lo tanto para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que

$$S^*(f, P) - S_*(f, P) < \epsilon$$

En particular, en este jercicio buscamos la menor cantidad de puntos que debe tener una partición P_n que divide al intervalo $[1, 2]$ en n intervalos de igual longitud de forma que se verifique

$$S^*(f, P_n) - S_*(f, P_n) < \frac{1}{2}$$

Dado que la partición P_n divide al intervalo $[1, 2]$ en n intervalos de igual longitud, es de la forma



donde $a_0 = 1$ y $a_n = 2$. Es decir,

$$a_{i+1} - a_i = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

para todo $i = 0, \dots, n - 1$.

Luego,

$$\begin{aligned} S_*(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \text{ínf}(f,[a_i,a_{i+1}]) \cdot \underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \text{ínf}(f,[a_i,a_{i+1}]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} S^*(f,P_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sup(f,[a_i,a_{i+1}]) \cdot \underbrace{(a_{i+1}-a_i)}_{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \sup(f,[a_i,a_{i+1}]) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) \end{aligned}$$

ya que $f(x) = x^2$ es creciente en el intervalo $[1,2]$.

Entonces,

$$\begin{aligned} S^*(f,P_n) - S_*(f,P_n) &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1}) - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \\ &\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(f(a_{i+1}) - f(a_i)) \\ &= \frac{1}{n}(\cancel{f(a_1)} - f(a_0) + \cancel{f(a_2)} - \cancel{f(a_1)} + \cdots + f(a_n) - \cancel{f(a_{n-1})}) \\ &= \frac{1}{n}(f(2) - f(1)) \\ &= \frac{3}{n} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\frac{3}{n} < \frac{1}{2} \iff 6 < n$$

Así que tomamos $n = 7$.

Vínculo con la derivada. *A partir de ahora y hasta el final de la sección 3.3.2, se supone conocida la noción de función derivada, que será introducida más adelante en el curso. Los lectores que no conocen esta noción pueden omitir esta parte, e ir directamente a la sección 3.3.3.*

Observación 3.3.10. *La fórmula que expresa la integral de la función $f(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{N}$) en el intervalo $[a, b]$ (con $a < b$) también se puede escribit*

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} = F(b) - F(a)$$

con

$$F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$$

Se observa que la función $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1}$ que permite expresar dicha integral es una primitiva de la función $f(x) = x^p$, es decir: una función derivable cuya derivada es igual a f:

$$F'(x) = f(x)$$

Usando la propiedad de linealidad de la integral, se puede generalizar esta observación a todas las funciones polinomiales del modo siguiente.

Proposición 3.3.11. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función polinomial, entonces f es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), y su integral en dicho intervalo está dada por*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

donde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es cualquier función polinomial tal que $F' = f$.

Demostración. Escribamos $f(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p x^p$ y $F(x) = \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p x^p$, suponiendo que f y F son polinomios de grados n y $n+1$, respectivamente. Como $F' = f$, tenemos que

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{n+1} p\beta_p x^{p+1} = \sum_{p=0}^{n} (p+1)\beta_{p+1} x^p = f(x) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p x^p$$

de tal modo que $\alpha_p = (p+1)\beta_{p+1}$ para todo $P = 0, \ldots, n$ (indentificando los coeficientes de los polinomios F' y f). Combinando la linealidad de la integral con la Proposición 3.3.7, se deduce que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{p=0}^{n} \alpha_p x^p \right) dx = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \cdot \int_a^b x^p dx \\
&= \sum_{p=0}^{n} \alpha_p \cdot \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1} = \sum_{p=0}^{n} \beta_{p+1}(b^{p+1} - a^{p+1}) \qquad (\text{pues } \alpha_p/(p+1) = \beta_{p+1}) \\
&= \sum_{p=1}^{n+1} \beta_p (b^p - a^p) = \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p (b^p - a^p) \qquad (\text{pues } b^0 - a^0 = 1 - 1 = 0) \\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p b^p - \sum_{p=0}^{n+1} \beta_p a^p = F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo 3.3.12. *Volviendo a la función polinomial* $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ *del Ejemplo 3.3.9, se observa que una primitiva de la función* f *es la función*

$$F(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + x$$

Así tenemos que

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-1) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{17}{12}\right) = \frac{16+17}{12} = \frac{11}{4}$$

3.3.3. Integral de la función $t \mapsto 1/t$

En esta sección, nos interesa el caso particular de la función $f(t) = \frac{1}{t}$ en el intervalo $(0, +\infty)$. Como f es monótona decreciente en dicho intervalo, es integrable en cualquier intervalo $[a, b]$ tal que $0 < a < b$ por el Teorema 3.1.25. Una propiedad notable de la integral de la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es la siguiente:

Proposición 3.3.13. *Para todos* $a, b, \lambda > 0$ *tales que* $a < b$*, tenemos que:*

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}dt = \int_{a}^{b} \frac{1}{t}dt$$

Demostración. Como la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es integrable en el intervalo $[a, b]$, la función $g(t) = f(\frac{t}{\lambda})$ es integrable en el intervalo $[\lambda a, \lambda b]$ (por el Ejercicio 19) y

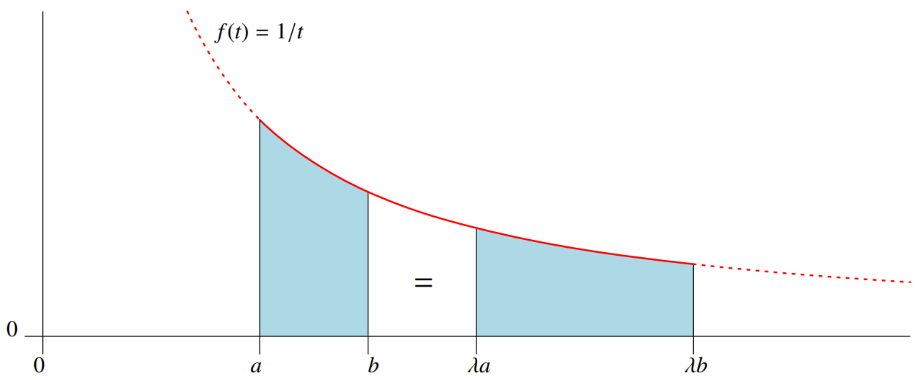
$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)dt = \lambda \cdot \int_{a}^{b} f(t)dt = \lambda \cdot \int_{a}^{b} \frac{1}{t}dt$$

Pero también se observa que $g(t) = f(\frac{t}{\lambda}) = \frac{\lambda}{t}$, de tal modo que

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} g(t)dt = \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{\lambda}{t}dt = \lambda \cdot \int_{\lambda a}^{\lambda b} \frac{1}{t}dt$$

Dividiendo ambos lados derechos por $\lambda > 0$, se deduce la igualdad deseada. $\square$

Observación 3.3.14. *Geométricamente, la igualdad anterior se puede interpretar del modo siguiente: cuando se dilata (horizontalmente) el intervalo de trabajo* $[a, b]$ *según un factor* $\lambda > 0$*, la región correspondiente abajo de la gráfica de* f *se dilata (verticalmente) según el factor* $\frac{1}{\lambda}$*, debido a la definición particular de la función* f*. Al final, las dilataciones horizontal y vertical se compensan de tal modo que el área de la región correspondiente no cambia:*



(En la figura anterior, tomamos $[a, b] = [1, \frac{3}{2}]$ *y* $\lambda = 2$*). Dicho de otro modo, la integral* $\int_a^b \frac{1}{t}dt$ *no depende de los extremos* $a, b > 0$*; sólo depende del cociente* $\frac{b}{a}$*.*

La integral $\int_a^b \frac{1}{t}$ no se puede expresar como un polinomio o como una fracción racional en función de los extremos a y b. Para ello, se necesita introducir una nueva función:

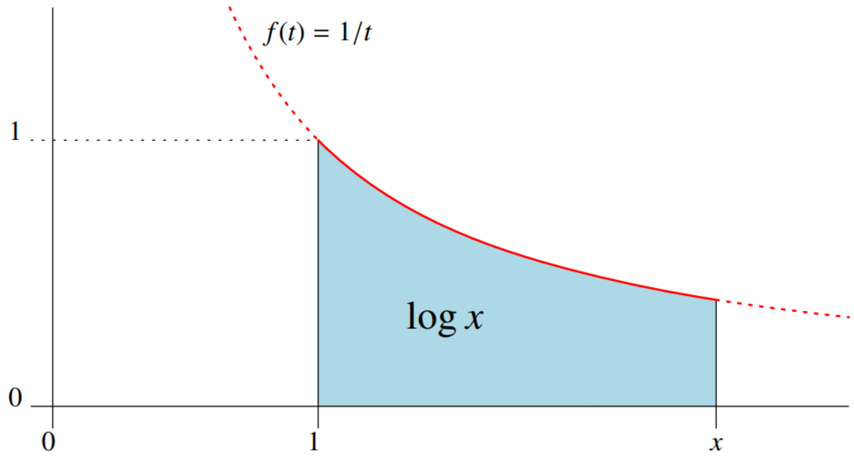
Definición 3.3.15. Dado un número real $x > 0$, se llama *logaritmo* de x y se escribe $\log(x)$ al número real definido por

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

Observación 3.3.16. *La definición anterior usa la notación extendida para la integral, pues el número* $x > 0$ *puede ser menor, igual o mayor a* 1*. En particular, como* $f(t) = \frac{1}{t} > 0$ *para todo* $t \in (0, +\infty)$*, es claro que:*

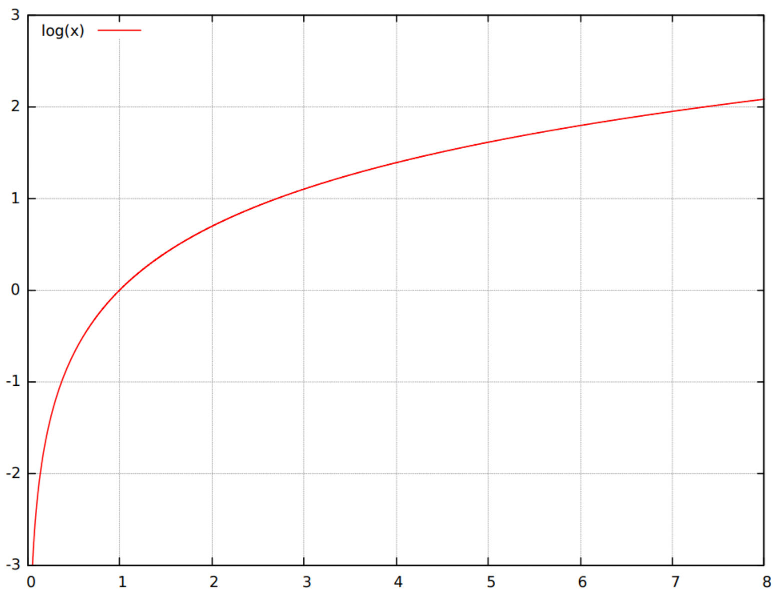
$$\log(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{1}{t}dt \geq 0 & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ -\int_x^1 \frac{1}{t}dt \leq 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Así, el número $\log(x)$ *representa el área algebraica de la región abajo de la gráfica de la función* $f(t) = \frac{1}{t}$ *entre los dos extremos* $t = 1$ *y* $t = x$*, expresada con un signo positivo si* $x > 1$*, y con un signo negativo si* $x < 1$*:*



Se demuestra que:

Proposición 3.3.17. *La función* $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *es estrictamente creciente en* $(0, +\infty)$.



Demostración. Sean $x, y > 0$ tales que $x < y$. Tenemos que

$$\log(y) - \log(x) = \int_1^y \frac{1}{t}dt - \int_1^x \frac{1}{t}dt = \int_x^y \frac{1}{t}dt \geq (y - x) \cdot \frac{1}{y} > 0$$

pues $x < y$ y $f(t) = \frac{1}{t} \geq \frac{1}{y}$ para todo $t \in [x, y]$. Luego, tenemos que $\log(x) < \log(y)$. $\square$

Proposición 3.3.18. *Para todos* $x, y > 0$, *tenemos que:*

- $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

- $\log(x/y) = \log(x)\log(y)$
- $\log(1/x) = -\log(x)$.

Demostración. Primera igualdad: se observa que

$$\log(xy) = \int_1^{xy} \frac{1}{t}dt = \int_1^{x} \frac{1}{t}dt + \int_{\cancel{x}1}^{\cancel{x}y} \frac{1}{t}dt = \log(x) + \log(y)$$

Segunda igualdad: se sigue de que

$$\log(x) = \log((x/y)\cdot y) = \log(x/y) + \log(y)$$

Tercera igualdad: se sigue de la igualdad anterior, observando que $\log(1) = 0$. □

Gracias a la función logaritmo, podemos ahora expresar la integral de la función $f(t) = \frac{1}{t}$ en cualquier intervalo $[a, b] \subset (0, +\infty)$:

Proposición 3.3.19. *Para todos $a, b > 0$, tenemos que*

$$\int_a^b \frac{1}{t}dt = \log(b) - \log(a) = \log(\frac{b}{a})$$

(Se observa que la última expresión sólo depende del cociente $\frac{b}{a}$.)

Demostración. Inmediato por la definición de la función logaritmo (ejercicio). □

Ejercicio de parcial

(Primer parcial - primer semestre 2023) Sean $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = \frac{6}{x}$ y $g(x) = -x + 5$. En área encerrada entre los gráficos de las funciones f y g es:

A) $\frac{5}{2} - 6(\log(3) + \log(2))$

B) $-\frac{5}{2} + 6(\log(3) + \log(2))$

C) $\frac{15}{2} + 6(\log(3) + \log(2))$

D) $\frac{15}{2} + (\log(3) - \log(2))$

E) $\frac{5}{2} - 6(\log(3) - \log(2))$

F) $-\frac{5}{2} + 6(\log(3) - \log(2))$

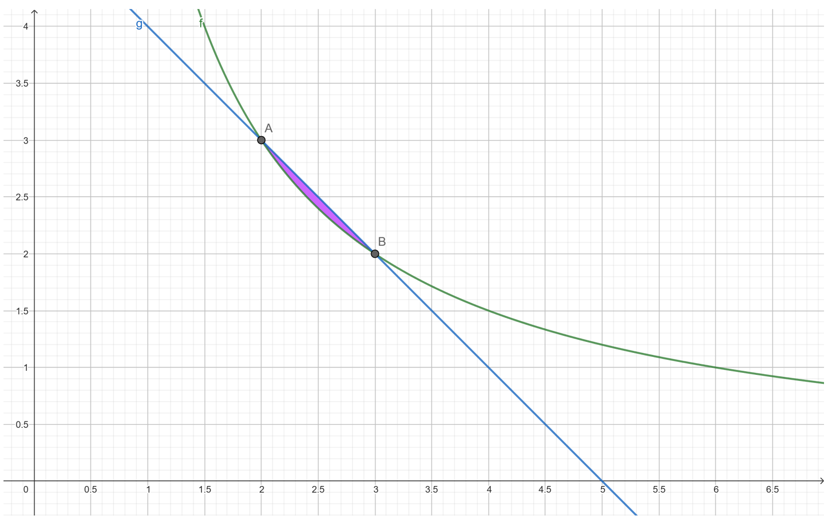
Solución. Primero buscamos los puntos donde los dos gráficos se intersectan, es decir buscamos los $x \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$f(x) = g(x)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow \frac{6}{x} = -x + 5 \\ &\Leftrightarrow 6 = -x^2 + 5x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \ \text{ o } x = 3 \end{aligned}$$

Luego, el área buscada es la siguiente:



Es decir, el área bajo el gráfico de g y sobre el gráfico de f. Luego, el área buscada es:

$$
\begin{aligned}
\int_2^3 g(x)dx - \int_2^3 f(x)dx &= \int_2^3 \frac{6}{x}dx - \int_2^3 -x + 5dx \\
&= 6\int_2^3 \frac{1}{x}dx + \int_2^3 xdx - \int_2^5 5dx \\
&= 6(\log(3) - \log(2)) + \left(\frac{3^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right) - (5 \cdot 3 - 5 \cdot 2) \\
&= 6(\log(3) - \log(2)) - \frac{5}{2}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 25. El objetivo de este ejercicio es demostrar las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$$

para todo $x > 0$.

(1) Verificar que las desigualdades anteriores se cumplen (trivialmente) cuando $x = 1$.

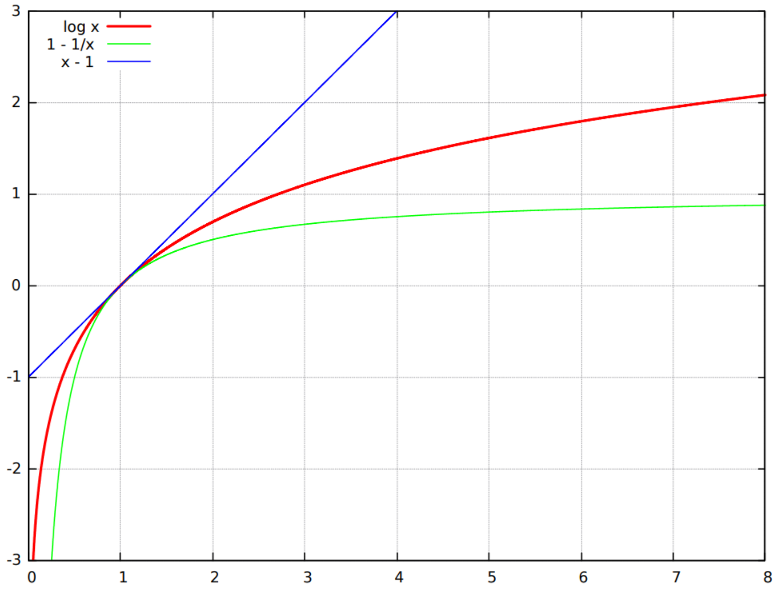
(2) Ahora, se considera el caso donde $x > 1$.

  (a) Verificar que $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq 1$ para todo $t \in [1, x]$.

  (b) Usando la monotonía de la integral, deducir que

$$1 - \frac{1}{x} = (x-1) \cdot \frac{1}{x} \leq \log(x) \leq x - 1$$

(3) Adaptar el razonamiento efectuado en (2) para el caso donde $x < 1$.


log x
1 - 1/x
x - 1
3
2
1
0
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Capítulo 4

Límites y continuidad

4.1. Límite

4.1.1. Entornos

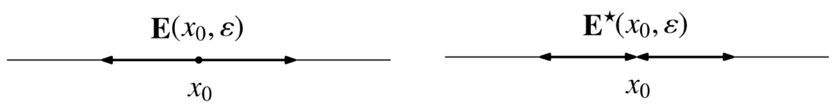
Las nociones de *continuidad* y de *límite* de una función f en un punto x_0 están íntimamente vinculadas con el comportamiento de dicha función "alrededor del punto x_0". En matemática, se formaliza la noción intuitiva de proximidad mediante la noción de entorno:

Definición 4.1.1 (Entorno de un punto)**.** Dados un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ y un número $\epsilon > 0$, se llama *entorno de centro* x_0 y *de radio* ϵ al conjunto $E(x_0, \epsilon)$ definido por

$$E(x_0, \epsilon) := \{x \in \mathbb{R} \colon |x - x_0| < \epsilon\} = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$$

De modo similar se define el *entorno reducido* $E^*(x_0, \epsilon)$, excluyendo el punto x_0:

$$\begin{aligned} E^*(x_0, \epsilon) &:= E(x_0, \epsilon) \setminus \{x_0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < |x - x_0| < \epsilon\} \\ &= (x_0 - \epsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \epsilon) \end{aligned}$$



Observación 4.1.2. *Intuitivamente, el entorno $E(x_0, \epsilon)$ de centro x_0 y de radio $\epsilon > 0$ representa el conjunto de las aproximaciones del número x_0 con precisión ϵ. Es claro que cuando se reemplaza el radio ϵ por otro radio $\epsilon' \leq \epsilon$ (es decir: por una precisión mejor), se*

obtiene un entorno contenido en el entorno anteior:

$$0 < \epsilon' \leq \epsilon \Rightarrow E(x_0, \epsilon') \subset E(x_0, \epsilon)$$

Esta observación también vale para los entornos reducidos $E^*(x_0, \epsilon)$ *y* $E^*(x_0, \epsilon')$.

Definición 4.1.3 (Interior y clausura de un intervalo)**.** Sea un intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

- El *interior de* I es el subintervalo $I^\circ \subset I$ obtenido excluyendo los extremos de I.
- La *clausura de* I es el suprainterval $\bar{I} \supset I$ obtenido incluyendo los extremos de I.

La siguiente tabla resume la definición del interior y de la claura de un intervalo en función del tipo de intervalo considerado:

Intervalo I	**Interior** I°	**Clausura** $\bar{I}$
$[a, b],\ [a, b),\ (a, b],\ (a, b)$, con $a < b$	(a, b)	$[a, b]$
$(-\infty, a],\ (-\infty, a)$	$(-\infty, a)$	$(-\infty, a]$
$[a, +\infty),\ (a, +\infty)$	$(a, +\infty)$	$[a, +\infty)$
$(-\infty, +\infty)\ (= \mathbb{R})$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
$\{a\}\ (= [a, a])$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$

Se observa que en todos los casos, tenemos $I^\circ \subset I \subset \bar{I}$.

Definición 4.1.4 (Punto interior, punto adherente)**.** Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se dice que un número real x_0 es un *punto interior* de I cuando $x_0 \in I^\circ$, y que es un *punto adherente* a I cuando $x_0 \in \bar{I}$. Dicho de otro modo:

- un punto interior de I es un punto del intervalo I distinto de sus extremos
- un punto aherente a I es o bien un punto del intervalo I, o bien uno de sus extremos (el o es inclusivo, pues los extremos del intervalo I pueden pertenecer a I).

Ejercicio 26 (Caracterización de los puntos interiores y adherentes)*.* Dados un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un número real x_0, se consideran las siguientes dos equivalencias:

(a) x_0 es un punto interior de I si y sólo si existe $\epsilon > 0$ tal que $E(x_0, \epsilon) \subset I$

(b) x_0 es un punto adherente a I si y sólo si $E(x_0, \epsilon) \cap I \neq \emptyset$ para todo $\epsilon > 0$

Para cada uno de los diez tipos de intervalos, demostrar que ambas equivalencias se cumplen.

En lo siguiente, sólo consideraremos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cuyo interior no es vacío, es decir, tal que $I^\circ \neq \emptyset$. Así, cuando escribiremos

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$...

habrá que leer:

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $I^\circ \neq \emptyset$...

En la práctica, la convención anterior sólo excluye las funciones definidas en el intervalo vacío $I = \emptyset$ y en los intervalos $I = \{a\} = [a, a]$ reducidos a un punto, que tienen poco interés en análisis. En lo que sigue, usaremos a menudo la siguiente propiedad, que sólo se cumple para los intervalos cuyo interior no es vacío:

Proposición 4.1.5. *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo cuyo interior no es vacío ($I^\circ \neq \emptyset$), entonces para todo punto x_0 adherente a I y para todo $\epsilon > 0$, tenemos que $E^*(x_0, \epsilon) \cap I \neq \emptyset$.*

Ejercicio 27. Demostrar la propiedad anterior, distinguiendo los casos en función del tipo de intervalo considerado. ¿Qué pasa cuando el intervalo está reducido a un punto?

4.1.2. Noción de límite

Definición 4.1.6 (Límite de una función en un punto)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dados un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, se dice que $f(x)$ *tiende a L cuando x tiende a x_0, o que f tiene límite L en el punto x_0* cuando:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

En este caso, se escribe

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Observación 4.1.7. *1. Formalmente, tenemos que*

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

es decir, usando las notaciones para los entornos:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, \quad f(x) \in E(L, \epsilon)$$

Así, la definición de límite expresa la idea intuitiva que $f(x)$ es arbitrariamente cercano a L en cuanto x sea suficientemente cercano a x_0 (sin ser igual a x_0). Más precisamente:

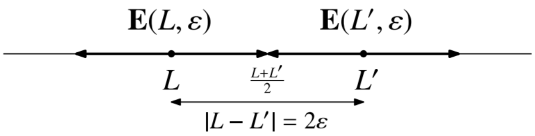
$\forall \varepsilon > 0,$	"Dada una precisión $\varepsilon > 0$ arbitraria,
$\exists \delta > 0,$	existe un radio $\delta > 0$ (suficientemente pequeño) tal que
$\forall x \in \mathbf{E}^\star(x_0, \delta) \cap I,$	todo punto $x \in I$, $x \neq x_0$ cercano a x_0 (a menos del radio δ)
$f(x) \in \mathbf{E}(L, \varepsilon)$	tiene imagen $f(x)$ cercana a L (a menos de la precisión ε)."

2. *La definición de límite sólo examina los valores tomados por la función f en los entornos reducidos del punto x_0 (que exluyen el punto x_0), y nunca examina el valor de f en el propio punto x_0, cuando dicho valor existe*[1]*. Así, el valor tomado por la función f en el punto x_0 (cuando dicho valor existe) no influye ni en la existencia del límite, ni en el valor de dicho límite. La exclusión sistemática del punto x_0 del dominio de la observación también explica por qué se puede considerar el límite de la función f en cualquier extremo del intervalo I, incluso cuando la función f no está definida en dicho extremo.*

3. *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ no siempre tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$ (veremos contra-ejemplos más adelante), pero cuando tiene límite, es único:*

Proposición 4.1.8 (Unicidad del límite)**.** *Sean una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \bar{I}$. Si f tiene límites L y L' en el punto x_0, entonces $L = L'$.*

Demostración. Supongamos (por el absurdo) que $L \neq L'$. Se considera la precisión $\epsilon > 0$ definida por $\epsilon := |L - L'|/2$, de tal modo que los entornos $E(L, \epsilon)$ y $E(L', \epsilon)$ sean disjuntos:



Como f tiene límite L en el punto x_0, existe un radio $\delta > 0$ tal que $f(x) \in E(L, \epsilon)$ para todo $x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$. Como f también tiene límite L' en el punto x_0, existe otro radio $\delta' > 0$ tal que $f(x) \in E(L', \epsilon)$ para todo $x \in E^*(x_0, \delta') \cap I$. Ahora, se elige un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \min(\delta, \delta')$ (tal punto existe por la Proposición 4.1.5), de tal modo que $x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$ y $x \in E^*(x_0, \delta') \cap I$. Por lo anterior, se deduce que $f(x) \in E(L, \epsilon)$ y $f(x) \in E(L', \epsilon)$, lo que es absurdo pues ambos conjuntos $E(L, \epsilon)$ y $E(L', \epsilon)$ son disjuntos. $\square$

Cuando la función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene límite en el punto $x_0 \in \bar{I}$, dicho límite es único y se escribe $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. ¡Cuidado! Esta notación sólo tiene sentido cuando la función f tiene límite en el punto x_0, y no está definida si no.

Observación 4.1.9. *En el caso donde $x_0 \in I$, tenemos tres situaciones posibles:*

- *o bien f no tiene límite en el punto x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ no existe*

[1]Recordemos que el punto x_0 puede no estar en el intervalo de definición I

- *o bien f tiene límite distinto de $f(x_0)$ en el punto x_0:* $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- *o bien f tiene límite igual a $f(x_0)$ en el punto x_0:* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En este último caso, diremos que la función f es *continua* en el punto x_0. Formalmente:

Definición 4.1.10 (Función continua en un punto)**.** Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *continua* en un punto $x_0 \in I$ cuando tiene límite igual a $f(x_0)$ en el punto x_0:

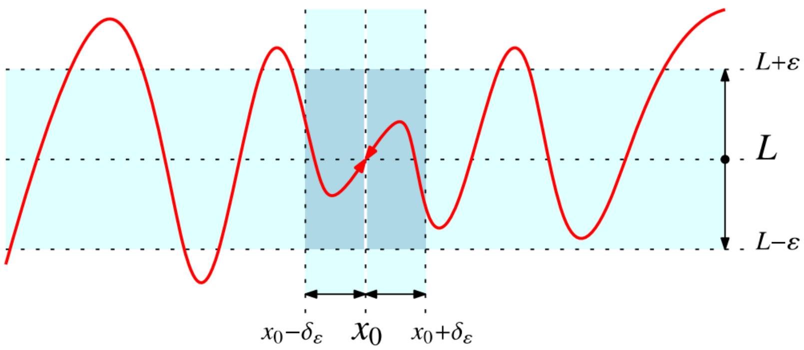
$$f \text{ continua en } x_0 \in I \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

En caso contrario, cuando la función f no tiene límite en el punto x_0, o cuando tiene límite distinto de $f(x_0)$ en el punto x_0, se dice que la función f es *discontinua* en el punto x_0.

4.1.3. Ejemplos y contraejemplos

Para demostrar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en un punto x_0 adherente a su intervalo de definición I, se necesita construir para cada precisión $\epsilon > 0$ un radio $\delta_\epsilon > 0$ (que depende en general de la precisión $\epsilon > 0$) tal que:

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \qquad (*)$$



Dicho de otro modo, se necesita construir alguna *función* $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) que asocie a cada precisión $\epsilon > 0$ un radio de seguridad δ_ϵ que cumpla la condición $(*)$[2]. Los siguientes ejemplos muestran cómo se puede construir tal función en la práctica.

Ejemplo 4.1.11 (Función identidad)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función identidad, definida $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces para todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$, tenemos que*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0 = f(x_0)$$

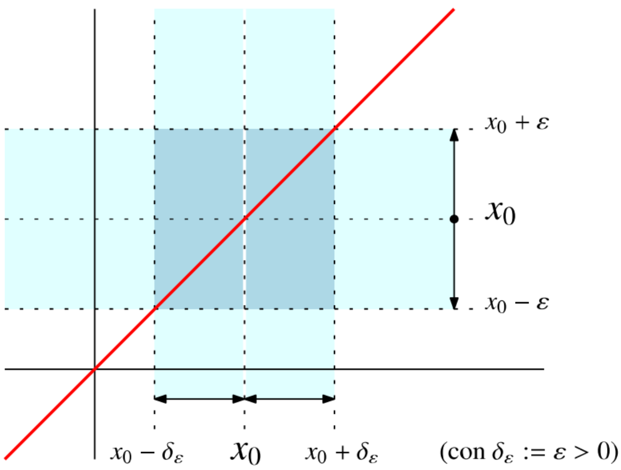
[2]Tal función no es única y, en la práctica, sólo se necesita construir alguna.

Por lo tanto, la función identidad $f(x) = x$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Demostración. Dada una precisión $\epsilon > 0$ fijada, se trata de hallar un radio $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - x_0| < \epsilon$$

Aquí, como $f(x) = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, es natural tomar $\delta_\epsilon := \epsilon$.



En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$, tenemos que $|x - x_0| < \epsilon$ (pues $\delta_\epsilon = \epsilon$), es decir: $|f(x) - x_0| < \epsilon$ (pues $f(x) = x$).

Observación 4.1.12. *En el ejemplo anterior, asociamos el radio $\delta_\epsilon := \epsilon$ a cada precisión $\epsilon > 0$, pero también hubiéramos podido asociar caulquier radio menor o igual a ϵ, por ejemplo $\delta_\epsilon := \epsilon/2$ o $\epsilon/1000$. Más generalmente, dados una función $f : I \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, es claro que si un radio $\delta_\epsilon > 0$ cumple la condición*

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

para una precisión $\epsilon > 0$, entonces cualquier radio $\delta'_\epsilon > 0$ tal que $\delta'_\epsilon \leq \delta_\epsilon$ cumple la misma condición (reemplazando δ_ϵ por δ'_ϵ).

Ejercicio 28 (Función identidad modificada). Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

El objetivo del ejercicio es demostrar que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, asociando el radio $\delta_\epsilon := \epsilon$ a cada precisión $\epsilon > 0$. Deducir que la función f es discontinua en el punto $x_0 = 0$.

(2) Ahora, se considera un punto $x_0 \neq 0$. Demostrar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = x_0$, asociando el radio $\delta_\epsilon := \min(\epsilon, |x_0|)$ a cada precisión $\epsilon > 0$. ¿Por qué no se puede tomar $\delta_\epsilon := \epsilon$? Deducir que la función f es continua en cada punto $x_0 \neq 0$.

Ejemplo 4.1.13 (Función raíz cuadrada)**.** *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la función raíz cuadrada, definida por $f(x) = \sqrt{x}$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Entonces para todo punto $x_0 \in [0, +\infty)$ tenemos que*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{x_0} = f(x_0)$$

Por lo tanto, la función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en todo punto $x_0 \in [0, +\infty)$.

Demostración. Sea $x_0 \geq 0$. Dada una precisión $\epsilon > 0$ fijada, se trata de hallar un radio $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in [0, +\infty), \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |\sqrt{(}x) - \sqrt{x_0}| < \epsilon \qquad (*)$$

Para ello, se distinguen dos casos:

- Caso donde $x_0 = 0$. En este caso, se puede tomar $\delta_\epsilon := \epsilon^2 > 0$. En efecto, para todo $x \in [0, +\infty)$ tal que $0 < |x - 0| < \delta_\epsilon$, tenemos que $0 < x < \epsilon^2$ (pues $|x - 0| = x \geq 0$ y $\delta_\epsilon = \epsilon^2$). Entonces, tenemos que $|\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$).
- Caso donde $x_0 > 0$. Queremos construir un radio $\delta_\epsilon > 0$ tal que

$$\forall x \in [0, +\infty), \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow \sqrt{x_0} - \epsilon < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \epsilon$$

Para evitar que el número $\sqrt{x_0} - \epsilon$ sea negativo, se reemplaza la precisión $\epsilon > 0$ por la precisión (más fina) $\epsilon' := \min(\epsilon, \sqrt{x_0}) > 0$, de tal modo que $\sqrt{x_0} - \epsilon' \geq 0$, mientras $\epsilon' \leq \epsilon$. Luego, se observa que para todo $x \in [0, +\infty)$, tenemos que

$$\sqrt{x_0} - \epsilon' < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \epsilon' \quad \Leftrightarrow \quad (\sqrt{x_0} - \epsilon')^2 < x < (\sqrt{x_0} + \epsilon')^2 \qquad (**)$$

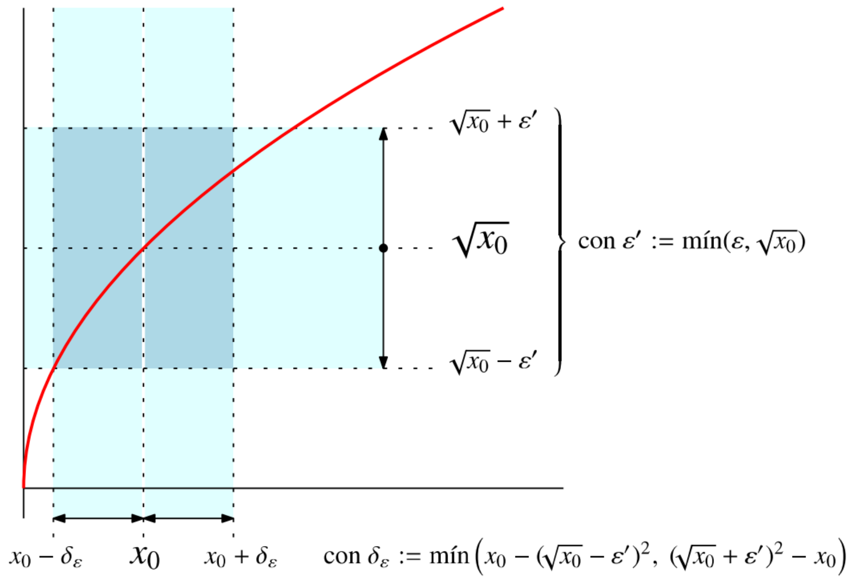
pues los tres números $\sqrt{x_0} - \epsilon'$, $\sqrt{x}$ y $\sqrt{x_0} + \epsilon'$ son positivos o nulos. En particular, cuando $x = x_0$, se observa que

$$(\sqrt{x_0} - \epsilon')^2 < x_0 < (\sqrt{x_0} + \epsilon')^2$$

lo que nos permite definir el radio $\delta_\epsilon > 0$, escribiendo

$$\delta_\epsilon := \min(x_0 - (\sqrt{x_0} - \epsilon')^2, (\sqrt{x_0}) + \epsilon')^2 - x_0) > 0$$

Ahora, se trata de mostrar que el radio $\delta_\epsilon > 0$ cumple la condición $(*)$ deseada.



Para ello, se considera un número $x \in [0, +\infty)$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon$. Por hipótesis sobre x, tenemos que

$$x < x_0 + \delta_\epsilon \leq x_0 + ((\sqrt{x_0} + \epsilon')^2 - x_0) = (\sqrt{x_0} + \epsilon')^2$$

pues $\delta_\epsilon \leq (\sqrt{x_0} + \epsilon')^2 - x_0$, y

$$x > x_0 - \delta_\epsilon \geq x_0 - (x_0 - (\sqrt{x_0} - \epsilon')^2) = (\sqrt{x_0} - \epsilon')^2$$

pues $\delta_\epsilon \leq x_0 - (\sqrt{x_0} - \epsilon')^2$. Es decir: $(\sqrt{x_0} - \epsilon')^2 < x < (\sqrt{x_0} + \epsilon')^2$. Por la equivalencia $(**)$, se deduce que $\sqrt{x_0} - \epsilon' < \sqrt{x} < \sqrt{x_0} + \epsilon'$, es decir

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \epsilon' \leq \epsilon$$

Lo que acaba de demostrar la condición $(*)$ en el caso donde $x_0 > 0$. □

Observación 4.1.14 (Negación de la propiedad de límite)**.** *Hasta ahora, sólo vimos ejemplos de funciones que tienen límites en todos los puntos de su intervalo de definición. Recordemos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$ si y sólo si:*

$$\exists L \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

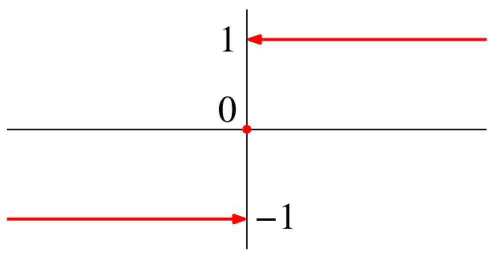
Así, para demostrar que una función $f : I \to \mathbb{R}$ no tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$, se necesita demostrar la negación del enunciado anterior, es decir el enunciado:

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - L| \geq \epsilon$$

El siguiente ejemplo presenta una función que no tiene límite en el punto $x_0 = 0$.

Ejemplo 4.1.15 (Función signo)**.** *Se considera la función sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por*

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x < 0 \end{cases}$$



Entonces la función sgn no tiene límite en el punto $x_0 = 0$.

Demostración. Queremos demostrar que:

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \epsilon$$

Dado un número $L \in \mathbb{R}$ cualquiera, se trata de hallar una precisión $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \wedge |\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \epsilon$$

es decir, tal que:

$$\forall \delta > 0, \exists x \in E^*(0, \delta), |\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \epsilon$$

Se elige la precisión $\epsilon := 1$. Dado un radio $\delta > 0$ cualquiera, queremos hallar un punto $x \in E^*(0, \delta)$ tal que $|f(x) - L| \geq 1 = \epsilon$. Para ello, se distinguen dos casos:

- Caso donde $L \geq 0$. En este caso, se elige el punto $x = -\frac{\delta}{2} \in E^*(0, \delta)$, de tal modo que $\mathrm{sgn}(x) = -1$. Entonces, tenemos que

  $$|\mathrm{sgn}(x) - L| = | - 1 - L| = |L + 1| = L + 1 \geq 1$$

  pues $L \geq 0$.

- Caso donde $L \leq 0$. En este caso, se elige el punto $x = \frac{\delta}{2} \in E^*(0, \delta)$, de tal modo que $\mathrm{sgn}(x) = 1$. Entonces, tenemos que

  $$|\mathrm{sgn}(x) - L| = |1 + (-L)| = 1 + (-L) \geq 1$$

  pues $-L \geq 0$.

Así para cada radio $\delta > 0$, logramos hallar un punto $x \in E^*(0, \delta)$ tal que $|\mathrm{sgn}(x) - L| \geq \epsilon$ (con $\epsilon = 1$). Por lo tanto, la función sgn no tiene límite en el punto $x_0 = 0$.

Ejercicio 29. Terminar el estudio de la función $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, demostrando que es continua en todo punto $x_0 \neq 0$.

Observación 4.1.16. *En el ejemplo anterior, se observa que la función sgn tiende a -1 (al ser igual a -1) cuando x tiende a 0 por la izquierda, mientras que sgn tiende a 1 (al ser igual a 1) cuando x tiende a 0 por la derecha, lo que escribiremos:*

$$\lim_{x \to 0^-} sgn(x) = -1 \quad y \quad \lim_{x \to 0^+} sgn(x) = 1$$

Así, la función sgn tiene límite laterales (por izquierda y por derecha) en el punto 0*, pero como dichos límites laterales son distintos, la función sgn no tiene límite en el punto* 0*. Las nociones de límites laterales serán definidas formalmente más adelante.*

Para acabar esta sección, se presenta un ejemplo de función tan irregular que no tiene límite en ningún punto de su dominio de definición:

Ejemplo 4.1.17 (Función de Dirichlet)**.** *Sea* $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la función de Dirichlet, definida por*

$$D(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Entonces la función D *no tiene límite en ningún punto* $x_0 \in \mathbb{R}$

Demostración. Dado $X_0 \in \mathbb{R}$ fijado, se trata de demostrar que

$$\forall L \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in E^*(x_0, \delta), |D(x) - L| \geq \epsilon$$

Así, dado un número L cualquiera, se trata de hallar una precisión $\epsilon > 0$ tal que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in E^*(x_0, \delta), |D(x) - L| \geq \epsilon$$

Se elige la precisión $\epsilon \coloneqq \frac{1}{2}$. Dado un radio $\alpha > 0$, queremos hallar un punto $x \in E^*(x_0, \delta)$ tal que $|D(x) - L| \geq \frac{1}{2} = \epsilon$. Para ello, se observa que el intervalo $(x_0, x_0 + \delta) \subset E^*(x_0, \delta)$ contiene a la vez números racionales y números irracionales (como todos los intervalos cuyo interior no es vacío), lo que nos permite elegir dos puntos $x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + \delta) \subset E^*(x_0, \delta)$ tales que $x_1 \in \mathbb{Q}$ y $x_2 \notin \mathbb{Q}$. Ahora, se distinguen los siguientes dos casos:

1. Caso donde $L \leq \frac{1}{2}$. En este caso, se toma $x \coloneqq x_1 \in E^*(x_0, \delta)$, de tal modo $D(x) = 1$ (pues $x = x_1 \in \mathbb{Q}$). Se verifica que

   $$|D(x) - L| = |1 - L| = 1 - L \geq \frac{1}{2}$$

   pues $L \leq \frac{1}{2}$

2. Caso donde $L \geq \frac{1}{2}$. En este caso, se toma $x \coloneqq x_2 \in E^*(x_0, \delta)$, de tal modo $D(x) = 0$ (pues $x = x_2 \notin \mathbb{Q}$). Se verifica que

   $$|D(x) - L| = |0 - L| = |L| = L \geq \frac{1}{2}$$

   pues $L \geq \frac{1}{2}$

Así, para cada radio $\delta > 0$, logramos hallar un punto $x \in E^*(0, \delta)$ tal que $|D(x) - L| \geq \epsilon$ (con $\epsilon = \frac{1}{2}$). Por lo tanto, la función D no tiene límite en el punto x_0.

4.1.4. Propiedades algebraicas de los límites

Antes de estudiar las propiedades de los límites, se necesita observar lo siguiente:

Observación 4.1.18. *Dados una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ adherente al intervalo de definición y un número $L \in \mathbb{R}$, los tres enunciados*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L, \quad \lim_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0 \quad y \ \lim_{x\to x_0} |f(x) - L| = 0$$

son equivalentes.

Demostración. En efecto tenemos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} f(x) = L &\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E^*(x_0,\delta) \cap I, |f(x) - L| < \epsilon \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) - L) = 0 &\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E^*(x_0,\delta) \cap I, |(f(x) - L) - 0| < \epsilon \\
\lim_{x\to x_0} |f(x) - L| = 0 &\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in E^*(x_0,\delta) \cap I, ||f(x) - L| - 0| < \epsilon
\end{aligned}$$

Se concluye observando que $||f(x) - L| - 0| = |f(x) - L| = |(f(x) - L) - 0|$. □

Proposición 4.1.19 (Límite de una suma, una resta)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números $L, L' \in \mathbb{R}$.*

(1) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L'$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = L + L'$.

(2) Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L'$, entonces $\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) = L - L'$.

Demostración.

(1) Supongamos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L'$. Por hipótesis, existen dos funciones $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon$ y $\epsilon \mapsto \delta'_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tales que

$$\forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \qquad (*)$$

$$\forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta'_\epsilon \Rightarrow |g(x) - L'| < \epsilon \qquad (*')$$

para toda precisión $\epsilon > 0$. Queremos construir una función $\epsilon \mapsto \delta''_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$\forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta''_\epsilon \Rightarrow |(f(x) - g(x)) - (L + L')| < \epsilon \qquad (*'')$$

para toda precisión $\epsilon > 0$. Para ello, se define $\delta''_\epsilon := \min(\delta_{\epsilon/2}, \delta'_{\epsilon/2}) > 0$ para todo $\epsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\epsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta''_\epsilon$, tenemos que

- $0 < |x - x_0| < \delta_{\epsilon/2}$ (pues $\delta''_\epsilon \leq \delta_{\epsilon/2}$), entonces $|f(x) - L| < \epsilon/2$ por $(*)$

- $0 < |x - x_0| < \delta'_{\epsilon/2}$ (pues $\delta''_\epsilon \leq \delta'_{\epsilon/2}$), entonces $|g(x) - L'| < \epsilon/2$ por $(*')$

Sumando las dos desigualdades obtenidas, se deduce que

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (L + L')| &= |(f(x) - L) + (g(x) - L')| \\ &\leq |f(x) - L| + |g(x) - L'| \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

Lo que demuestra la condición $(*'')$ para todo $\epsilon > 0$, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)+g(x)) = L+L'$.

(2) El caso de la resta es análogo al caso de la suma. □

Ejercicio 30. Demostrar el item (2) de la proposición anterior, adaptando la demostración del item (1) de modo adecuado. (Sugerencia: en la demostración del item (1), sólo se necesita reemplazar 5 ocurrencias del símbolo + por el símbolo -.)

Ahora, queremos demostrar la propiedad análoga para el producto y el cociente. Para ello, se necesita establecer algunos resultados intermedios.

Definición 4.1.20 (Función acotada en un entorno de un punto)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y un punto $x_0 \in \bar{I}$. Se dice que la función f *está acotada en un entorno del punto* x_0 cuando existen $r > 0$ y $M \geq 0$ tales que

$$\forall x \in E(x_0, r) \cap I, \quad |f(x)| \leq M$$

Ejercicio 31. El enunciado que expresa que f está acotada en un entorno de x_0 es:

$$\exists r > 0, \exists M \geq 0, \forall x \in E(x_0, r) \cap I, |f(x)| \leq M$$

Escribir la negación del enunciado anterior, es decir: el enunciado que expresa que la función f no está acotada en ningún entorno del punto x_0.

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(1) Demostrar que la función f no está acotada en ningún entorno del punto $x_0 = 0$.

(2) Demostrar que para todo punto $x_0 \neq 0$, la función f está acotada en un entorno de x_0. (Sugerencia: distinguir los casos $x_0 < 0$ y $x_0 > 0$)

Proposición 4.1.21. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces F está acotada en un entorno del punto x_0.*

Demostración. Suponiendo que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$, se considera un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in E^*(x_0, \delta \cap I, |f(x) - L| < 1 \qquad (*)$$

(Basta con tomar el radio asociado a la precisión $\epsilon = 1$.) Ahora se distinguen dos casos:

- Caso donde $x_0 \in I$ (la función f está definida en el punto x_0). En este caso, se toman $r := \delta$ y $M := \max(|L|+1, |f(x_0)|) \geq 0$. En efecto, dado un punto $x \in E(X-0, r) \cap I = E(x_0, \delta) \cap I$, se observa que
    - o bien $x = x_0$, y en este caso, tenemos que $|f(x)| = |f(x_0)| \leq M$
    - o bien $x \neq x_0$, y en este caso, tenemos que $x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$. Por lo tanto, tenemos que $|f(x) - L| < 1$ por $(*)$, de tal modo que

$$|f(x)| = |L + (f(x) - L)| \leq |L| + |f(x) - L| < |L| + 1 \leq M$$

  Así, para todo $x \in E(x_0, r) \cap I$, tenemos que $|f(x)| \leq M$.

- Caso donde $x_0 \notin I$ (la función f no está definida en el punto x_0), En este caso, basta con tomar $r := \delta$ y $M := |L| + 1$; el razonamiento es análogo. □

Proposición 4.1.22. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un punto $x_0 \in \bar{I}$. Si f está acotada en un entorno de x_0, y si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$.*

Demostración. Por hipótesis, sabemos que

(I) Existen $r > 0$ y $M \geq 0$ tales que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E(x_0, r) \cap I$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $M > 0$[3].

(II) Existe una función $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que para todo $\epsilon > 0$, tenemos que

$$\forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \ \Rightarrow\ |g(x)| < \epsilon \qquad (*)$$

Se trata de construir una función $\epsilon \mapsto \delta'_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$\forall x \in I,\ 0 < |x - x_0| < \delta'_\epsilon \ \Rightarrow\ |f(x)g(x)| < \epsilon \qquad (*')$$

para toda precisión $\epsilon > 0$. Para ello, se define $\delta'_\epsilon := \min\left\{\delta_{\epsilon/M}, r\right\} > 0$ para todo $\epsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\epsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta'_\epsilon$, tenemos que:

- $|x - x_0| < r$ (pues $\delta'_\epsilon \leq r$), entonces $|f(x)| \leq M$ por (I).
- $0 < |x - x_0| < \delta_{\epsilon/M}$ ($\delta'_\epsilon \leq \delta_{\epsilon/M}$), entonces $|g(x)| < \epsilon/M$ por $(*)$.

Por lo tanto, se deduce que

$$|f(x)g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| < M \cdot \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Esto demuestra la condición $(*')$ para todo $\epsilon > 0$, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = 0$. □

[3]En efecto, siempre se puede reemplazar $M \geq 0$ por $M' := M + 1 \geq 0$ sin afectar la condición (I)

Ahora, se puede demostrar la propiedad de límite para el producto:

Proposición 4.1.23 (Límite de un producto)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números $L, L' \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L'$, entonces $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = LL'$.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0$ y $\lim\limits_{x \to x_0} (g(x) - L') = 0$. Ahora, se observa que para todo $x \in I$, tenemos que

$$f(x)g(x) - LL' = (f(x) - L)L' + f(x)(g(x) - L')$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - L) = 0$, y como la función constante iguala L' está (trivialmente) acotada en un entorno de x_0, tenemos que $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - L)L' = 0$ por la Proposición 4.1.22. Por otro lado, como f tiene límite en el punto x_0, está acotada en un entorno de x_0 por la Proposición 4.1.21. Y como $\lim\limits_{x \to x_0} (g(x) - L') = 0$, tenemos que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)(g(x) - L') = 0$, usando de nuevo la Proposición 4.1.22. Sumando los dos límites anteriores, se deduce por la Proposición 4.1.19 que

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x) - LL') = \lim_{x \to x_0} ((f(x) - L)L') + \lim_{x \to x_0} (f(x)(g(x) - L')) = 0 + 0 = 0$$

lo que demuestra que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)g(x) = LL'$. $\square$

Ejercicio 33. El objetivo del ejercicio es demostrar que todas las funciones polinomiales son continuas en todos los puntos de $\mathbb{R}$.

(1) Demostrar por inducción sobre $k \in \mathbb{N}$ que $\lim\limits_{x \to x_0} x^k = x_0^k$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$. deducir que la función $x \mapsto x^k$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$. (Sugerencia: en el paso inductivo, observar que $x^{k+1} = f(x)g(x)$, con $f(x) = x^k$ y $g(x) = x$, y usar el resultado del Ejemplo 4.1.11.)

(2) Deducir de lo anterior que para todos $a \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$, la función monomial $x \mapsto ax^k$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) Demostrar por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ es continua en todo punto $x_0 \in \mathbb{R}$.

Proposición 4.1.24 (Límite de la función $1/f$)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si $x_0 \in \bar{I}$ es un punto tal que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, entonces*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

Demostración. Queremos demostrar que $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right)=0$. Para ello, se observa que

$$\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}=\frac{L-f(x)}{f(x)L}=-\frac{1}{L}\cdot\frac{1}{f(x)}\cdot(f(x)-L)$$

Demostremos que la función $g:I\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=1/f(x)$ está acotada en un entorno del punto x_0. Como $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\neq 0$, existe un radio $\delta>0$ tal que

$$|f(x)-L|<\frac{|L|}{2}$$

para todo $x\in E^*(x_0,\delta)\cap I$ (considerando el radio asociado a la precisión $|L|/2>0$). Entonces, tenemos que

$$|L|=|f(x)-(f(x)-L)|\leq|f(x)|+|f(x)-L|\leq|f(x)|-\frac{|L|}{2}$$

para todo $x\in E^+(x_0,\delta)\cap I$, de tal modo que

$$|f(x)|\geq|L|-\frac{|L|}{2}=\frac{|L|}{2}$$

para todo $x\in E^*(x_0,\delta)\cap I$. Ahora, se distinguen dos casos:

- Caso $x_0\in I$ (la función f está definida en el punto x_0). En este caso, se deduce de lo anterior que $|g(x)|=1/|f(x)|\leq 2/|L|$ para todo $x\in E^*(x_0,\delta)\cap I$, de tal modo que

  $$g(x)=\frac{1}{f(x)}\leq\max\left(\frac{2}{|L|},\frac{1}{f(x_0)}\right)$$

  para todo $x\in E(x_0,\delta)\cap I$ (distinguiendo los casos $x\neq x_0$ y $x=x_0$).
- Caso $x_0\notin I$ (la función f no está definida en el punto x_0). En este caso, se observa que $E(x_0,\delta)\cap I=E^*(x_0,\delta)\cap I$ (pues $x_0\notin I$), de tal modo que

  $$|g(x)|=\frac{1}{|f(x)|}\leq\frac{2}{|L|}$$

  para todo $x\in E(x_0,\delta)\cap I$

Así, en ambos casos, demostramos que la función $g(x)=1/f(x)$ está acotada en un entorno $E(x_0,\delta)$ del punto x_0. Además, tenemos que $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-L)=0$ por hipótesis. Aplicando dos veces seguidas la Proposición 4.1.22, se deduce de lo anterior que

$$\lim_{x\to x_0}\left(g(x)\cdot(f(x)-L)\right)=0$$

y

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{L}\right)=\lim_{x\to x_0}\left(-\frac{1}{L}\cdot(g(x)\cdot(f(x)-L))\right)=0$$

$\square$

Observación 4.1.25. *(1) Cabe destacar que para calcular el límite de la función* $x \mapsto 1/f(x)$ *en el punto* x_0*, se necesita verificar tres condiciones:*

a) *la función* $f : I \to \mathbb{R}$ *no se anula*[4] *en* I*:* $f(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$

b) *la función* f *tiene límite en el punto* $x_0 \in \bar{I}$

c) *el límite de la función* f *en el punto* x_0 *no es nulo:* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq 0$

¡Cuidado! Las condiciones a) y b) no implican la condición c). Un contraejemplo es la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Por construcción, tenemos que $f(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *(condición a)). Además, la función* f *tiene límite en el punto* $x_0 = 0$ *(condición b)), pero éste es nulo:* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

(2) Por otro lado, las condiciones b) y c) implican que la función f *no se anula en algún entorno reducido del punto* x_0*, en el sentido de que existe un radio* $\delta > 0$ *tal que:*

$$\forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, \ f(x) \neq 0$$

(Véase el Ejercicio 34 más abajo). Sin embargo, en el caso donde $x_0 \in I$*, esta propiedad de "no anulación local" no implica que* $f(x_0) \neq 0$*, salvo cuando* f *es continua en el punto* x_0*.*

Ejercicio 34 (Límite no nulo). Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y tal que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ en algún punto $x_0 \in \bar{I}$.

1. Demostrar que si $L > 0$, entonces existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, \ f(x) > 0$$

(Sugerencia: considerar el radio asociado a la precisión $\epsilon := L > 0$.)

2. Demostrar que si $L < 0$, entonces existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, \ f(x) < 0$$

(Sugerencia: considerar el radio asociado a la precisión $\epsilon := -L > 0$.)

3. Deducir de lo anterior que si $L \neq 0$, entonces la función f no se anula en algún entorno reducido del punto x_0. Mediante un contraejemplo adecuado, explicar por qué la propiedad no se puede extender (en general) a un entorno lleno (no reducido) del punto x_0.

[4] Esta condición sirve para asegurarnos uqe la funcipon $1/f$ está definida en el intervalo I.

Corolario 4.1.26 (Límite de un cociente)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tales que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Si $x_0 \in \bar{I}$ es un punto tal que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = L' \neq 0$, entonces*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{L'}$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.1.23 y de la Proposición 4.1.24, observando que $f/g = f \cdot (1/g)$. $\square$

4.1.5. Propiedades de monotonía

Lema 4.1.27 (Límite de una función positiva o nula)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f es positiva o nula en I (es decir: $|f(x)| \geq 0$ para todo $x \in I$) y tiene límite en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces dicho límite es positivo o nulo: $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.*

Demostración. Sea $L \coloneqq \lim_{x\to x_0} f(x)$. Dado $\epsilon > 0$, existe un radio $\delta > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ para todo $x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$. Eligiendo un punto $x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$, se observa que

$$-L = 0 - L \leq f(x) - L < \epsilon$$

pues $0 \leq f(x)$ por hipótesis. Así, demostramos que $-L < \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$. Luego $-L \leq 0$, es decir: $L \geq 0$. $\square$

Observación 4.1.28. *(1) De modo análogo, se demuestra que si f es negativa o nula en I (es decir: $f(x) \leq 0$ para todo $x \in I$) y tiene límite en el punto x_0, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq 0$.*

(2) ¡Cuidado! En el caso donde $f(x) > 0$ para todo $x \in I$ (resp. $f(x) < 0$ para todo $x \in I$), sólo se puede concluir que $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$ (resp. $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq 0$). Un ejemplo de una función estrictamente positiva con límite nulo es dado por la función f de la Observación 4.1.25 (1).

Más generalmente, se demuestra que:

Proposición 4.1.29 (Monotonía de los límites)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, y si ambas funciones tienen límites en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x)$.*

Demostración. Basta con aplicar el lema anterior con la función $g - f$ (que es positiva o nula en el intervalo I), observando que $\lim_{x \to x_0} (g(x) - f(x)) = \lim_{x \to x_0} g(x) - \lim_{x \to x_0} f(x)$. □

El siguiente teorema, conocido como el **teorema del sandwich**[5], enuncia una propiedad muy útil en la práctica para demostrar la existencia de un límite:

Teorema 4.1.30 (Teorema del sándwich). *Sean $f, g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ tres funciones definidas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y tales que $g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x)$ para todo $x \in I$. Si las funciones g_1 y g_2 tienen el mismo límite $L \in \mathbb{R}$ en un punto $x_0 \in \bar{I}$, entonces la función f también tiene límite L en el punto x_0:*

$$g_1 \leq f \leq g_2 \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0} g_1(x) = \lim_{x \to x_0} g_2(x) = L \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Demostración. Por hipótesis, existen funciones $\epsilon \mapsto \delta'_\epsilon$ y $\epsilon \mapsto \delta''_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tales que

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta'_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |g_1(x) - L| < \epsilon \qquad (*_1)$$

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta''_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |g_2(x) - L| < \epsilon \qquad (*_2)$$

para toda precisión $\epsilon > 0$. Queremos construir una función $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \qquad (*)$$

para todo $\epsilon > 0$. Para ello, se define $\delta_\epsilon := \min(\delta'_\epsilon, \delta''_\epsilon) > 0$ para todo $\epsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\epsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| \delta_\epsilon$, tenemos que

- $0 < |x - x_0| < \delta'_\epsilon$, entonces $|g_1(x) - L| < \epsilon$ por $(*_1)$, es decir: $L - \epsilon < g_1(x) < L + \epsilon$
- $0 < |x - x_0| < \delta''_\epsilon$, entonces $|g_2(x) - L| < \epsilon$ por $(*_2)$, es decir: $L - \epsilon < g_2(x) < L + \epsilon$

Por lo tanto, tenemos que $L - \epsilon < g_1(x) \leq f(x) \leq g_2(x) < \epsilon$, es decir: $|f(x) - L| < L + \epsilon$. Lo que demuestra la condición $(*)$ para todo $\epsilon > 0$, de tal modo que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$. □

Ejemplo 4.1.31 (Continuidad de la función logaritmo en el punto $x_0 = 1$). *En el capítulo sobre las integrales, definimos la función*

$$log(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

y demostramos en el Ejercicio 25 las desigualdades

$$1 - \frac{1}{x} \leq log(x) \leq x - 1$$

[5] Según la analogía del sándwich, las funciones g_1 y g_2 representan las trayectorias de dos rebanadas de pan que intentan capturar una loncha de jamón f. En Francia, este resultado también es conocido como el teorema de los gendarmes, al ser g_1 y g_2 dos gendarmes que intentan detener a un ladrón f.

para todo $x > 0$. Usando las propiedades algebraicas de los límites, se verifica inmediatamente que

$$\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-\frac{1}{1} = 0 \quad y \quad \lim_{x\to 1} x-1 = 1-1 = 0$$

Por el teorema del sándwich, se deduce que $\lim_{x\to 1} log(x) = 0 = log(1)$. Por lo tanto, la función logaritmo es continua en el punto $x_0 = 1$.

Ejercicio 35. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

(1) Verificar que $-x \leq f(x) \leq x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(2) Deducir (por el teorema del sándwich) que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$

(3) ¿Existe un punto $x_0 \neq 0$ donde f tenga límite?

4.1.6. Composición de límites

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$, y tales que $f(x) \in J$ para todo $x \in I$ (lo que escribiremos $f(I) \subset J$). En tal situación, se puede definir la función compuesta $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ por

$$(g \circ f)(x) \coloneqq g(f(x))$$

Ahora, se demuestra que:

Proposición 4.1.32 (Composición de límites)**.** *Si la función f tiene límite y_0 en un punto $x_0 \in \bar{I}$, con $y_0 \in J$, y si la función g es continua en el punto $y_0 \in J$ (es decir: $\lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$), entonces la función $g \circ f$ tiene límite $g(y_0)$ en el punto x_0:*

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$$

Demostración. Por hipótesis, existen funciones $\epsilon \mapsto \delta_\epsilon$ y $\epsilon \mapsto \delta'_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tales que:

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - y_0| < \epsilon \qquad (*)$$

$$\forall y \in I, \quad 0 < |y - y_0| < \delta'_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |g(y) - g(y_0)| < \epsilon \qquad (*')$$

para toda precisión $\epsilon > 0$. Queremos construir una función $\epsilon \mapsto \delta''_\epsilon$ (de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$) tal que

$$\forall x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta''_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon \qquad (**')$$

para toda precisión $\epsilon > 0$. Para ello, se define $\delta''_\epsilon \coloneqq \delta_{\delta'_\epsilon}$ para todo $\epsilon > 0$. En efecto, dados una precisión $\epsilon > 0$ y un punto $x \in I$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta''_\epsilon$, tenemos que $|f(x) - y_0| < \delta'_\epsilon$ por $(*)$, pues $\delta''_\epsilon = \delta_{\delta'_\epsilon}$. Ahora, se distinguen los siguientes dos casos:

- Caso donde $f(x) = y_0$. En este caso, es obvio que $|g(f(x)) - g(y_0)| = 0 < \epsilon$.
- Caso donde $f(x) \neq y_0$. En este caso, tenemos que $0 < |f(x) - y_0| < \delta'_\epsilon$. Aplicando $(*')$ al punto $y = f(x) \in J$, se deduce que $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$.

Así, en ambos casos vimos que $|g(f(x)) - g(y_0)| < \epsilon$, lo que acaba de de demostrar la condición $(*'')$ para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = g(y_0)$. □

Observación 4.1.33. *(1) Los lectores habrán observado que, en la proposición anterior, no sólo se supone que la función g tiene límite en el punto y_0, sino también se supone que dicho límite es igual a $g(y_0)$ (es decir: que la función g es continua en el punto y_0). En efecto, la propiedad de composición no se cumple cuando la función g tiene límite sin ser continua en el punto y_0. Un contraejemplo sencillo es el siguiente: sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por*

$$f(x) = 0 \quad y \quad g(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ 0 & si\ x \neq 0 \end{cases}$$

Escribiendo $x_0 \coloneqq 0$ e $y_0 \coloneqq 0$, es claro que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 = y_0 \quad y \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = 0$$

Sin embargo, tenemos que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de tal modo que $g \circ f$ tiene límite $1 \neq 0$ en el punto $x_0 = 0$.

(2) En la práctica, casi siempre usaremos la proposición anterior en el caso particular donde las funciones f y g son conntinuas en los puntos $x_0 \in I$ e $y_0 \coloneqq f(x_0) \in I$, respectivamente:

Corolario 4.1.34 (Composición de límites en el caso continuo)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : J \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en intervalos $I, J \subset \mathbb{R}$, y tales que $f(I) \subset J$. Si la función f es continua en un punto $x_0 \in I$, y si la función g es continua en el punto $y_0 \coloneqq f(x_0) \in J$, entonces la función $g \circ f$ es continua en el punto $x_0 \in I$.*

Demostración. Inmediato por la Proposición 4.1.32. □

Ejercicio 36 (Continuidad de la función logaritmo). En el Ejemplo 4.1.31, demostramos que la función logaritmo es continua en el punto $x_0 = 1$, es decir:

$$\lim_{x\to 1} \log(x) = 0 = \log(1)$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar que la función logaritmo es continua en todo punto $x_0 > 0$. Así, en lo que sigue se fija un número $x_0 > 0$.

(1) Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ la función definida por $f(x) = x/x_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Verificar que la función f es continua en el punto $x = x_0$, es decir: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 1$.

(2) Combinando el resultado del Ejemplo 4.1.31 con el corolario 4.1.34, deducir que la función $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \log(f(x)) = \log(x/x_0)$ es continua en el punto x_0.

(3) Usando la propiedad fundamental del logaritmo, verificar que $\log(x) = g(x) + \log(x_0)$ para todo $x \in \mathbb{R}^+$, y deducir que la función logaritmo es continua en el punto x_0.

4.1.7. Generalización de la noción de límite

En las secciones anteriores, vimos que la noción de límite está íntimamente vinculada con la noción de *entorno*. Para precisar más este vínculo se introducen las siguientes notaciones:

Notaciones: Conjunto de los entornos de un número

Dado un número real a, se denota por

$$\mathcal{E}(a) := \left\{E(a, \epsilon) \colon \epsilon \in \mathbb{R}^+\right\} = \left\{(a - \epsilon, a + \epsilon) : \epsilon \in \mathbb{R}^+\right\}$$

al conjunto formado por todos los entornos de número a, y por

$$\mathcal{E}^*(a) := \left\{E^*(a, \epsilon) \colon \epsilon \in \mathbb{R}^+\right\} = \left\{(a - \epsilon, a) \cup (a, a + \epsilon) : \epsilon \in \mathbb{R}^+\right\}$$

al conjunto formado por todos los entornos reducidos del mismo número. Por definición las notaciones $\mathcal{E}(a)$ y $\mathcal{E}^*(a)$ designan conjuntos de conjuntos.

Dados una función $f : I \to \mathbb{R}$ (definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$), un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, se recuerda que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) = L &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, f(x) \in E(L, \epsilon) \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, f(E^*(x_0, \delta) \cap I) \subset E(L, \epsilon)
\end{aligned}$$

Usando los conjuntos de entornos $\mathcal{E}(a)$ y $\mathcal{E}^*(a)$ definidos más arriba, se obtiene al final una caracterización abstracta (y muy compacta) de la noción de límite, que es la siguiente:

Observación 4.1.35 (Caracterización del límite en términos de entornos abstractos)**.** *Dados una función $f : I \to \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y un número $L \in \mathbb{R}$, tenemos la equivalencia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(L), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0), f(E \cap I) \subset F$$

Es decir, intuitivamente:

Para todo entorno F de L, existe un entorno reducido E de x_0 tal que $f(E \cap I) \subset F$.

Desde el punto de vista de la teoría, el interés de esta caracterización abstracta es que permite reemplazar las nociones de entornos definidas por los conjunto $\mathcal{E}(a)$ y $\mathcal{E}^*(a)$ por otras nociones de entornos (definidas a partir de otros conjuntos de conjuntos) *sin cambiar el esquema general de la definición de límite*. Así, en lo siguiente, cada vez que necesitemos introducir una nueva noción de límite (por ejemplo: los límites infinitos, o los límites laterales), sólo tendremos que definir las nociones de entornos (llenos y reducidos) correspondientes.

En lo que sigue, consideraremos las siguientes nociones de entornos además de la noción usual definida a partir de los conjuntos $\mathcal{E}(a)$ y $\mathcal{E}^*(a)$:

Entornos de $\pm\infty$ Se llama *entorno de* $+\infty$ a todo intervalo de la forma $(L, +\infty)$, con $L \in \mathbb{R}$. Así, el conjunto de los entornos (llenos o reducidos[6]) de $+\infty$ está definido por:

$$\mathcal{E}(+\infty) = \mathcal{E}^*(+\infty) \coloneqq \{(L, +\infty) : L \in \mathbb{R}\}$$

Del mismo modo, se llama *entorno de* $-\infty$ a todo intervalo de la forma $(-\infty, L)$, con $L \in \mathbb{R}$. Así, el conjunto de los entornos de $-\infty$ está definido por:

$$\mathcal{E}(-\infty) = \mathcal{E}^*(-\infty) \coloneqq \{(-\infty, L) : L \in \mathbb{R}\}$$

Entornos laterales de un número $a \in \mathbb{R}$ Dados un número $a \in \mathbb{R}$, se llama *entorno derecho del número a* a todo intervalo de la forma $(a, a+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$. Así, el conjunto de los entornos derechos (llenos o reducidos[7]) de a está definido por:

$$\mathcal{E}(a^+) = \mathcal{E}^*(a^+) \coloneqq \left\{(a, a+\epsilon) \colon \epsilon \in \mathbb{R}^+\right\}$$

Del mismo modo, se llama *entorno izquierdo del número a* a todo intervalo de la forma $(a-\epsilon, a)$, con $\epsilon > 0$. Así, el conjunto de los entornos izquierdos de a está definido por:

$$\mathcal{E}(a^-) = \mathcal{E}^*(a^-) \coloneqq \left\{(a-\epsilon, a) \colon \epsilon \in \mathbb{R}^+\right\}$$

Al final, se obtienen 5 nociones distintas de entornos llenos y reducidos:

Definición 4.1.36 (Conjuntos de entornos generalizados)**.** Dado un número real a, se definen los siguientes conjuntos de entornos generalizados (llenos y reducidos):

$$\begin{array}{rcll}
\mathscr{E}(a) & := & \{(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \ : \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} & \\
\mathscr{E}^\star(a) & := & \{(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) \ : \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} & \text{(entornos de } a\text{)} \\
\mathscr{E}(+\infty) = \mathscr{E}^\star(+\infty) & := & \{(L, +\infty) \ : \ L \in \mathbb{R}\} & \text{(entornos de } +\infty\text{)} \\
\mathscr{E}(-\infty) = \mathscr{E}^\star(-\infty) & := & \{(-\infty, L) \ : \ L \in \mathbb{R}\} & \text{(entornos de } -\infty\text{)} \\
\mathscr{E}(a^+) = \mathscr{E}^\star(a^+) & := & \{(a, a+\varepsilon) \ : \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} & \text{(entornos derechos de } a\text{)} \\
\mathscr{E}(a^-) = \mathscr{E}^\star(a^-) & := & \{(a-\varepsilon, a) \ : \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\} & \text{(entornos izquierdos de } a\text{)}
\end{array}$$

[6]Como los pseudonúmeros $\pm\infty$ (que *no son* números reales) no pertenecen a ningún entorno de $\pm\infty$, las nociones correspondientes de entorno lleno y de entorno reducido coinciden.

[7]Igual que para los entornos de $\pm\infty$, las nociones de entorno lateral lleno y de entorno lateral reducido coinciden. ¡Cuidado! Los símbolos a^+ y a^- *no son* números, son notaciones cómodas para indicar el tipo de entorno lateral considerado (derecho o izquierdo).

Estas 5 nociones de entornos inducen $5 \times 5 = 25$ nociones distintas de límites:

Definición 4.1.37 (Límite generalizado)**.** Dados

- una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$,
- un "punto generalizado" $k = a, +\infty, -\infty, a^+, a^-$ (con $a \in \mathbb{R}$)
- un "límite generalizado" $l = b, +\infty, -\infty, b^+, b^-$ (con $b \in \mathbb{R}$)

se define la noción de límite correspondiente por:

$$\lim_{x \to k} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(l), \exists E \in \mathcal{E}^*(k), f(E \cap I) \subset F$$

Observación 4.1.38. *(1) La noción de punto generalizado no es más que una notación cómoda para distinguir los 5 tipos de límites que se pueden considerar en el dominio, es decir:*

$$x \to a, \quad x \to +\infty, \quad x \to -\infty, \quad x \to a^+ \quad o \quad x \to a^-$$

con $a \in \mathbb{R}$. Del mismo modo, la noción de límite generalizado no es más que una notación cómoda para distinguir los 5 tipos de límites que se pueden considerar en el codominio:

$$f(x) \to b, \quad f(x) \to +\infty, \quad f(x) \to -\infty, \quad f(x) \to b^+ \quad o \quad f(x) \to b^-$$

con $b \in \mathbb{R}$

(2) La definición de límite generalizado sólo tiene sentido cuando todos los entornos reducidos $E \in \mathcal{E}^*(k)$ del punto generalizado $k = a, +\infty, -\infty, a^+, a^-$ (con $a \in \mathbb{R}$) intersectan el intervalo I de definición de la función f, es decir: cuando

$$\forall E \in \mathcal{E}^*(k), E \cap I \neq \emptyset$$

En el caso particular donde $k = a \in \mathbb{R}$ (noción usual de límite en el punto a), esta condición significa que el punto a es adherente al intervalo I.

En lo siguiente, se estudian algunos casos particulares de límites generalizados, dejando las demostraciones a los lectores como ejercicios.

Límites infinitos

Definición 4.1.39 (Límites infinitos)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Dado un punto $x_0 \in \bar{I}$, se definen las notaciones $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(+\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0), f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > L \\
\\
\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(-\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0), f(E \cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \quad \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < L
\end{aligned}$$

Cuando se trabaja con límites finitos ($L \in \mathbb{R}$) e infinitos ($L = \pm\infty$), es cómodo extender la recta real con los dos pseudonúmeros $-\infty$ y $+\infty$:

Definición 4.1.40 (Recta real extendida)**.** Se llama *recta real extendida* (o *recta real acabada*) y se escribe $\bar{\mathbb{R}}$ o $[-\infty, +\infty]$ al conjunto definido por:

$$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

(Recordemos que los pseudinúmeros $-\infty$ y $+\infty$ no son números reales.)

En este marco extendido, la propiedad de unicidad del límite se generaliza del modo siguiente:

Proposición 4.1.41 (Unicidad del límite)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números reales extendidos $L, L' \in \bar{\mathbb{R}}$: Si*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = L'$$

entonces $L = L'$.

Ejercicio 37. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} x = 0 \\ \frac{1}{|x|} & \text{si} x \neq 0 \end{cases}$$

(1) Bosquejar la gráfica de la función f.

(2) Demostrar que la función f es continua en todo punto $x_0 \neq 0$.

(3) Usando la definición anterior, demostrar que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.

Las propiedades algebraicas de los límites se generalizan a los límites infintos del modo siguiente.

Proposición 4.1.42 (Límite de una suma)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números reales extendidos $L, L' \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L'$, entonces el límite de la función $f + g$ en el punto x_0, cuando existe, está dado por la siguiente tabla (donde el símbolo "**?**" indica un caso indeterminado):*

	$L' = -\infty$	$L' \in \mathbb{R}$	$L' = +\infty$
$L = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**
$L \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$L + L'$	$+\infty$
$L = +\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Observación 4.1.43. *En el caso indeterminado donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, no se puede deducir nada sobre el límite de la suma $f + g$ en el punto x_0 (ni siquiera si tal límite existe), así como lo ilustra el siguiente ejercicio:*

Ejercicio 38 (Indeterminación para la suma). En cada uno de los siguientes items, definir dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = -\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0}(f(x) + g(x)) = L$, con $L \in \mathbb{R}$ fijado

(4) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ pero $f + g$ no tiene límite (finito ni infinito) en 0.

Proposición 4.1.44 (Límite de un producto)**.** *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, un punto $x_0 \in \bar{I}$ y dos números reales extendidos $L, L' \in \bar{\mathbb{R}}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L'$, entonces el límite de la función fg en el punto x_0, cuando existe, está dado por la siguiente tabla (donde el símbolo "**?**" indica un caso indeterminado):*

	$L' = -\infty$	$L' \in \mathbb{R}^-$	$L' = 0$	$L' \in \mathbb{R}^+$	$L' = +\infty$
$L = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	**?**	$-\infty$	$-\infty$
$L \in \mathbb{R}^-$	$+\infty$	LL' (> 0)	0	LL' (< 0)	$-\infty$
$L = 0$	**?**	0	0	0	**?**
$L \in \mathbb{R}^+$	$-\infty$	LL' (< 0)	0	LL' (> 0)	$+\infty$
$L = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	**?**	$+\infty$	$+\infty$

Observación 4.1.45. *En el caso indeterminado donde $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, no se puede deducir nada sobre el límite del producto fg en el punto x_0 (ni siquiera si tal límite existe), así como lo ilustra el siguiente ejercicio:*

Ejercicio 39 (Indeterminación para el producto). En cada uno de los siguientes items, definir dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumplen las siguientes condiciones:

(1) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = +\infty$

(2) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = -\infty$

(3) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty, \lim_{x\to 0} g(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0}(f(x)g(x)) = L$, con $L \in \mathbb{R}$ fijado

(4) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ pero fg no tiene límite (finito ni infinito) en 0.

Proposición 4.1.46 (Límite de la función $1/f$)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Dado un punto $x_0 \in \bar{I}$:*

1. *Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{f(x)}\right) = 0$.*
2. *Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{1}{|f(x)|}\right) = +\infty$.*

Observación 4.1.47. *En el caso donde $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, la proposición anterior sólo permite determinar el límite de la función $1/|f|$ en el punto x_0 (y, en este caso, dicho límite es $+\infty$). Sin embargo, se puede deducir en muchos casos el límite de la función $1/f$ en el punto x_0, estudiando el signo de la función f en un entorno de dicho punto.*

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 4 - primer parcial primer semestre 2018) Se considera $f(x) = \frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}$. Si $\lim_{x\to 1} f(x) = c \in \mathbb{R}$, entonces b y c son:

A) $b = 1$, $c = 1$

B) $b = 1$, $c = \frac{1}{2}$

C) $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$

D) Para todo b existe el límite y se cumple $b = c$

E) Ningún par b, c cumple lo pedido

Solución. Dado que $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$, para que exista $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}$ y sea un número real c, se debe cumplir que $\lim_{x\to 1} \sqrt{x} - b = 0$.

Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \sqrt{x} - b = 0 &\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \sqrt{x} - \lim_{x\to 1} b = 0 \qquad \text{por linealidad}\\ &\Leftrightarrow \lim_{x\to 1} \sqrt{x} = \lim_{x\to 1} b\\ &\Leftrightarrow 1 = b\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-b}{x^2-1}\cdot\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x^2-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $c = \frac{1}{4}$.

Proposición 4.1.48. *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y un punto $x_0 \in \bar{I}$.*

(1) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, y si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

(2) Si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in I$, y si $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, entonces $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

Ejercicio 40. Demostrar la proposición anterior.

Límites laterales

Definición 4.1.49 (Límites laterales)**.** Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y un número $L \in \mathbb{R}$. Dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0, x_0+\epsilon) \subset I$ para algún $\epsilon > 0$, se definen los *límites laterales por la derecha* en el punto x_0 por:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(L), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0^+), f(E\cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(+\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0^+), f(E\cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(-\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0^+), f(E\cap I) \subset F \\
&\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \quad x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < L
\end{aligned}$$

De modo análogo, dado un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(x_0 - \epsilon, x_0) \subset I$ para algún $\epsilon > 0$, se definen los *límites laterales por la izquierda* en el punto x_0 por:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(L), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0^-), f(E \cap I) \subset F$$

$$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(+\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0-), f(E \cap I) \subset F$$

$$\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > L$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(-\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(x_0^-), f(E \cap I) \subset F$$

$$\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall x \in I, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < L$$

Observación 4.1.50. *En la definición anterior, cabe destacar que:*

- *La noción de límite por la derecha en el punto x_0 (notación: $x \to x_0^+$) sólo tiene sentido cuando la función f está definida en un intervalo de la forma $(x_0, x_0 + \epsilon)$ para algún $\epsilon > 0$: $(x_0, x_0 + \epsilon) \subset I$. En efecto, esta condición nos asegura que todos los entornos derechos del punto x_0 intersectan el intervalo I, es decir: $\forall E \in \mathcal{E}(x_0^+), E \cap I \neq \emptyset$.*
- *La noción de límite por la izquierda en el punto x_0 (notación: $x \to x_0^-$) sólo tiene sentido cuando la función f está definida en un intervalo de la forma $(x_0 - \epsilon, x_0)$ para algún $\epsilon > 0$: $(x_0 - \epsilon, x_0) \subset I$. En efecto, esta condición nos asegura que todos los entornos izquierdos del punto x_0 intersectan el intervalo I, es decir: $\forall E \in \mathcal{E}^*(x_0^-), E \cap I \neq \emptyset$.*

Las nociones de límites laterales por la izquierda y por la derecha en un punto x_0 tienen esencialmente las mismas propiedades que la noción usual (bilateral) de límite finito o infinito en un punto x_0. Estas propiedades incluyen:

- la unicidad del límite
- el límite de una suma
- el límite de un producto
- el límite de la función $1/f$
- la monotonía de los límites
- el Teorema del sándwich

(Se deja a los lectores la tarea de adaptar los enunciados anteriores a los límites laterales.)

Una propiedad importante de los límites laterales es la siguiente:

Proposición 4.1.51 (Pegado de límites laterales)**.** *Sea $f; I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para todo punto $x_0 \in I^\circ$ interior al intervalo de definición y para todo número real extendido $L \in \bar{\mathbb{R}}$, tenemos la equivalencia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \ \wedge \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Observación 4.1.52. *En la práctica, la proposición anterior permite descomponer el estudio del límite de una función $f : I \to \mathbb{R}$ en un punto interior $x_0 \in I^\circ$ del modo siguiente:*

1. *Determinar, si existe, el límite $L^- := \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ (finito o infinito).*
2. *Determinar, si existe, el límite $L^+ := \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ (finito o infinito).*
3. *Si L^- y L^+ existen y son iguales, entonces $\lim_{x \to x_0} f(x) = L^- = L^+$. Si no, la función f no tiene límite (finito o infinito) en el punto x_0.*

Ejercicio 41. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Demostrar que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.
2. Demostrar que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
3. Deducir que la función f no tiene límite (finito o infinito) en el punto 0.

Límites en $\pm\infty$

Definición 4.1.53 (Límites en $\pm\infty$)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Cuando el intervalo de definición I es de la forma $I = \mathbb{R}, I = (a, +\infty)$ o $I = [a, +\infty)$ para algún $a \in \mathbb{R}$, se definen los límites (finitos e infinitos) en $+\infty$ por:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(L), \exists E \in \mathcal{E}^*(+\infty), f(E \cap I) \subset F \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(+\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(+\infty), f(E \cap I) \subset F \\ &\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x > K \Rightarrow f(x) > L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(-\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(+\infty), f(E \cap I) \subset F \\ &\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x > K \Rightarrow f(x) < L\end{aligned}$$

De modo análogo, cuando el intervalo de definición I es de la forma $I = \mathbb{R}, I = (-\infty, a)$ a $I = (-\infty, a]$ para algún $a \in \mathbb{R}$, se definen los límites (finitos e infinitos) en $-\infty$ por:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad &\Leftrightarrow \quad \forall F \in \mathcal{E}(L), \exists E \in \mathcal{E}^*(-\infty), f(E \cap I) \subset F \\ &\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x < K \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \quad &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(+\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(-\infty), f(E \cap I) \subset F \\ &\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x < K \Rightarrow f(x) > L\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \quad &\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{E}(-\infty), \exists E \in \mathcal{E}^*(-\infty), f(E \cap I) \subset F \\ &\Leftrightarrow \forall L \in \mathbb{R}, \exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad x < K \Rightarrow f(x) < L\end{aligned}$$

Ejercicio 42. Usando la definición de límite en $+\infty$, demostrar que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Como para las nociones de límites laterales, las nociones de límites en $+\infty$ y $-\infty$ tienen esencialmente las mismas propiedades que la noción de límite bilateral (finito o infinito) en un punto $x_0 \in \bar{I}$. Estas propiedades incluyen:

- la unicidad del límite
- el límite de una suma
- el límite de un producto

- el límite de la función $1/f$
- la monotonía de los límites
- el Teorema del sándwich

(Se deja a los lectores la tarea de adaptar los enunciados anteriores a los límites en $\pm\infty$.)

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 4 - segundo semestre 2023) Indique cuánto vale el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) + \frac{x^2-1}{x-1} - (x-3)$$

A) No existe B) 0 C) 2 D) 4 E) $+\infty$

Solución. Por linealidad del límite, tenemos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) + \frac{x^2-1}{x-1} - (x-3) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) + \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x-1} - (x-3)$$

Calculemos estos dos límites por separado.

Primero, dado que $-1 \leq \operatorname{sen}(y) \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, tenemos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(1-x) \leq 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$-\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) \leq \frac{1}{x-1}$$

y, por el teorema del sandwich:

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x-1} \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}$$

es decir

$$0 \leq \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) \leq 0$$

y, por lo tanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x) = 0$.

Además,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+infty} \frac{x^2-1}{x-1} - (x-3) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} - (x-3) \\
&= \lim_{x\to+\infty} (x+1) - (x-3) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \cancel{x} + 1 - \cancel{x} + 3 = 4
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x)+\frac{x^2-1}{x-1}-(x-3) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-1}\operatorname{sen}(1-x)+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x-1}-(x-3)\\ &= 0+4=4\end{aligned}$$

Ejemplo 4.1.54 (Límite de la función logaritmo en $+\infty$)**.** *Queremos demostrar que*

$$\lim_{x\to+\infty}\log(x)=+\infty$$

Para ello, se considera un número $L\in\mathbb{R}$*, y se trata de hallar un número* $K\in\mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall x>0, x>K \;\Rightarrow\; \log(x)>L$$

Se distinguen dos casos:

- *Caso donde* $L\le 0$*. En este caso, se elige* $K:=1$*, y se observa que para todo número* $x>1$*, tenemos que* $\log(x)>\log(1)=0\ge L$ *(usando la monotonía del logaritmo).*
- *Caso donde* $L>0$*. En este caso, se elige* $K:=2^n$*, donde* n *es un entero natural tal que* $n\ge L/\log(2)$*. (Tal entero existe por el principio de Arquímedes.) En efecto, para todo número* $x>2^n$*, tenemos que* $\log(x)>\log(2^n)=n\log(2)\ge\frac{L}{\log(2)}\cdot\log(2)=L$*.*

Así, para todo $L\in\mathbb{R}$*, logramos definir un número* $K>0$ *tal que* $\log(x)>L$ *para todo* $x>K$*. Por lo tanto:* $\lim\limits_{x\to+\infty}\log(x)=+\infty$

Ejercicio 43. Deducir de lo anterior que $\lim\limits_{x\to 0^+}\log(x)=-\infty$. (Sugerencia: observar que para todo $x>0$, tenemos que $\log(\frac{1}{x})=-\log(x)$.)

Ejercicio 44. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

(1) Demostrar que la función f es continua en todo punto $x_0\in\mathbb{R}$.

(2) Verificar que $f(x)=1-\frac{1}{1+x}$ para todo $x>0$, y deducir que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

(3) Verificar que $f(x)=\frac{1}{1+x}-1$ para todo $x<0$, y deducir que $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.

Ejercicio 45. Sea $f:(a,+\infty)\to\mathbb{R}$ (con $a\in\mathbb{R}$) una función monótona creciente.

(1) Demostrar que si la función f está acotada superiormente en el intervalo $(a,+\infty)$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$, donde $L:=\sup\{f(x)\colon x\in(a,+\infty)\}$.

(2) Demostrar que si la función f no está acotada superiormente en el intervalo $(a,+\infty)$, entonces $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(3) ¿Qué pasa cuando la función f es monótona decreciente?

4.2. Funciones continuas

4.2.1. Observación y definición

Se recuerda que una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es *continua en un punto* $x_0 \in \mathbb{R}$ cuando la función f tiene límite igual a $f(x_0)$ en el punto x_0. Aplicando la definición de límite, se obtienen las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, f(x) \in E(f(x_0), \epsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon
\end{aligned}$$

Además, como el límite considerado es el propio valor de la función f en el punto x_0, se puede observar que:

Observación 4.2.1. *Para toda precisión $\epsilon > 0$ y para todo radio $\delta > 0$, los enunciados*

$$\forall x \in E^*(x_0, \delta) \cap I, f(x) \in E(f(x_0), \epsilon)$$

y

$$\forall x \in E(x_0, \delta) \cap I, f(x) \in E(f(x_0), \epsilon)$$

son equivalentes. En efecto, cuando $x = x_0$, siempre tenemos que $f(x) = f(x_0) \in E(f(x_0), \epsilon)$. Por lo tanto, la condición $f(x) \in E(f(x_0), \epsilon)$ se cumple para todos los puntos $x \in E^*(x_0, \delta) \cap I$ si y sólo si se cumple para todos los puntos $x \in E(x_0, \delta) \cap I = (E^+(x_0, \delta) \cap I) \cup \{x_0\}$.

Gracias a la observación anterior, se puede simplificar la definición de la noción de continuidad en un punto, reemplazando los entornos reducidos por entornos llenos.

Proposición 4.2.2 (Continuidad en un punto)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para todo $x_0 \in I$, tenemos que*

$$\begin{aligned}
f \text{ continua en } x_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(x_0, \delta) \cap I, f(x) \in E(f(x_0), \epsilon) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon
\end{aligned}$$

Demostración. Obvio por la Observación 4.2.1. □

En lo siguiente, usaremos sistemáticamente la caracterización anterior para estudiar la continuidad de una función (en un punto o en un intervalo), lo que nos permitirá trabajar sólo con entornos llenos, en el dominio (con entornos de la forma $E(x_0, \delta)$) como en el codominio (con entornos de la forma $E(f(x_0), \epsilon)$).

Definición 4.2.3. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *continua en el intervalo* I cuando es continua en todo punto de I, es decir:

$$\begin{aligned} f \text{ continua en } x_0 \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E(x_0, \delta) \cap I, f(x) \in E(f(x_0), \epsilon) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

4.2.2. Propiedades algebraicas

Ya vimos en la Sección 4.1 que:

- toda función constante es continua
- la función identidad $x \mapsto x$ es continua en $\mathbb{R}$
- la función raíz cuadrada $x \mapsto \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty)$
- la función logaritmo $x \mapsto \log(x)$ es continua en $(0, +\infty)$

Ejercicio 46. Demostrar que la función $x \mapsto |x|$ es continua $\mathbb{R}$.

Más generalmente, se verifica que:

Proposición 4.2.4 (Suma, resta, producto y cociente de funciones continuas)**.** *Si f y g son funciones continuas en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces las funciones $f + g$ (suma), $f - g$ (resta) y fg (producto) son continuas en I. Además, si f no se anula en el intervalo I (es decir: si $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$), entonces la función f/g (cociente) también es continua en I.*

Demostración. Se sigue inmediatamente de los resultados de la Sección 4.1.4.

En particular, es claro que

- Toda función polinomial
$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$
con $n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, es continua en $\mathbb{R}$.
- Toda fracción racional
$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$
donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, es continua en todo intervalo donde el polinomio $q(x)$ no se anula.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 7 - primer parcial segundo semestre 2024) Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = 2x$. Sabemos que la función tiene límite en $x = 1$ y vale 2, es decir que se cumple que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Si tomamos $\epsilon = \frac{1}{3}$ sabemos que

$$\boxed{\text{existe } \delta > 0 \text{ tal que para todo } x \in E^*(1,\delta) \text{ se cumple que } f(x) \in E(f(1),\epsilon)}$$

Indicar el máximo valor de δ que cumple con lo que dice el recuadro.

(A) $\delta = \frac{1}{6}$ **(C)** $\delta = \frac{1}{4}$ **(E)** $\delta = \frac{2}{3}$

(B) $\delta = \frac{1}{3}$ **(D)** $\delta = \frac{1}{5}$ **(F)** $\delta = \frac{1}{2}$

Solución. Debido a que la función $f(x) = 2x$ es continua en x para todo $x \in \mathbb{R}$ y en particular para $x = 1$, tenemos que se cumple que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = 2$$

Entonces, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in E^*(1,\delta) \Rightarrow f(x) \in E(f(1),\epsilon) \qquad (*)$$

En particular, en este ejercicio fijamos $\epsilon = \frac{1}{3}$ y buscamos el máximo valor de δ tal que se cumple $(*)$. Es decir, buscamos el máximo valor de $\delta > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| \leq \frac{1}{3}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x)-2| \leq \frac{1}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad |2x-2| \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 2|x-1| \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad \underbrace{|x-1|}_{<\delta} \leq \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Entonces el máximo valor que puede tomar δ es $\frac{1}{6}$.

Proposición 4.2.5 (Composición de funciones continuas)**.** *Si f es una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, y si g es una función continua en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset J$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en el intervalo I.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Corolario 4.1.34.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 2 - primer parcial primer semestre 2024) Sean f_a y g dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ definidas por $g(x) = x^2$ y $f_a(x) = \begin{cases} x-5 & \text{si } x < a \\ x+1 & \text{si } x \geq a \end{cases}$. El valor de a que hace que la función $g \circ f_a$ sea continua es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

F) $g \circ f_a$ no es continua para ningún valor de a

Solución. Tenemos que

$$\begin{aligned} g \circ f_a(x) &= \begin{cases} (x-5)^2 & \text{si } x < a \\ (x+1)^2 & \text{si } x \geq a \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 - 10x + 25 & \text{si } x < a \\ x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \geq a \end{cases} \end{aligned}$$

Para todo $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $g \circ f_a$ es continua en x para todo $x \in (-\infty, a) \cup (a, +\infty)$ ya que en estos intervalos está dada por polinomios.

Falta ver que $g \circ f_a$ sea continua a y para ello se debe verificar que

$$\lim_{x \to a} (g \circ f_a)(x) = (g \circ f_a)(a) = a^2 + 2a + 1$$

El límite $\lim_{x \to a} (g \circ f_a)(x)$ existe si existen y son iguales los límites laterales:

$$\lim_{x \to a^-} (g \circ f_a)(x) = \lim_{x \to a^-} x^2 - 10x + 25 = a^2 - 10a + 25$$

y

$$\lim_{x \to a^+} (g \circ f_a)(x) = \lim_{x \to a^+} x^2 + 2x + 1 = a^2 + 2a + 1$$

Luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} (g \circ f_a)(x) \text{ existe } &\Leftrightarrow a^2 - 10a + 25 = a^2 + 2a + 1 \\ &\Leftrightarrow 24 = 12a \\ &\Leftrightarrow a = 2 \end{aligned}$$

Finalmente, cuando $a = 2$, tenemos $\lim_{x \to 2} (g \circ f_2)(x) = 17$ y $(g \circ f_2)(2) = 17$. Entonces, el valor de a que hace que la función $g \circ f_a$ sea continua es $a = 2$.

Notamos que f_2 no es continua y, sin embargo, $g \circ f_2$ lo es.

Ejercicio 47. Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, se recuerda que sus partes positiva y negativa son las funciones $f^+, f^- : I \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f^+(x) = \max\{0, f(x)\} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$$

para todo $x \in I$.

(1) Demostrar que si f es continua en I, entonces f^+ y f^- son continuas en I.

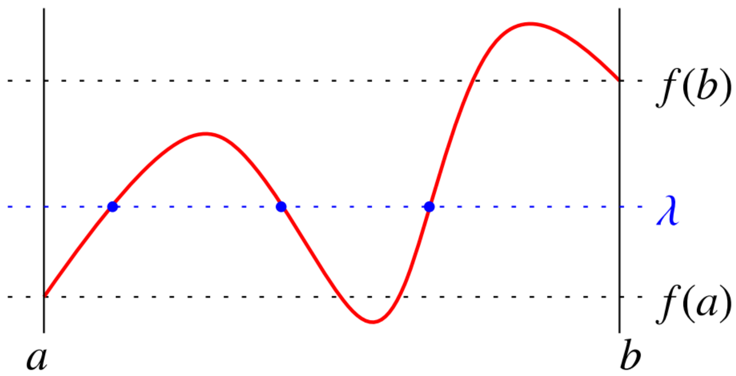
(2) Deducir de lo anterior que si f y g son funciones continuas en un mismo intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces las funciones h_1 y h_2 definidas por

$$h_1(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{y} \quad h_2(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

para todo $x \in I$, son continuas en I. (Sugerencia: observar que $h_1 = f - (f-g)^+$ y $h_2 = f + (g-f)^+$.)

4.2.3. Valores intermedios

Intuitivamente, una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es continua cuando su gráfica se puede trazar "sin levantar la mano". En particular, parece claro que si dicha función está definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces su gráfica tiene que pasar al menos una vez por cada valor intermedio λ entre $f(a)$ y $f(b)$:



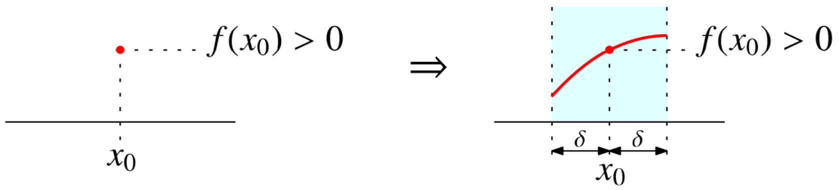
El objetivo de esta sección es transformar esta intuición en un teorema cuya demostración sólo depende de la definición formal de la noción de continuidad y de las propiedades de los límites que ya demostramos en las secciones anteriores.

Para ello, necesitaremos el siguiente lema, que expresa que si una función continua es positiva (resp. negativa) en un punto de su intervalo de definición, entonces es positiva (resp. negativa) en un entorno de dicho punto:

Lema 4.2.6. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Para todo punto $x_0 \in I$:*

(1) Si $f(x_0) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in E(x_0, \delta) \cap I$.

(1) Si $f(x_0) < 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in E(x_0, \delta) \cap I$.



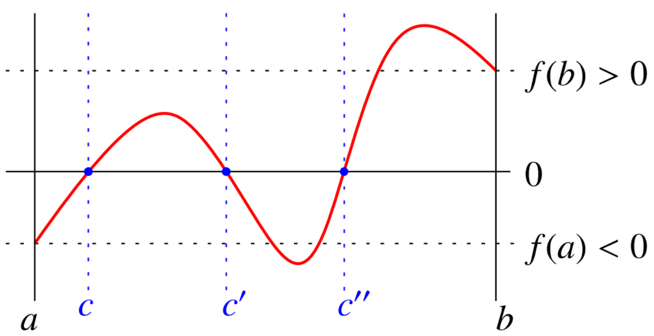
Demostración.

(1) Supongamos que $f(x_0) > 0$. Como f es continua en el punto x_0, existe un radio $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$ para todo $x \in E(x_0, \delta) \cap I$ (considerando el radio asociado a la precisión $\epsilon := f(x_0) > 0$). Esto implica que para todo $x \in E(x_0, \delta) \cap I$, tenemos que $f(x) - f(x_0) > -f(x_0)$, es decir: $f(x) > 0$.

(2) Análogo (ejercicio). □

Gracias al lema anterior, se puede demostrar uns primera versión del teorema de los valores intermedios, que es la siguiente:

Teorema 4.2.7 (Teorema de Bolzano)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$). Si $f(a)$ y $f(b)$ son de distinto signo (no nulos), entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*



Observación 4.2.8. *Intuitivamente, el teorema de Bolzano expresa que si $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, o si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$, entonces la gráfica de f intersecta el eje x en al menos*

un punto, cuya abcisa $c \in [a, b]$ constituye por construcción un cero[8] *de la función f. (Tal cero no es necesariamente único, como se puede observar en la figura anterior.)*

Demostración del Teorema de Bolzano. Supongamos, por ejemplo, que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$. (La demostración del caso simétrico, donde $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ es análoga.) Se considera el subconjunto $A \subset [a, b]$ definido por $A := \{x \in [a, b] \colon f(x) < 0\}$. Por construcción, tenemos que $a \in A$ y $b \notin A$. Además, el conjunto $A \subset [a, b]$ es no vacío y acotado, entonces tiene supremo $c := \sup(A) \in [a, b]$. Queremos demostrar que $f(c) = 0$. Para ello, se demuestra (por el absurdo) que los dos casos $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ son imposibles.

- Caso donde $f(c) < 0$. En este caso tenemos que $c < b$, pues $f(b) > 0$. Por el Lema 4.2.6, existe un radio $\delta > 0$ tal que $f(x) < 0$ para todo $x \in E(c, \delta) \cap [a, b]$- Ahora se considera el punto $x := \text{mín}(c + \frac{\delta}{2}, b)$. Por construcción, tenemos que $x \in E(c, \delta) \cap [a, b]$, entonces $f(x) < 0$. Luego, tenemos que $x \in A$, entonces $x \leq c = \sup(A)$. Pero esto es absurdo, pues $x > c$ por construcción. Por lo tanto, el caso $f(c) < 0$ es imposible.
- Caso donde $f(c) > 0$. En este caso, tenemos que $c > a$, pues $f(a) < 0$. Por el lema 4.2.6, existe un radio $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in E(c, \delta) \cap [a, b]$. Además, como $c = \sup(A)$, existe un punto $x \in A$ tal que $\text{máx}\{a, c - \delta\} < x < c$. Por construcción, tenemos que $x \in E(c, \delta) \cap [a, b]$, entonces $f(x) > 0$. Pero esto también es absurdo, pues $f(x) < 0$, ya que $x \in A$. Por lo tanto, el caso $f(c) > 0$ es imposible.

En conclusión, ambos casos $f(c) < 0$ y $f(c) > 0$ son absurdos. Luego: $f(c) = 0$. □

Ahora se puede demostrar el teorema de los valores intermeios en su forma más general:

Corolario 4.2.9 (Teorema de los valores intermedios)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en el intervalo $[a, b]$ (con $a < b$). Entonces para todo valor intermedio λ entre $f(a)$ y $f(b)$ (Es decir: un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ o $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$ según el caso), existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \lambda$.*

Demostración. En el caso particular donde $\lambda = f(a)$ o $\lambda = f(b)$, basta con tomar $c := a$ o $c := b$ según el caso. Ahora, se supone que $\lambda \neq f(a)$ y $\lambda \neq f(b)$, de tal modo que $f(a) < \lambda < f(b)$ o $f(b) < \lambda < f(a)$ según el caso.. Se observa que la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - \lambda$ cumple las hipótesis del teorema de Bolzano. Entonces existe un punto $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, es decir: tal que $f(c) = \lambda$. □

Corolario 4.2.10. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces la imágen $f(I)$ del intervalo I por la función f también es un intervalo.*

Demostración. Se trata de demostrar que el subconjunto $f(I) \subset \mathbb{R}$ cumple la condición

$$\forall y_1, y_2 \in f(I), \forall y \in \mathbb{R}, y_1 < y < y_2 \Rightarrow y \in f(I)$$

[8] Recordemos que un *cero* de una función f es cualquier número $c \in \text{dom}(f)$ tal que $f(c) = 0$.

Para ello, se consideran elementos $y_1, y_2 \in f(I)$ e $y \in \mathbb{R}$ tales que $y_1 < y < y_2$. Como $y_1, y_2 \in f(I)$, existen dos números $x_1, x_2 \in I$ tales que $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$. Es claro que $x_1 \neq x_2$, ya que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Se distinguen los siguientes dos casos:

- Caso donde $x_1 < x_2$. Por el teorema de los valores intermedios aplicado a la función $f\big|_{[x_1,x_2]} : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ y al valor intermedio $\lambda := y$, existe un punto $x \in [x_1, x_2]$ tal que $f(x) = y$. Y como $x \in I$, deduce que $y = f(x) \in f(I)$.
- Caso donde $x_1 > x_2$. El razonamiento es análogo (basta con intercambiar x_1 y x_2). $\square$

Observación 4.2.11. *El corolario anterior expresa que la imagen de un intervalo de* $\mathbb{R}$ *por una función continua siempre es un intervalo* $\mathbb{R}$*. ¡Cuidado! El intervalo imagen no es necesariamente un intervalo del mismo tipo que el intervalo inicial; por ejemplo, la imagen de un intervalo abierto (o semiabierto) puede ser cerrado (o abierto, o semiabierto, etc.). Sin embargo, veremos en la siguiente sección que la imágen de un intervalo cerrado* $[a, b]$ *por una función continua* f *siempre es un intervalo cerrado* $[c, d]$ *(con* $c \leq d$*).*

Ejercicio 48. Sea $I = (0, 1)$. Definir funciones continuas $f_1, f_2, f_3, f_4 : I \to \mathbb{R}$ tales que

$$f_1(I) = [0, 1], \qquad f_2(I) = (0, 1], \qquad f_1(I) = [0, +\infty), \qquad f_4(I) = \mathbb{R}$$

4.2.4. Extremos absolutos

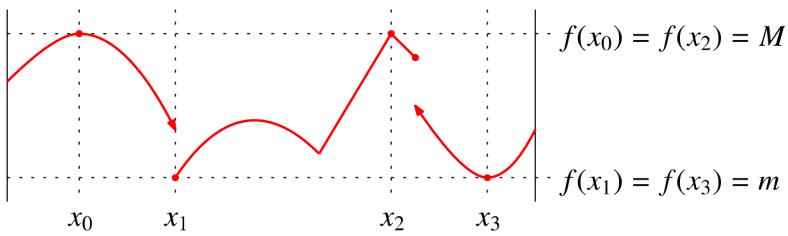
Definición 4.2.12 (Extremos absolutos)**.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Se dice que un punto $P = (x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f es:

- un *mínimo absoluto* de f cuando $f(x_0) \leq f(x)$ para todo $x \in I$
- un *máximo absoluto* de f cuando $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$
- un *extremo absoluto* de f cuando P es un mínimo absoluto o un máximo absoluto de f.

Además, se dice que la función f tiene un mínimo absoluto (resp. un máximo absoluto, un extremo absoluto) en el punto $x_0 \in I$ cuando el punto[9] $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto (resp. un máximo absoluto, un extremo absoluto) de la función f.

Observación 4.2.13. *(1) Una función* $f : I \to \mathbb{R}$ *puede tener cero, uno o múltiples mínimos absolutos (resp. máximos absolutos, extremos absolutos). Por ejemplo, en la siguiente figura, los puntos* $(x_0, f(x_0))$ *y* $(x_2, f(x_2))$ *son máximos absolutos de la función bosquejada, mientras los puntos* $(x_1, f(x_1))$ *y* $(x_3, f(x_3))$ *son mínimos absolutos:*

[9]¡Cuidado! Aquí se usa la palabra *punto* con dos sentidos distintos: para designar un elemento $x_0 \in I$ (punto unidimensional), o para designar un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f (punto bidimensional).



(2) Más generalmente, se observa que:

- *una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo absoluto en $(x_0, f(x_0))$ si y sólo si su conjunto imagen $f(I)$ tiene mínimo $m := \min(f(I)) = f(x_0)$ (en el sentido de los conjuntos)*
- *una función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un máximo absoluto en $(x_0, f(x_0))$ si y sólo si su conjunto imagen $f(I)$ tiene máximo $M := \max(f(I)) = f(x_0)$ (en el sentido de los conjuntos)*

El objetivo de esta sección es demostrar que toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$) tiene (al menos) un mínimo absoluto y un máximo absoluto. Antes de demostrar este resultado importante, se necesita verificar que:

Proposición 4.2.14. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), entonces f está acotada en dicho intervalo.*

Demostración. Se considera el conjunto $A \subset [a, b]$ definido por

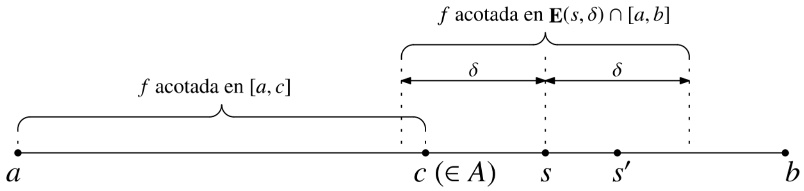
$$\begin{aligned} A &:= \{c \in [a, b] \colon f \text{ está acotada en } [a, b]\} \\ &= \{c \in [a, b] \colon \exists M_c \geq 0, \forall x \in [a, c], |f(x)| \leq M_c\} \end{aligned}$$

Por construcción, el conjunto $A \subset [a.b]$ está acotado y no es vacío, pues $a \in A$. (En efecto, la función f está trivialmente acotada en el intervalo $[a, a] = \{a\}$.) Luego A tiene supremo $s := \sup(A)$. Queremos demostrar que $s = b \in A$. Para ello, se observa lo siguiente:

(1) Como la función f es continua en el punto s, f está acotada en un entorno del punto s (por la Proposición 4.1.21), lo que significa que existen $M_s \geq 0$ y $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \leq M_s$ para todo punto $x \in E(s, \delta) \cap [a, b]$.

(2) Además, como $s = \sup(A)$, existe un punto $c \in A$ tal que $s - \delta < c \leq s$, y por definición del conjunto A, sabemos que la función f está acotada en el intervalo $[a, c]$, lo que significa que existe $M_c \geq 0$ tal que $|f(x)| \leq M_c$ para todo punto $x \in [a, c]$.

(3) Sea $s' = \min(s + \frac{\delta}{2}, b)$. Por construcción, tenemos que $s' \in E(s, \delta) \cap [a, b]$, y dado que $c \in E(s, \delta) \cap [a, b]$ (pues $s - \delta < c \leq s$), se deduce que $[c, s'] \subset E(s, \delta) \cap [a, b]$. Por (1), esto implica que $|f(x)| \leq M_s$ para todo punto $x \in [c, s']$.



(4) Agregando los resultados obtenidos en los ítems (2) y (3), se deduce que

$$|f(x)| \leq \text{máx}\{M_c, M_s\}$$

para todo $x \in [a, s'] = [a, c] \cup [c, s']$. Por lo tanto, f está acotada en el intervalo $[a, s']$, lo que demuestra que $s' \in A$.

(5) Como $s' \in A$, tenemos que $s' \leq s = \sup(A)$. Por otro lado, tenemos que $s + \frac{\delta}{2} \geq s$ y $b \geq s$, de tal modo que $s' = \text{mín}\left\{s + \frac{\delta}{2}, b\right\} \geq s$. Luego: $s = s'$. Ahora, se observa que $s' = s < s + \frac{\delta}{2}$. Entonces $s' \neq s + \frac{\delta}{2}$, lo que implica finalmente que $s = s' = b$.

En los ítems (4) y (5), demostramos que $s = s' = b \in A$. Por definición del conjunto A, esto implica que la función f está acotada en el intervalo $[a, b]$. $\square$

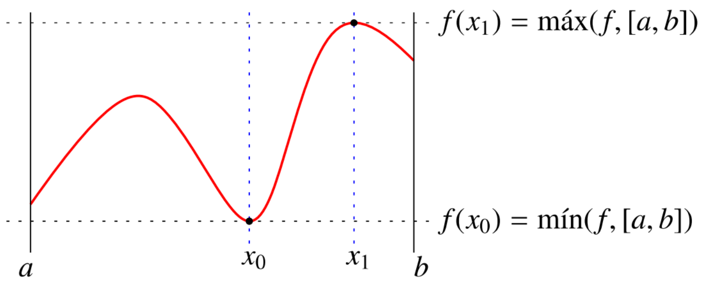
Observación 4.2.15. *La proposición anterior expresa que la imagen* $f([a, b]) = \{f(x) : x \in [a, b]\}$ *de un intervalo* $[a, b]$ *por una función continua* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *siempre es un conjunto acotado, lo que implica que dicho conjunto tiene ínfimo y supremo:*

$$\text{ínf}(f, [a, b]) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

$$\sup(f, [a, b]) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Ahora, se trata de demostrar que la función f *siempre alcanza ambos números* $\text{ínf}(f, [a, b])$ *y* $\sup(f, [a, b])$ *en el intervalo* $[a, b]$.

Teorema 4.2.16 (Weierstrass)**.** *Si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *es una función continua definida en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *(con* $a < b$*), entonces* f *tiene mínimo y máximo absolutos. Es decir: existen dos puntos* $x_0, x_1 \in [a, b]$ *tales que* $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *para todo* $x \in [a, b]$.



Demostración.

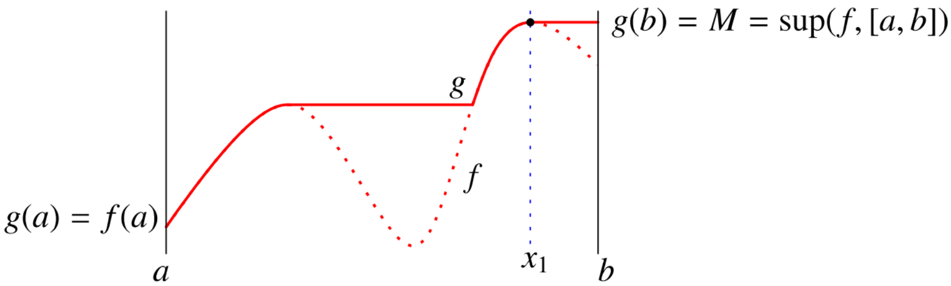
(Existencia de un máximo absoluto.) Como la función f está acotada en $[a, b]$ por la Proposición 4.2.14, se escribe $M := \sup(f, [a, b])$ y se define la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \sup(f, [a, x])$$

para todo $x \in [a, b]$. Por construcción es claro que:

(1) La función g es monótona creciente en el intervalo $[a, b]$.
En efecto, dados dos números $x, x' \in [a, b]$ tales que $x \leq x'$, tenemos que $[a, x] \subset [a, x']$, entonces $\sup(f, [a, x]) \leq \sup(f, [a, x'])$, es decir: $g(x) \leq g(x')$.

(2) $g(a) = \sup(f, [a, a]) = f(a)$ y $g(b) = \sup(f, [a, b]) = M$.



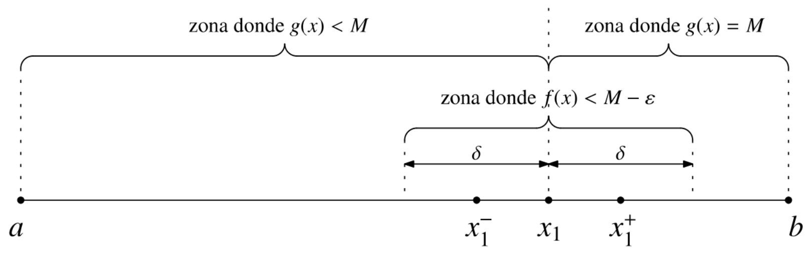
Ahora se considera el conjunto $S \subset [a, b]$ definido por $S := \{x \in [a, b] \colon g(x) = M\}$. Como $S \subseteq [a, b]$ está acotado y no es vacío (pues $b \in S$), tiene ínfimo $x_1 := \text{ínf}(S)$. Se observa que:

- Para todo $x \in [a, b]$ tal que $x \leq x_1$, tenemos que $x \notin S$, entonces $g(x) < M$.
- Para todo $x \in [a, b]$ tal que $x > x_1$, existe un elemento $x' \in S$ tal que $x_1 < x' < x$. Por la monotonía de g, se deduce que $g(x) \geq g(x') = M$ (pues $x' \in S$), entonces $g(x) = M$.
- Por lo tanto, el conjunto S es un intervalo de la forma $S = (x_1, b]$ o $S = [x_1, b]$.

Queremos demostrar que $f(x_1) = M$. Para ello, se supone (por el absurdo) que $f(x_1) < M$. Sea $\epsilon := \frac{M - f(x_1)}{2} > 0$. Como la función f es continua en el punto x_1, existe un radio $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_1)| < \epsilon$ para todo punto $x \in E(x_1, \delta) \cap [a, b]$. Entonces, para todo $x \in E(x_1, \delta) \cap [a, b]$, tenemos que $f(x) - f(x_1) < \epsilon$, es decir:

$$f(x) < f(x_1) + \epsilon = \frac{f(x_1) + M}{2} = M + \epsilon$$

pues $\epsilon = \frac{M - f(x_1)}{2}$. Ahora se definen los números $x_1^- := \text{máx}\left\{a, x_1 - \frac{\delta}{2}\right\}$ y $x_1^+ := \text{mín}\left\{x_1 + \frac{\delta}{2}, b\right\}$.



Por construcción, tenemos que $[x_1^-, x_1^+] \subset E(x_1, \delta) \cap [a, b]$, entonces $f(x) < M - \epsilon$ para todo $x \in [x_1^-, x_1^+]$, lo que implica que $\sup(f, [x_1^-, x_1^+]) \leq M - \epsilon$. Por lo tanto, tenemos que:

$$\begin{aligned} g(x_1^+) = \sup(f, [a, x_1^+]) &= \sup(f, [a, x_1^-] \cup [x_1^-, x_1^+]) \\ &= \max\left\{\sup(f, [a, x_1^-]), \sup(f, [x_1^-, x_1^+])\right\} \\ &= \max\left\{g(x_1^-), \sup(f, [x_1^-, x_1^+])\right\} \\ &\leq \max\left\{g(x_1^-), M - \epsilon\right\} \end{aligned}$$

Se distinguen los siguientes tres casos:

- Caso donde $a = x_1 < b$. En este caso, tenemos que $a = x_1^- = x_1 < x_1^+ \leq b$, de tal modo que $g(x_1^+) = \sup(f, [a, x_1^+]) = \sup(f, [x_1^-, x_1^+]) \leq M - \epsilon$. Por otro lado, tenemos que $x_1^+ > x_1$, entonces $x_1 \in S$ y $g(x_1^+) = M$, lo que es absurdo.
- Caso donde $a < x_1 = b$. En este caso, tenemos que $a \leq x_1^- < x_1 = x_1^+ = b$, entonces $x_1^- \notin S$ y $g(x_1^-) < M$, de tal modo que $g(x_1^+) \leq \max\left\{g(x_1^-), M - \epsilon\right\} < M$. Por otro lado, tenemos que $x_1^+ = b$, entonces $g(x_1^+) = g(b) = M$, lo que es absurdo
- Caso donde $a < x_1 < b$. En este caso, tenemos que $a \leq x_1^- < x_1 < x_1^+ = b$, entonces $x_1^- \notin S$ y $g(x_1^-) < M$, de tal modo que $g(x_1^+) \leq \max\left\{g(x_1^-), M - \epsilon\right\} < M$. Por otro lado, tenemos que $x_1^+ > x_1$, entonces $x_1^+ \in S$ y $g(x_1^+) = M$, lo que es absurdo.

En todos los casos, llegamos a una contradicción, lo que demuestra que la hipótesis $f(x_1) < M$ es absurda. Por lo tanto, tenemos que $f(x_1) = M$.

(Existencia de un mínimo absoluto.) Se observa que la función $-f$ también es continua en el intervalo $[a, b]$. Por lo anterior, $-f$ tiene un máximo absoluto $(x_0, -f(x_0))$, lo que implica inmediatamente que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un mínimo absoluto de la función f. □

Una consecuencia obvia del teorema de Weirstrass (combinado con el Corolario 4.2.10) es que la imagen de un intervalo cerrado por una función continua es un intervalo cerrado:

Corolario 4.2.17. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$), entonces la imagen del intervalo $[a, b]$ por f también es un intervalo cerrado:*

$$f([a, b]) = [m, M]$$

donde $m := \min(f, [a, b])$ y $M := \max(f, [a, b])$.

4.2.5. Funciones inversas

Se recuerda que una función $f : A \to \mathbb{R}$ definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es:

- *estrictamente creciente* cuando $\forall x, x' \in A, \quad x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$
- *estrictamente decreciente* cuando $\forall x, x' \in A, \quad x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

Es claro que toda función estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) es monótona creciente (resp. monótona creciente), pero el recíproco es falso.

Se demuestra el siguiente resultado:

Proposición 4.2.18 (Función inversa de una función estrictamente decreciente o decreciente). *Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función definida en un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$. Si f es estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en A, entonces f es inyectiva y define una biyección entre A y su imagen $B := f(A)$. Además, la función inversa $f^{-1} : B \to A$ definida por*

$$f^{-1}(y) = \textit{ el único } x \in A \textit{ tal que } f(x) = y$$

es una función estrictamente creciente (resp. estrictamente decreciente) en B.

Demostración. Se considera sólo el caso donde f es estrictamente creciente; el caso donde f es estrictamente decreciente es análogo. Se observa que:

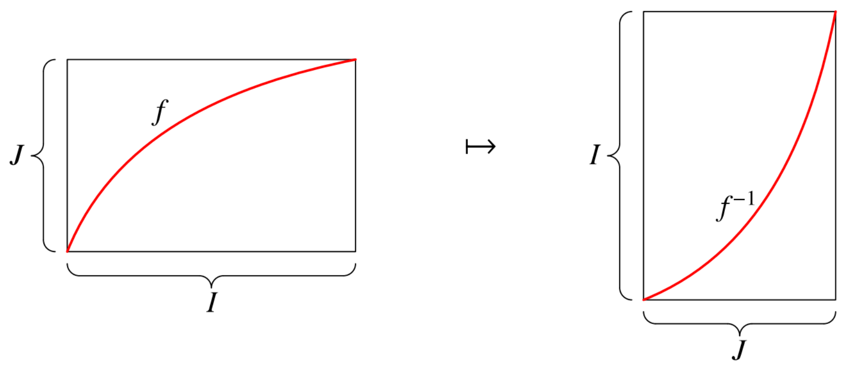
- *f es inyectiva.* En efecto, dados $x, x' \in A$ tales que $x \neq x'$:
  - o bien tenemos que $x < x'$, entonces $f(x) < f(x')$, y luego $f(x) \neq f(x')$
  - o bien tenemos que $x > x'$, entonces $f(x) > f(x')$, y luego $f(x) \neq f(x')$

  En todos los casos, $x \neq x'$ implica que $f(x) \neq f(x')$.
- *f define una biyección entre A y su imágen $B := f(A)$.* En efecto, cada elemento $y \in f(A)$ tiene al menos una preimagen por la función f (por definición de la imagen $f(A)$), y como f es inyectiva, dicha preimagen es única.
- *La función inversa $f^{-1} : B \to A$ es estrictamente creciente.* Sean $y, y' \in B$ tales que $y < y'$. Se escriben $x := f^{-1}(y)$ y $x' := f^{-1}(y')$; por construcción, tenemos que $y = f(x)$ e $y' = f(x')$. Si tuviéramos que $x \leq x'$, tendríamos que $f(x) \geq f(x')$ (pues f es monótona creciente), es decir: $y \geq y'$, lo que es absurdo. Luego, $x < x'$. □

En el caso particular donde la función considerada es una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, sabemos por el Corolario 4.2.10, que su imagen $J :=$

$f(I)$ también es un intervalo. Cuando, además, la función f es estrictamente creciente o estrictamente decreciente en I, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.2.19 (Función inversa de una función continua estrictamente creciente o decreciente)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Si f es continua y estrictamente creciente (resp. continua y estrictamente decreciente) en I, entonces f define una biyección entre el intervalo I y su imagen $J := f(I)$. Además, la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es continua y estrictamente creciente (resp. continua y estrictamente decreciente) en I.*



Demostración. Sólo se considera el caso donde f es estrictamente creciente (el caso donde f es estrictamente decreciente es análogo). Recordemos que sólo se consideran funciones definidas en un intervalo cuyo interior no es vacío, lo que significa que $I^\circ \neq \emptyset$[10]. Por la proposición 4.2.18, ya sabemos que la función f define una biyección entre el intervalo I y su imagen $J := f(I)$, y que la función inversa $f^{-1} : J \to I$ es estrictamente creciente. Para demostrar que f^{-1} es continua, se considera un punto $y_0 \in I$, y se escribe $x_0 := f^{-1}(y_0)$. Dada una precisión $\epsilon > 0$, se trata de construir un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall y \in J, |y - y_0| < \delta \Rightarrow |f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon \qquad (*)$$

Para ello, se consideran los siguientes tres casos:

- Caso donde x_0 es un punto interior de I (es decir: $x_0 \in I^\circ$). En este caso, existen dos puntos $x_0^-, x_0^+ \in I$ tales que $x_0 - \epsilon < x_0^- < x_0 < x_0^+ < x_0 + \epsilon$. Se escriben $y_0 := f(x_0^-)$ e $y_0^+ := f(x_0^+)$. Como f es estrictamente creciente, tenemos que $y_0^- < y_0 < y_0^+$. Ahora, se considera el radio $\delta > 0$ definido por $\delta := \min\left\{y_0 - y_0^+, y_0^+ - y_0\right\} > 0$. Dado un punto $y \in I$ tal que $|y - y_0| < \delta$, se observa que

$$y < y_0 + \delta \leq y_0 + (y_0^+ - y_0) = y_0^+$$

[10]Como la función continua f es estrictamente creciente, se puede demostrar que el intervalo imagen $J := f(I)$ también cumple la condición $J^\circ \neq \emptyset$ (es decir: el interior del intervalo J no es vacío), De modo sorprendente, nunca se usará esta información en el razonamiento que sigue.

pues $\delta \leq y_0^+ - y_0$, e

$$y > y_0 - \delta \geq y_0 - (y_0 - y_0^-) = y_0^-$$

pues $\delta \leq y_0 - y_0^-$ de tal modo que $y_0^- < y < y_0^+$. Como f^{-1} es estrictamente creciente, se deduce que

$$x_0 - \epsilon < x_0^- = f^{-1}(y_0^-) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0^+) = x_0^+ < x_0 + \epsilon$$

lo que demuestra que $|f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$.

- Caso donde $x_0 = \text{mín}(I)$ (es decir: x_0 es el extremo inferior del intervalo I). En este caso, existe un punto $x_0^+ \in I$ tal que $x_0 < x_0^+ < x_0 + \epsilon$. Se escribe $y_0^+ := f(x_0^+)$ (tenemos que $y_0^+ = f(x_0^+) > f(x_0) = y_0$ pues f es estrictamente creciente), y se define el radio $\delta > 0$ por $\delta := y_0^+ - y_0 > 0$. Dado un punto $y \in I$ tal que $|y - y_0| < \delta$, se observa que

$$y < y_0 + \delta = y_0 + (y_0^+ - y_0) = y_0^+$$

y, como f^{-1} es creciente, se deduce que

$$x_0 \leq f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0^+) = x_0^+ < x_0 + \epsilon$$

lo que demuestra que $|f^{-1}(y) - x_0| < \epsilon$.

- Caso donde $x_0 = \text{máx}(I)$ (es decir: x_0 es el extremo superior del intervalo I). Este caso es simétrico al caso anterior (ejercicio: redactar la demostración correspondiente).

En todos los casos, logramos definir un radio $\delta > 0$ que cumple la condición $(*)$. Por lo tanto, la función inversa $f^{-} : J \to I$ es continua en el punto $y_0 \in J$. $\square$

Ejemplo 4.2.20 (Función raíz n-ésima). *(1) Dado un entero $n \geq 1$, se considera la función $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^n$. Se verifica fácilmente que:*

- *La función f es continua y estrictamente creciente en $[0, +\infty)$.*
- *$f(0) = 0$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, lo que implica que la imagen del intervalo $[0, +\infty)$ por la función f es el intervalo $[0, +\infty)$.*

Por el Teorema 4.2.19, la función f define una biyección entre $[0, +\infty)$ y $[0, +\infty)$, y la función inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0, +\infty)$. Dicha función inversa se llama la función raíz n-ésima, y se escribe $\sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$ para todo $x \in [0, +\infty)$. Por construcción, tenemos que

$$\sqrt[n]{x^n} = f^{-1}(f(x)) = x \qquad y \qquad (\sqrt[n]{x})^n = f(f^{-1}(x)) = x$$

para todo $x \geq 0$.

(2) En el caso donde el entero n es impar, se puede reemplazar el intervalo $[0, +\infty)$ por $\mathbb{R}$, pues la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^n$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. En este caso, la función f define una biyección entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$, lo que permite extender la definición de la raíz n-ésima $\sqrt[n]{x} := f^{-1}(x)$ a todos los números reales. Como anteriormente, la función raíz n-ésima (extendida a $\mathbb{R}$) es continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 49 (Propiedades de la raíz n-ésima). Sean enteros $n, m \geq 1$ y $p \in \mathbb{N}$.

(1) Demostrar las siguientes igualdades para todos $x, y \geq 0$:

(a) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$

(b) $\sqrt[n]{x^p} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^p$

(c) $\sqrt[n]{x^n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

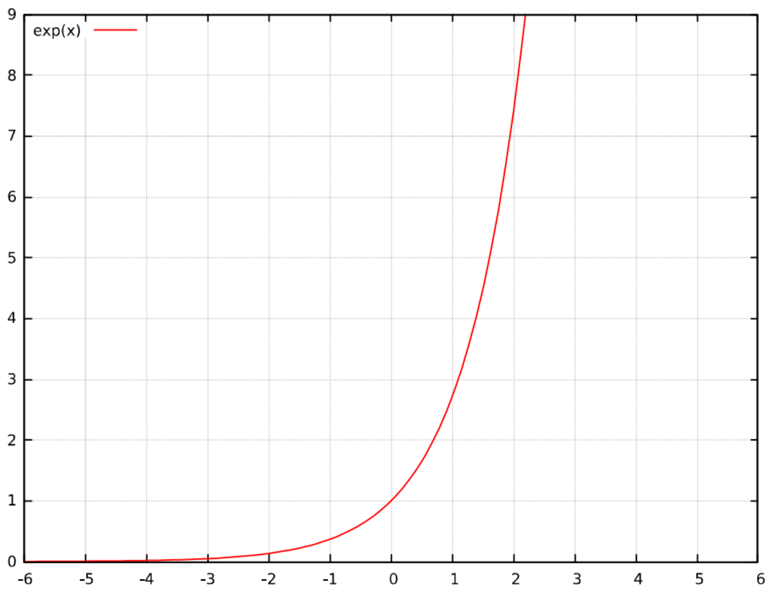
(d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

(2) Verificar que cuando los enteros $n, m \geq 1$ son impares, las igualdades anteriores se cumplen para todos los números $y, y \in \mathbb{R}$

Ejemplo 4.2.21. *Vimos que la función* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *es estrictamente creciente y continua en* $\mathbb{R}^+$ *(Ejercicio 36). Además, vimos en el Ejemplo 4.1.54 y en el Ejercicio 43 que*

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty \quad y \quad \lim_{x \to +\infty} \log(x) = +\infty$$

lo que implica que la imagen de $\mathbb{R}^+$ *por la función logaritmo es el intervalo* $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$. *Por lo tanto, la función logaritmo define una biyección entre* $\mathbb{R}^+$ *y* $\mathbb{R}$*, cuya función inversa se llama la función exponencial y se escribe exp. Por el Teorema 4.2.19, la función exp:* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *es continua y estrictamente creciente en* $\mathbb{R}$.



Ejercicio 50 (Propiedades de la función exponencial).

(1) Usando la definición de la función exponencial ($\exp(x) = \log^{-1}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$) y la propiedad fundamental del logaritmo ($\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ para todos $x, y > 0$), demostrar las siguientes igualdades para todos $x, y \in \mathbb{R}$;

(a) $\exp(0) = 1$
(b) $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$
(c) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(2) Se define la constante e por $e := \exp(1) \approx 2,718$. Demostrar por inducción completa que $\exp(n) = e^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando la relación $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, demostrar más generalmente que $\exp(n) = e^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Observación 4.2.22. *Por analogía con la igualdad* $\exp(n) = e^n$*, se escribre más generalmente* $e^x := \exp(x)$ *para todo número* $x \in \mathbb{R}$*. Con esta notación, las igualdades del Ejercicio 50 se escriben*

(a) $e^0 = 1$

(b) $e^{x+y} = e^x e^y$

(c) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$*.*

Ejercicio 51 (Potencia generalizada). Las funciones logaritmo y exponencial permiten definir la notación x^y para todos los números $x > 0$ r $y \in \mathbb{R}$, escribiendo

$$x^y := e^{y\log(x)} = \exp(y\log(x))$$

(1) Demostrar que para todos $x > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, el número x^n definido por $x^n := e^{n\log(x)}$ es igual a la potencia x^n definida del modo usual. (Sugerencia: demostrar por inducción completa que la propiedad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$, y extender la propiedad a todo $n \in \mathbb{Z}$ usando la relación $e^{-y} = \frac{1}{e^y}$.)

(2) Demostrar las siguientes igualdades para todos $x, x' > 0$ e $y, y' \in \mathbb{R}$:

(a) $x^0 = 1^y = 1$
(b) $x^1 = x$
(c) $x^{-1} = \frac{1}{x}$
(d) $x^{y+y'} = x^y x^{y'}$
(e) $x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y$
(f) $(x^y)^{y'} = (x^{y'})^y = x^{yy'}$
(g) $(xx')^y = x^y(x')^y$

(3) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ fijado, se considera la función $f; \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^\alpha = e^{\alpha\log(x)}$ para todo $x > 0$. Verificar que la función f es continua, y demostrar que:

- f es estrictamente creciente cuando $\alpha > 0$
- f es constante cuando $\alpha = 0$
- f es estrictamente decreciente cuando $\alpha < 0$

4.2.6. Función continua definida por una integral

Recordemos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es *localmente integrable* cuando es integrable en cualquier intervalo cerrado $[a, b] \subset I$ (con $a < b$)[11]. En el capítulo sobre integrales, vimos que cada función monótona (creciente o decreciente) es localmente integrable en su intervalo de definición.

Lema 4.2.23. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función localmente integrable en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, entonces para todo punto $x_0 \in I$, la función f está acotada en un entorno del punto x_0.*

Demostración. Se distinguen los siguientes tres casos:

- Caso donde x_0 es un punto interior de I (es decir: $x_0 \in I^\circ$). En este caso, existe un radio $\delta > 0$ tal que $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$. Como la función f es integrable en el intervalo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, está acotada en dicho intervalo. Y como

$$E(x_0, \delta) \cap I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$$

  se deduce que la función f está acotada en el entorno de centro x_0 y de radio δ.

- Caso donde $x_0 = \min(I)$ (es decir: x_0 es el extremo inferior del intervalo I). En este caso, existe un radio $\delta > 0$ tal que $[x_0, x_0 + \delta] \subset I$. Como la función f es integrable en el intervalo $[x_0, x_0 + \delta]$, está acotada en dicho intervalo. Y como

$$E(x_0, \delta) \cap I = [x_0, x_0 + \delta) \subset [x_0, x_0 + \delta]$$

  se deduce que la función f está acotada en el entorno de centro x_0 y de radio δ.

- Caso donde $x_0 = \max(I)$ (es decir: x_0 es el extremo superior del intervalo I). Este caso es análogo al caso anterior. $\square$

Proposición 4.2.24. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y localmente integrable en I. Para todo punto $a \in I$, la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

es continua en el intervalo I.

Demostración. Sea $x_0 \in I$. Por el lema anterior, sabemos que la función f está acotada en un entorno del punto x_0, lo que significa que existen un radio $\delta > 0$ y un número $M \geq 0$

[11] En el caso particular donde el intervalo I ya es de la forma $I = [a, b]$ (con $a < b$), la función f es localmente integrable en $I = [a, b]$ si y sólo si es integrable en $[a, b]$.

tales que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in E(x_0, \delta) \cap I$. Entonces, para todo $x \in E(x_0, \delta) \cap I$, tenemos que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &= \left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t)dt \right| \\ &\leq \int_{\text{mín}\{x_0,x\}}^{\text{máx}\{x_0,x\}} |f(t)|dt \\ &\leq \int_{\text{mín}\{x_0,x\}}^{\text{máx}\{x_0,x\}} M dt \\ &= M|x - x_0| \end{aligned}$$

Como $\lim\limits_{x \to x_0} M|x - x_0| = 0$, se deduce por el teorema del sándwich que $\lim_{x \to x_0} |F(x) - F(x_0)| = 0$, es decir: $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$. □

Observación 4.2.25. *Ya vimos un ejemplo de función definida a partir de una integral: la función logaritmo* $\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *que definimos a partir de la función* $f(t) = 1/t$ *por*

$$\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Así la Proposición 4.2.24 nos da una nueva prueba de la conrinuidad de la función log.

Ejercicio 52. Demostrar que si $f : I \to \mathbb{R}$ es positiva o nula (resp. negativa o nula) en el intervalo I, entonces la función $F : I \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$ es monótona creciente (resp. monótona decreciente).

Ejercicio 53. Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \frac{1}{1 + t^2}$$

(1) Demostrar que la función f es monótona creciente en $(-\infty, 0]$ y monótona decreciente en $[0, +\infty)$. Deducir que f es localmente integrable en $\mathbb{R}$.

Ahora, se considera la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt$$

(2) Demostrar que la función F es continua, impar, y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.

Observación: La función F es la función arcotangente.

4.3. Continuidad uniforme

4.3.1. Observaciones y definición

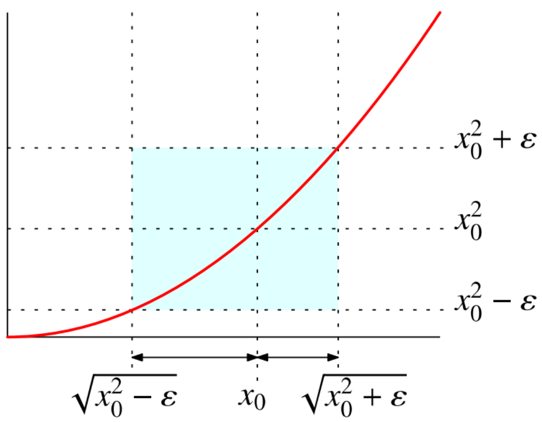
Observación 4.3.1. *Vimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es continua cuando para todo punto $x_0 \in I$ y para toda precisión $\epsilon > 0$, existe un radio $\delta > 0$ tal que*

$$\forall x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \qquad (*)$$

Fijando $\epsilon > 0$, el valor posible para el radio δ no es único: en efecto, si un radio δ cumple la condición anterior, entonces todo radio $\delta' < \delta$ también la cumple. Sin embargo, existe en general un máximo radio δ que no podemos superar si queremos mantener la condición $(*)$. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.3.2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Fijados un punto $x_0 > 0$ y una precisión $\delta > 0$ tal que $\epsilon < x_0^2$, queremos determinar el máximo radio $\delta > 0$ tal que la condición $(*)$ se cumple. Para todo $x \geq 0$, se observa que*

$$\begin{aligned} |x^2 - x_0^2| < \epsilon \ &\Leftrightarrow \ x_0^2 - \epsilon < x^2 < x_0^2 + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \ \sqrt{x_0^2 - \epsilon} < x < \sqrt{x_0^2 + \epsilon} \end{aligned}$$



Luego, el radio $\delta > 0$ debe cumplir las condiciones $\delta \leq x_0 - \sqrt{x_0^2 - \epsilon}$ y $\delta \leq \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - x_0$. Se puede demostrar que la segunda condición es más restrictiva. Por lo tanto, el máximo radio que cumple la condición $(*)$ es $\delta := \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - x_0$.

Observación 4.3.3. *El ejemplo anterior muestra que, en general, el radio $\delta > 0$ no sólo depende de la precisión $\epsilon > 0$ pero que también depende del punto x_0. Para muchas aplicaciones (en particular en el cálculo integral), es útil que el radio $\delta > 0$ sólo dependa de la precisión $\epsilon > 0$. (Vimos que no es el caso en el ejemplo anterior.) Para ello, se necesita introducir una condición más exigente que la continuidad: la continuidad uniforme.*

Definición 4.3.4 (Función uniformemente continua)**.** Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es *uniformemente continua* en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$ cuando:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, x' \in I, |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon$$

Por supuesto, la continuidad uniforme implica la continuidad:

Proposición 4.3.5. *Toda función uniformemente continua es continua.*

Demostracion. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\begin{array}{ll} & f \text{ es uniformemente continua en } I \\ \Leftrightarrow & \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I, \forall x' \in I, |x - x'| \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad (1) \\ \Rightarrow & \forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \exists \delta > 0, \forall x' \in I, |x - x'| \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad (2) \\ \Leftrightarrow & \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x' \in I, |x - x'| \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad (3) \\ \Leftrightarrow & f \text{ es continua en } I \end{array}$$

Observación 4.3.6. *En el razonamiento anterior, usamos las siguientes dos reglas lógicas, que rigen la conmutatividad de los cuantificadores:*

- *Para demostrar que* (1) $\Rightarrow$ (2)*, usamos la regla*

  $$\exists \delta > 0, \forall x \in I, \ldots \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I, \exists \delta > 0, \ldots$$

  que expresa que un enunciado de tipo "existe, para todo" siempre implica el enunciado de tipo "para todo, existe" obtenido intercambiando ambos cuantificadores.

  ¡Cuidado! Sólo se trata de una implicación, pues el recíproco no se cumple en general[12]*.*

- *Para demostrar que* (2) $\Leftrightarrow$ (3)*, usamos la regla*

  $$\forall \epsilon > 0, \forall x \in I, \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \ldots$$

  que expresa que siempre se pueden intercambiar dos cuantificadores consecutivos del mismo tipo (dos "$\forall$" o dos "$\exists$") sin cambiar el sentido del enunciado considerado. (La misma regla se cumple para el cuantificador existencial: "$\exists_1 \exists_2 \Leftrightarrow \exists_2 \exists_1$".)

Por otro lado, la condición de continuidad uniforme es más fuerte que la condición de continuidad, pues existen funciones continuas que no son uniformemente continuas:

Ejemplo 4.3.7 (Continuación del Ejemplo 4.3.2)**.** *Consideremos de nuevo la función $f(x) = x^2$. Es claro que f es continua en $\mathbb{R}$. Queremos demostrar que f no es uniformemente*

[12] En efecto, uando se dice "todos los uruguayos tienen una cédula" (enunciado de tipo $\forall\exists$), esto no implica que "existe una cédula compartida por todos los uruguayos" (enunciado del tipo $\exists\forall$).

continua en $\mathbb{R}$. Para ello, se razona por el absurdo, suponiendo que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Fijado $\epsilon > 0$, esto significa que existe un radio $\delta > 0$ que cumple la condición

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, |x - x'| < \delta \Rightarrow |x^2 - (x')^2| < \epsilon \qquad (**)$$

En particular, fijado $x > 0$, tenemos que

$$\forall x' \in \mathbb{R}, |x' - x| < \delta \Leftrightarrow |(x')^2 - x^2| < \epsilon \qquad (*)$$

Por otro lado, vimos en el Ejemplo 4.3.2[13] *que el máximo radio que cumple la condición $(*)$ es el número $\sqrt{x^2+\epsilon} - x$ (> 0). Por lo tanto, tenemos que*

$$\delta \leq \sqrt{x^2+\epsilon} - x$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Ahora, se observa que

$$\begin{aligned} \delta \leq \sqrt{x^2+\epsilon} - x &= \frac{(\sqrt{x^2+\epsilon} - x)(\sqrt{x^2+\epsilon} + x)}{\sqrt{x^2+\epsilon} + x} \\ &= \frac{(x^2+\epsilon) - x^2}{\sqrt{x^2+\epsilon} + x} = \frac{\epsilon}{\sqrt{x^2+\epsilon} + x} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando x tiende a $+\infty$, se deduce que $\delta \leq 0$, lo que es absurdo, pues $\delta > 0$. Por lo tanto, la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

4.3.2. Teorema de Heine-Cantor

En la sección anterior, introdujimos la noción de continuidad uniforme, y vimos que define una condición más exigente que la condición usual de continuidad. Sin embargo, existe un caso particular muy importante donde ambas nociones de continuidad coinciden, a saber: cuando el intervalo de definición es un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$). El objetivo de esta sección es demostrar el teorema de Heine-Cantor, que expresa que toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$) es uniformemente continua.

Para ello, se necesita demostrar el siguiente lema:

Lema 4.3.8 (Extracción de un cubrimiento finito)**.** *Dada una función positiva $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ (cualquiera) definida en un intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), existe una sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ tal que los entornos $E(x_1, h(x_1)), \ldots, E(x_n, h(x_n))$ de centros $x_1, \ldots, x_n$ y de radios respectivos $h(x_1), \ldots, h(x_n)$ cubren el intervalo $[a, b]$, es decir:*

$$[a, b] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup E(x_n, h(x_n))$$

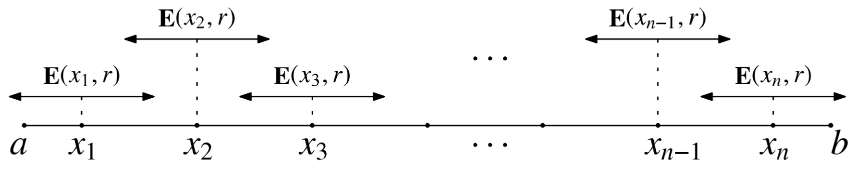
Observación 4.3.9. *El enunciado del lema se puede entender del modo siguiente. Fijado un radio $r > 0$, es claro que siempre se puede cubrir el intervalo $[a, b]$ por una sucesión*

[13] Aquí, las variables x y x' tiene el papel de las variables x_0 y x (respectivamente) en el Ejemplo 4.3.2.

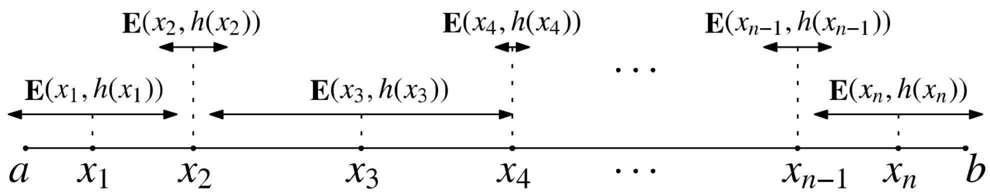
finita de entornos $E(x_1, r), \dots, E(x_n, r)$ del mismo radio r: basta con tomar un entero n suficientemente grande para que $2nr > b - a$, y definir los centros $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ por

$$x_i := \frac{(2i-1)(b-a)}{2n}$$

con $i = 1, \dots, n$, así como lo ilustra la siguiente figura:



Para demostrar el teorema de Heine-Cantor, se necesita considerar una situación mucho más general donde los entornos que cubren el intervalo $[a, b]$ tienen un radio variable forzado por una función positiva $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. (Intuitivamente, la función h asocia a cada punto de $[a, b]$ el "radio autorizado" alrededor de dicho punto.) El lema expresa que, cualquiera sea la función positiva $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ (no se requiere ninguna hipótesis de continuidad sobre h), siempre se puede hallar una sucesión finita de puntos $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tal que los correspondientes entornos $E(x_1, h(x_1)), \dots, E(x_n, h(x_n))$ cubran el intervalo $[a, b]$:



Demostración Dado un intervalo $[c, d] \subset [a, b]$, se llama *h-cubrimiento finito del intervalo* $[c, d]$ a toda sucesión finita $x_1, \dots, x_n \in [c, d]$ tal que

$$[c, d] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \dots \cup E(x_n, h(x_n))$$

Se considera el conjunto $A \subset [a, b]$ definido por

$$\begin{aligned} A &:= \{c \in [a, b] \colon \text{existe un } h - \text{cubrimiento finito del intervalo } [a, c]\} \\ &= \{c \in [a, b] \colon \exists n, \in \mathbb{N}, \exists x_1, \dots, x_n \in [a, b], [a, c] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \dots \cup E(x_n, h(x_n))\} \end{aligned}$$

Se trata de demostrar que $b \in A$. Para ello, se observa lo siguiente:

(1) El punto a es un elemento de A. En efecto, la sucesión definida por el única punto a es un h-cubrimiento finito del intervalo $[a, a]$, pues $[a, a] = \{a\} \subset E(a, h(a))$.

(2) Además, como $A \subset [a, b]$ está acotado, tiene supremo $s := \sup(A) \in [a, b]$

(3) Como $s = \sup(A)$, existe un punto $c \in A$ tal que $s - h(s) < c \leq s$. Y como $c \in A$, existe (por definición del conjunto A) un h-cubrimiento finito $x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, c]$, lo que significa que $[a, c] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup E(x_n, h(x_n))$

(4) Por otro lado, tenemos que $c \in E(s, h(s))$ (por construcción), entonces $[c, s] \subset E(s, h(s))$: la sucesión definida por el único punto s es un h-cubrimiento finito del intervalo $[c, s]$.

(5) Pegando los dos h-cubrimientos finitos definidos en (3) y (4), se deduce que

$$[a, s] \subset [a, c] \cup [c, s] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup E(x_n, h(x_n)) \cup E(s, h(s))$$

Por lo tanto, la sucesión finita $x_1, \ldots, x : n, s$ (con $n+1$ elementos) es un h-cubrimiento finito del intervalo $[a, s]$, lo que demuestra que $s \in A$.

(6) Ahora, se trata demostrar que $s = b$. Para ello, se supone (por absurdo) que $s < b$ y se considera el punto $s' := \text{mín}(s + \frac{h(s)}{2}, b)$. Por construcción, tenemos que $s' > s$ y $s' \in E(s, h(s))$. Entonces, tenemos que $[s, s'] \subset E(s, h(s))$, de tal modo que

$$[a, s] = [a, s] \cup [s, s'] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup E(x_n, h(x_n)) \cup E(s, h(s))$$

Entonces, la sucesión finita $x_1, \ldots, x_n, s$ (con $n + 1$ elementos) también es un h-cubrimiento finito del intervalo $[a, s']$, luego $s' \in A$. Pero esto es absurdo, pues $s' > s = \sup(A)$. Por lo tanto, la hipótesis $s < b$ era absurda, y tenemos que $s = b \in A$. □

Ahora se puede demostrar el teorema de Heine-Cantor:

Teorema 4.3.10 (Heine-Cantor). *Toda función continua definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ (con $a < b$) es uniformemente continua en dicho intervalo.*

Demostración. Fijada una precisión $\epsilon > 0$, se trata de construir un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \epsilon \qquad (*)$$

Como f es continua en $[a, b]$, se puede asociar a cada punto $x_0 \in [a, b]$ un radio δ_{x_0} tal que

$$\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta_{x_0} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon/2 \qquad (**)$$

Sea $h : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ la función definida por $h(x) := \delta_x/2$ para todo $x \in [a, b]$. Por el lema 4.3.8, existe una sucesión finita de puntos $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ tales que

$$[a, b] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup E(x_n, h(x_n))$$

lo que permite definir el número $\delta > 0$ por $\delta := \text{mín}\,\{h(x_1), \ldots, h(x_n))\}$. Ahora, se trata de demostrar que el radio δ cumple la condición $(*)$. Para ello, se consideran puntos $x, x' \in [a, b]$ tales que $|x - x'| < \delta$. Como $[a, b] \subset E(x_1, h(x_1)) \cup \cdots \cup E(x_n, h(x_n))$, existe un índice i tal que $x \in E(x_i, h(x_i))$. Por construcción, tenemos que $|x - x_i| < h(x_i) = \delta_{x_i}/2 < \delta_{x_i}$, de tal modo que $|f(x) - f(x_i)| < \epsilon/2$ por $(**)$. Por otro lado, tenemos que

$$|f(x') - f(x)| \leq |f(x') - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

lo que acaba de demostrar la condición $(*)$. □

Ejemplo 4.3.11 (Continuación del Ejemplo 4.3.2)**.** *Vimos en el Ejemplo 4.3.7 la función* $f(x) = x^2$ *no es uniformemente continua en* $\mathbb{R}$*. Sin embargo, el teorema de Heine-Cantor implica que la misma función es uniformemente continua en todo intervalo* $[a, b]$*. Así, dada una precisión* $\epsilon > 0$*, no existe ningún radio* $\delta > 0$ *que cumpla la condición*

$$\forall x, x' \in \mathbb{R}, |x - x'| < \delta \Rightarrow |x^2 - (x')^2| < \epsilon$$

(donde las variables x *y* x' *recorren todo* $\mathbb{R}$*), pero cuando uno se restringe a un intervalo cerrado* $[a, b]$*, siempre puede hallar un radio* $\delta_{a,b} > 0$ *tal que*

$$\forall x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta_{a,b} \Rightarrow |x^2 - (x')^2| < \epsilon$$

(donde las variables x *y* x' *sólo recorren el intervalo* $[a, b]$*).*

4.3.3. Más funciones integrables

Una consecuencia muy importante del teorema de Heine-Cantor es la siguiente:

Proposición 4.3.12. *Toda función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *(con* $a < b$*) es integrable en* $[a, b]$*.*

Demostración. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua (con $a < b$). Por la Proposición 4.2.14, sabemos que f está acotada en el intervalo $[a, b]$, lo que permite definir sus sumas inferiores y superiores. Para demostrar que f es integrable en $[a, b]$, se usa el criterio de integrabilidad a menos de ϵ. Fijada una precisión $\epsilon > 0$, se elige un número $\eta > 0$ tal que $\eta < \epsilon/(b - a)$[14]. Como la función f es continua en $[a, b]$, es uniformemente continua en $[a, b]$ (por el Teorema 4.3.10), y existe un radio $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, x' \in [a, b], |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \eta \qquad (*)$$

Ahora se elige una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots a_n\} \subset [a, b]$ tal que $\|P\| < \delta$. Dado un subintervalo $[a_i, a_{i+1}]$ $(i = 0, \ldots, n - 1)$, se observa que para todos $x, x' \in [a_i, a_{i+1}]$, tenemos que $|x - x'| < \delta$ (pues $a_{i+1} - a_i \leq \|P\| < \delta$), luego $|f(x) - f(x')| < \eta$ por $(*)$. Por lo tanto, tenemos que

$$f(x) - f(x') \leq \eta$$

para todos $x, x' \in [a_i, a_{i+1}]$. Pasando al supremo (para $x \in [a_i, a_{i+1}]$) y al ínfimo (para $x' in[a, b]$) en la desigualdad anterior, se deduce (ejercicio) que

$$\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}]) \leq \eta$$

[14]Por ejemplo, se puede tomar $\eta \coloneqq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$.

para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
S^*(f,P) - S_*(f,P) &= \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot (\sup(f, [a_i, a_{i+1}]) - \text{ínf}(f, [a_i, a_{i+1}])) \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \eta \\
&= \eta \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \\
&= \eta(b-a) \\
&< \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Así demostramos que para toda precisión $\epsilon > 0$, existe una partición P del intervalo $[a,b]$ tal que $S^*(f,P) - S^*(f,P) < \epsilon$. Por el criterio de integración a menos de ϵ, se deduce que la función f es integrable en el intervalo $[a,b]$. □

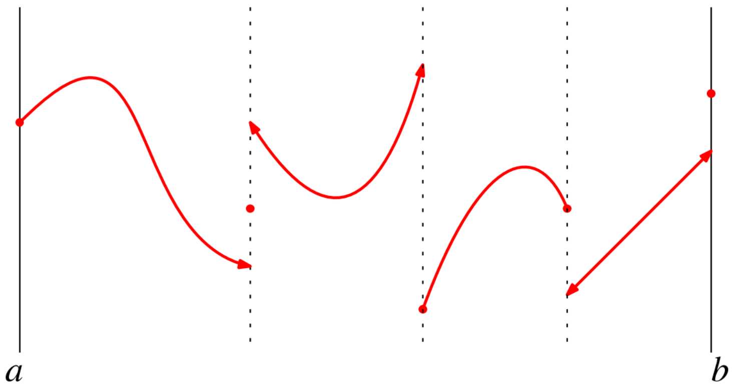
Se sigue inmediatamente de la proposición anterior que:

Corolario 4.3.13. *Toda función continua en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es localmente integrable en I.*

Definición 4.3.14 (Función seccionalmente continua)**.** Se dice que una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo cerrado $[a,b]$ (con $a < b$) es *seccionalmente continua* cuando existe una partición $P = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\} \subset [a,b]$ tal que para todo $i = 0, \ldots, n-1$:

(1) la función f es continua en el intervalo abierto (a_i, a_{i+1})

(2) en el intervalo (a_i, a_{i+1}), la función f tiene límites finitos en el punto a_i (por la derecha) y en el punto a_{i+1} (por la izquierda).



Observación 4.3.15. *Cuando se verifica que una función* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *es seccionalmente continua, es importante no olvidar la condición* (2) *que asegura que dicha función tiene límites finitos por la izquierda y por la derecha en todos los puntos del intervalo* $[a,b]$*, incluso en los puntos donde* f *es discontinua. Por ejemplo, la función* $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x)=\begin{cases}0 & si\ x=0\\ \frac{1}{x} & si\ x>0\end{cases}$$

es continua en el intervalo abierto $(0,1)$*, pero no es seccionalmente continua en el intervalo cerrado* $[0,1]$*, pues no tiene límite finito en el punto* 0 *(por la derecha).*

Ejercicio 54. Sea un intervalo cerrado $[a,b]$, con $a<b$.

(1) Verificar que toda función escalonada en $[a,b]$ es seccionalmente continua en $[a,b]$.

(2) Demostrar que toda fucnión seccionalmente continua en $[a,b]$ está acotada en $[a,b]$.

Más generalmente, se demuestra que :

Proposición 4.3.16 (Integrabilidad de las funciones seccionalmente continuas)**.** *Toda función seccionalmente continua en un intervalo* $[a,b]$ *(con* $a<b$*) es integrable en* $[a,b]$.

Demostración. Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función seccionalmente continua en $[a,b]$. Por definición, existe una partición $P=\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}\subset[a,b]$ que cumple las condiciones (1) y (2) de la Definición 4.3.14. En cada subintervalo $[a_i,a_{i+1}]$ $(i=0,\ldots,n-1)$, se observa que la función $f_i:[a_i,a_{i+1}]\to\mathbb{R}$ definida por

$$f_i(x)=\begin{cases}f(x) & \text{si } a<x<b\\ \lim\limits_{x\to a^+} & \text{si } x=a\\ \lim\limits_{x\to b^-} & \text{si } x=b\end{cases}$$

es continua en el intervalo $[a_i,a_{i+1}]$ (por construcción), luego es integrable en dicho intervalo. Y como la función f coincide con f_i en el intervalo $[a_i,a_{i+1}]$, salvo (quizá) en los dos puntos a_i y a_{i+1}, se deduce que la función f es integrable en el intervalo $[a_i,a_{i+1}]$[15]. Por la propiedad de aditividad respecto al intervalo, se concluye que la función f es integrable en el intervalo $[a,b]=[a_0,a_1]\cup\cdots\cup[a_{n-1},a_n]$. $\square$

[15]Veáse el capítulo sobre las integrales, Proposición 82 insert ref

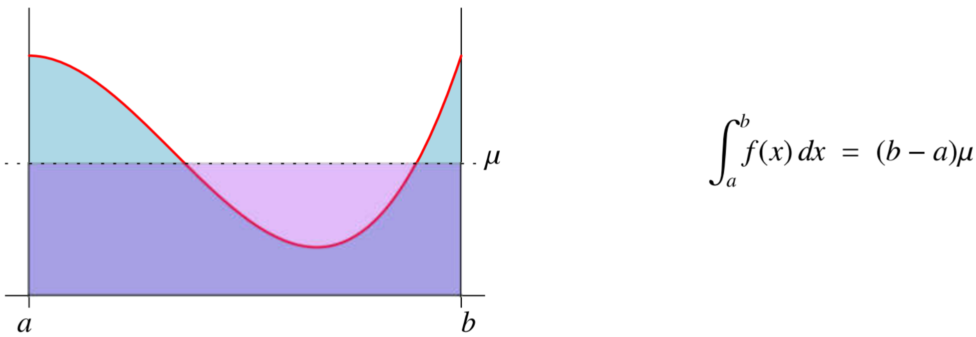
4.3.4. Aplicación: el teorema del valor medio

Definición 4.3.17 (Valor medio de una función integrable)**.** Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función integrable en un intervalo $[a, b]$ (con $a < b$). Se llama *valor medio de la función f en el intervalo* $[a, b]$ al número $\mu \in \mathbb{R}$ definido por:

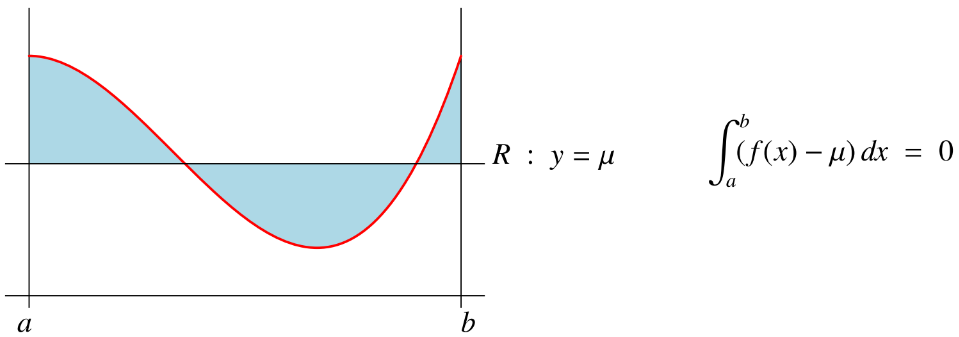
$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Observación 4.3.18. *Intuitivamente, el valor medio de la función f en el intervalo $[a, b]$ representa el "promedio continuo" de los valores tomados por la función f en el intervalo $[a, b]$. Gráficamente, se puede interpretar el valor medio μ de los siguientes modos:*

- *Como la altura (algebraica) del rectángulo de ancho $b - a$ que tiene la misma área algebraica que la región ubicada entre el eje x y la gráfica de la función f:*



- *Como la ordenada de la recta horizontal R que divide la gráfica de la función f de tal modo que la región por encima de la recta F y la región por debajo de R tengan la misma área:*



Ejemplo 4.3.19. *Dado que las anteriores dos figuras representan la gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$ en el intervalo $[-1, 2]$, calcular el correspondiente valor medio μ.*

Teorema 4.3.20 (Valor medio)**.** *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ (con $a < b$), entonces existe un punto $c \in [a, b]$ donde la función f alcanza su valor medio:*

$$f(c) = \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Demostración. Como la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, es integrable en $[a, b]$, lo que justifica la existencia de la integral $\int_a^b f(x)dx$ y del valor medio $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Por el teorema de Weierstrass (Teorema 4.2.16), existen $x_0.x_1 \in [a, b]$ tales que $f(x_0) = m$ y $f(x_1) = M$, donde m representa el mínimo y M el máximo de la función en el intervalo $[a, b]$. Por lo tanto, tenemos que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$, de tal modo que

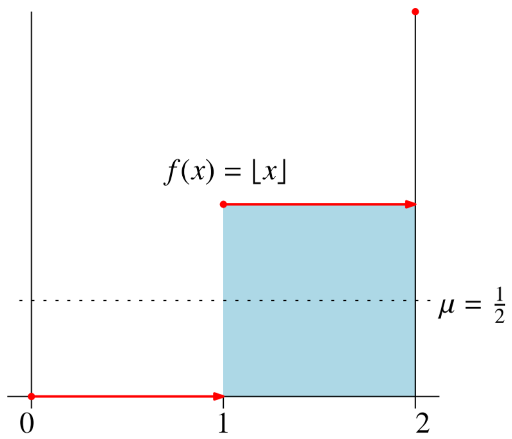
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Dividiendo las desigualdades anteriores por $b - a > 0$, se obtiene que

$$f(x_0) = m \leq \mu \leq M = f(x_1)$$

y, por el teorema de los valored intermedios (Corolario 4.2.9), se deduce que existe un punto c entre x_0 y x_1 tal que $f(c) = \mu$.

Observación 4.3.21. *¡Cuidado! El teorema del valor medio requiere que la función f sea continua en el intervalo $[a, b]$, y no se cumple (en general) cuando f sólo es seccionalmente continua. Un contraejemplo es dado por la función $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (parte entera de x) en el intervalo $[0, 2]$.*



La función f es seccionalmente continua en el intervalo $[0, 2]$ (es una función escalonada), y en dicho intervalo, tiene valor medio

$$\mu := \frac{1}{2} \int_0^2 \lfloor x \rfloor \, dx = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, no existe ningún punto $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = \lfloor c \rfloor = \frac{1}{2}$.

Capítulo 5

Derivadas

El concepto de *derivada* es central en este curso, y evoca inmediatamente la idea física de *velocidad*. Aparece constantemente en las ciencias naturales y sociales, asociado a la idea de variación o cambio. Sin embargo, la noción de derivada es relativamente reciente en términos históricos: es debida a Newton y Leibniz, quienes la formularon en el siglo XVII.

¿Por qué la derivada es tan tardía? Porque recoge ideas y técnicas que se elaboraron a lo largo de mucho tiempo y que tienen diversos orígenes. En el Renacimiento, los europeos se familiarizaron nuevamente con la matemática de los antiguos griegos –que fueron, ante todo, grandes geómetras–, y aprendieron el álgebra que se había desarrollado en el mundo islámico mientras Europa estaba en el medioevo. Estas dos ramas de la matemática –el álgebra y la geometría– confluyeron en la década de 1630 en la *geometría analítica*, inventada independientemente por Pierre de Fermat y René Descartes, que permitió expresar objetos geométricos (tales como curvas, superficies, regiones, trayectorias) mediante ecuaciones algebraicas. Esto abrió la posibilidad de explorar problemas geométricos mediante cálculo simbólico.

La derivada fue usada por diversos matemáticos para resolver problemas geométricos antes de ser bien comprendida, y antes de ser definida como la conocemos hoy. Esto es común al desarrollo de muchos conceptos matemáticos. Fermat, tratando de encontrar máximos y mínimos de funciones, observó que éstos se dan en puntos en los cuales la tangente a la gráfica es horizontal. Las ideas de Fermat fueron retomadas por varios matemáticos[1] que querían, más generalmente, encontrar la recta tangente a una curva en un punto cualquiera. Isaac Barrow, maestro de Newton, se dio cuenta de que las tangentes a una curva estaban relacionadas con el área encerrada por ésta. Este intenso trabajo generó un conjunto de métodos analíticos que permitían resolver diversos problemas geométricos.

Newton y Leibniz, en forma independiente, comprendieron que todos estos métodos tenían una idea subyacente común, y así descubrieron la *derivada*. Además, formularon

[1] Entre ellos Johann Hudde, René Descartes, John Wallis, Isaac Barrow, René Sluse y Christian Huygens.

una nueva teoría que englobaba mucha matemática existente bajo dos conceptos centrales: el de *derivada* y el de *integral*. Como ya había intuido Barrow, estos conceptos, lejos de ser independientes, son en cierto modo "duales", como dos caras de una misma moneda. Expresaron esta idea en lo que hoy conocemos como el *Teorema Fundamental del Cálculo*, que demostraron con argumentos rigurosos. Es por todo esto que consideramos a Newton y a Leibniz los creadores del Cálculo Diferencial e Integral.

Así, por increíble que parezca y en contra de lo que indica el sentido común, la noción de derivada no fue principalmente motivada por la mecánica clásica. Hasta el siglo XVII la *velocidad* había sido ampliamente estudiada por numerosos y destacados físicos desde tiempos de Aristóteles, y notoriamente por Galileo Galilei. Sin embargo, fue Newton[2] quien unificó las leyes de la mecánica clásica y expresó esta última en términos del cálculo, haciendo del cálculo diferencial e integral y la mecánica clásica dos disciplinas inseparables. Nuestra comprensión del cálculo está sin duda muy influida por esta síntesis.

Dedicaremos esta segunda mitad del curso a entender la derivada, y su íntima y fascinante relación con la integral.

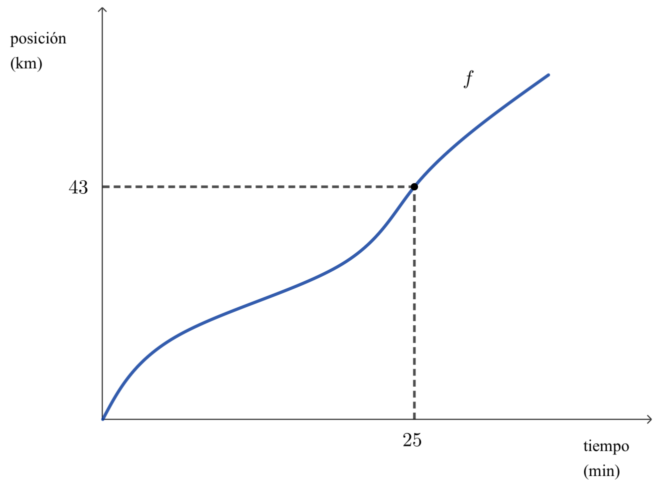
5.1. Definición de la derivada

5.1.1. Velocidad

Pensemos en un *movimiento unidimensional*. Un movimiento unidimensional es un movimiento que podemos pensar, a los efectos de modelarlo matemáticamente, que ocurre en una dimensión.

Un ejemplo es el de un automóvil que circula a lo largo de una carretera recta. Si designamos el tiempo con la variable t, la posición en la carretera es una función de t, que llamaremos $f(t)$. La siguiente gráfica mide el tiempo en minutos y la posición en kilómetros, y nos dice que, por ejemplo, el auto está en el kilómetro 43 a los 25 minutos de haber partido.

[2] En su obra *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Principios Matemáticos de la Filosofía Natural), publicada en 1687.



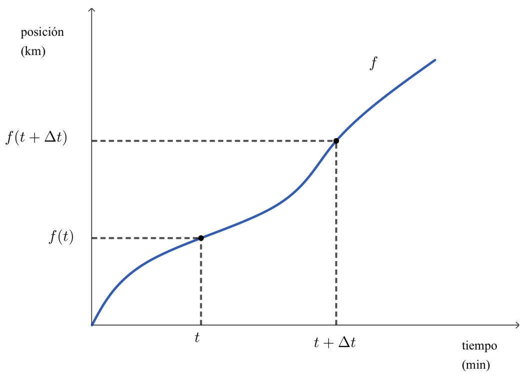
¿Es importante que la carretera sea recta? No, para nada. Si la carretera no es recta, miramos la misma gráfica y constatamos que ésta describe perfectamente el movimiento. Los kilómetros se miden a lo largo de la carretera, y decir que a los 25 minutos de haber salido el auto está en el kilómetro 43 tiene perfecto sentido.

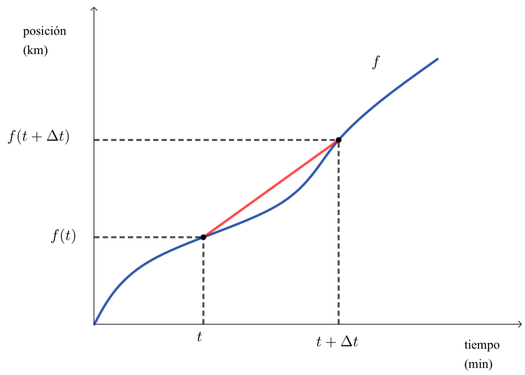
Así, un movimiento unidimensional puede ser, por ejemplo, el de un auto en una carretera, el de una corredora en la rambla de Montevideo, el de un carrito en su riel de la montaña rusa, o el de una manzana que cae verticalmente desde la rama de un árbol. Todos ellos pueden ser modelados por la función $f(t)$.

Volvamos al auto de la gráfica. ¿Cuál es su velocidad media entre los momentos t y $t + \Delta t$? Para calcularla, tenemos que dividir la distancia recorrida $(f(t + \Delta t) - f(t))$ entre el tiempo transcurrido (Δt), es decir,

$$v_m = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \ km/min.$$

Observemos en la figura que la velocidad media es la pendiente del segmento rojo.





Para calcular la velocidad instantánea en t, tenemos que calcular la velocidad media en lapsos $[t, t+\Delta t]$ cada vez más cortos. En realidad, la velocidad instantánea en el momento t es un límite:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \; km/min. \tag{5.1.1}$$

5.1.2. Pendiente de la recta tangente

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función, cuya gráfica se muestra en la figura. Consideremos el siguiente problema geométrico: dado un punto $x_0 \in [a, b]$, ¿cuál es la recta tangente al correspondiente punto de la gráfica $(x_0, f(x_0))$?

Para determinar una recta en el plano, alcanza con saber su pendiente y un punto por el que pasa. En nuestro caso, ya tenemos el punto, $(x_0, f(x_0))$, y vamos a determinar la pendiente.

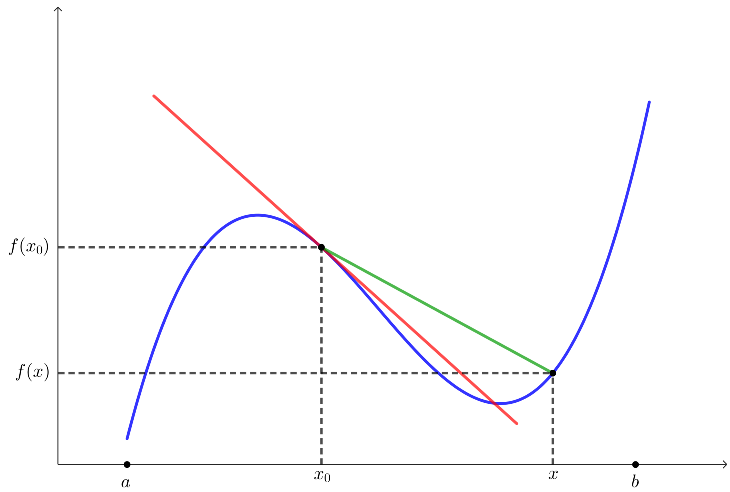
Si tomamos un punto $x \in [a, b]$ cercano a x_0, el segmento que une $(x, f(x))$ y $(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente[3]

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

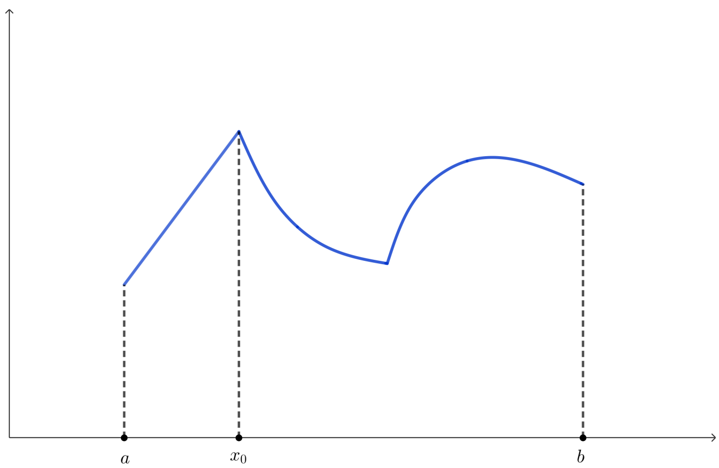
Para hallar la pendiente de la recta tangente, tenemos que hacer que x esté cada vez más cerca de x_0. Es decir, la pendiente de la tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$ es el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{5.1.2}$$

[3] Recordemos que si en una recta tenemos dos puntos $p_0 = (x_0, y_0)$ y $p_1 = (x_1, y_1)$, la pendiente de la misma es $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$.



Este límite podría no existir, como no existe en el caso de la siguiente figura. Pero, *si el límite existe*, es la pendiente de la recta tangente.



Para esta función, no existe la recta tangente a la gráfica en $(x_0, f(x_0))$

Haremos un cambio de variable para expresar el límite (5.1.2) de un modo ligeramente distinto. Escribimos

$$x = x_0 + h,$$

es decir, llamamos h a la diferencia $x - x_0$. Entonces, decir que $x \to x_0$ equivale a decir que $h \to 0$. El límite (5.1.2) queda así:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5.1.3}$$

5.1.3. Límite del cociente incremental

Observemos los límites dados por las ecuaciones (5.1.1) y (5.1.3). Las variables que aparecen en ellos tienen nombres distintos, pero por lo demás, *son iguales*.

En general, si tenemos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ y una función $f : I \to \mathbb{R}$, decimos que el *cociente incremental* de f en un punto $x \in I$ es

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}. \tag{5.1.4}$$

Definición 5.1.5. La derivada de f en el punto x es el límite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Cuando este límite existe y es finito, decimos que f *es derivable en* x. En caso contrario[4], decimos que f no es derivable en x.

Decimos que una función f es *derivable* si es derivable en todos los puntos de su dominio.

Veremos más adelante resultados que nos van a permitir calcular fácilmente las derivadas de "funciones dadas por fórmulas". Por "funciones dadas por fórmulas"nos referimos a funciones que se pueden obtener haciendo sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. Sin embargo, siempre hay que recordar que *la derivada es, por definición, el límite del cociente incremental.* Esta definición es aplicable a una clase más grande de funciones, y será usada constantemente en lo que resta del curso.

Como ya dijimos, la derivada de f en un punto x_0 es la pendiente de la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$. ¿Cómo hallamos la ecuación de esta recta?

Una recta en el plano (a menos que sea vertical) tiene ecuación

$$y = mx + n,$$

donde m es la pendiente. Entonces, la tangente a la gráfica de f en $(x_0, f(x_0))$ será una recta de ecuación

$$y = f'(x_0)x + n,$$

para algún $n \in \mathbb{R}$ que tenemos que determinar. Como esta recta pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$, debe cumplirse que

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + n,$$

[4] Es decir, si el límite es infinito o no existe.

por lo que despejando n obtenemos

$$n = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Resumimos estos cálculos en el siguiente recuadro:

Si f es derivable en x_0, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es la recta de ecuación

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

5.1.4. Continuidad de las funciones derivables

Terminaremos esta sección con una propiedad importantísima de las funciones derivables: son continuas. Más concretamente, tenemos la siguiente proposición:

Proposición 5.1.6. *Sean I un intervalo de $\mathbb{R}$, x un punto interior a I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Entonces, si f es derivable en x, es continua en x.*

Demostración: Para probar que f es continua en x, tenemos que ver que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x),$$

o equivalentemente que

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = 0.$$

Observemos que como f es derivable en x, existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y por lo tanto la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es acotada para h en un entorno reducido de 0.

Entonces

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{acotado}} \underbrace{h}_{\text{tiende a } 0} = 0. \; \square$$

Observación 5.1.7. *Podría ocurrir que exista*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Diremos que es la derivada en x por la derecha. Con el mismo argumento que demuestra la Proposición 5.1.6, si existe la derivada por la derecha de f en x entonces f es continua a derecha en x. Del mismo modo se define derivada por la izquierda.

Cuando el dominio de f es un intervalo cerrado $[a, b]$, podemos hablar de la derivada en a por la derecha y de la derivada en b por la izquierda.

5.2. Cálculo de derivadas

5.2.1. Primeros ejemplos

Calculemos, a partir de la definición, la derivada de algunas funciones sencillas.

Ejemplo 5.2.1. *Derivada de la función constante*

Tomemos $c \in \mathbb{R}$ y la función constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = c$. Calcularemos la derivada en un punto x.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 0 \ = \ 0 \end{aligned}$$

Es decir, $f'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 5.2.2. *Derivada de la función identidad*

Tomemos la función identidad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es decir, la función dada por $f(x) = x$.

Su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.3. *Derivada de la función cuadrática*

Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$.

Su derivada es

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.4. *Derivada de la función potencia*

Tomemos $n \in \mathbb{N}$ mayor o igual que 1, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$. Calcularemos su derivada en un punto x.

Para esto, recordemos antes la fórmula del binomio de Newton, que dice que para dos números reales a y b

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} c_k^n a^k b^{n-k},$$

donde c_k^n es el número combinatorio $c_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Entonces

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} c_k^n x^k h^{n-k} - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k h^{n-k}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k \frac{h^{n-k}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k h^{n-k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^n x^k \lim_{h \to 0} h^{n-k-1} \\ &= c_{n-1}^n x^{n-1} \;=\; n x^{n-1}. \end{aligned}$$

Es decir, $f'(x) = nx^{n-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto coincide con lo que nos dio el cálculo para $n = 1$ y $n = 2$[5].

Ejemplo 5.2.5. *Derivada de la función logaritmo en 1*

Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log(x)$. Calcularemos $f'(1)$, es decir,

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{log(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+h} \frac{1}{t}\, dt.$$

[5]En realidad, cuando $x = 0$ y $n = 1$ la fórmula anterior no es válida, porque no podemos hacer 0^0. Sin embargo, ya vimos directamente que la derivada de $f(x) = x$ en $x = 0$ da 1.

Consideremos primero el caso en que $h > 0$. Tomando la partición $P = \{1, 1+h\}$, tenemos que las sumas inferior y superior para la integral $\int_1^{1+h} \frac{1}{t}\, dt$ son, respectivamente, $S_*(f,P) = \frac{h}{1+h}$ y $S^*(f,P) = h$, por lo que

$$\frac{1}{1+h} \leq \frac{\log(1+h)}{h} \leq 1.$$

Por el teorema del sandwich, $\lim_{h\to 0^+} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$. Haciendo un razonamiento análogo para $h < 0$ se llega a que $\lim_{h\to 0^-} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$, por lo que

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1.$$

Ejercicio 55. 1. Probar que para todo $x > 0$ y $h \in (-x, +\infty)$[6] el cociente incremental $\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}$ está acotado entre $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x+h}$.

2. Probar que para todo $x > 0$ la función logaritmo es derivable en x y $log'(x) = \frac{1}{x}$.

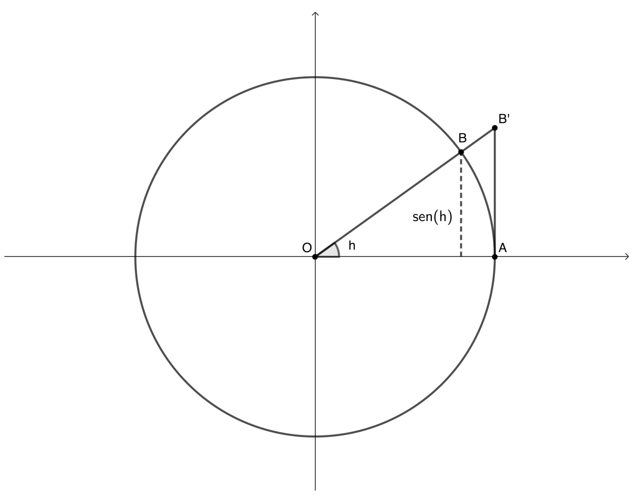
Ejemplo 5.2.6. *Derivada de la función seno en 0*

Ahora calcularemos la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ en $x = 0$. Es decir, el límite

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}.$$

Para eso, observemos la siguiente figura, en la que se representa en el círculo trigonométrico a un ángulo $h > 0$. El punto A es $A = (1, 0)$, el punto B es $B = (\cos(h), \operatorname{sen}(h))$, el punto B' es $B' = (1, \tan(h))$ y el punto O es $O = (0, 0)$. Si llamamos F_1 al triángulo AOB, F_2 al sector angular determinado por los puntos A, O y B y F_3 al triángulo AOB', es claro que

$$área(F_1) \leq área(F_2) \leq área(F_3). \tag{5.2.7}$$



[6]Es decir, h es tal que $x + h > 0$.

El ángulo h, que hemos tomado positivo, está medido en radianes, y un radián es una proporción $\frac{1}{2\pi}$ del ángulo completo. Por lo tanto, el ángulo h es una proporción $\frac{h}{2\pi}$ del ángulo completo y el área de F_2 es

$$área(F_2) = \frac{h}{2\pi} \cdot \pi,$$

pues π es el área del círculo. Por otro lado, $área(F_1) = \operatorname{sen}(h)/2$ y $área(F_3) = \tan(h)/2$. Por lo tanto, la ecuación (5.2.7) dice que

$$\frac{\operatorname{sen}(h)}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)}.$$

Multiplicando por $\frac{2}{\operatorname{sen}(h)}$ esto queda

$$1 \leq \frac{h}{\operatorname{sen}(h)} \leq \frac{1}{\cos(h)}.$$

Tomando los inversos,

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \geq \cos(h),$$

y como $\lim_{h\to 0} cos(h) = 1$, el teorema del sandwich nos dice que $\lim_{h\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. Usando que la función que a cada x asigna el cociente $\operatorname{sen}(x)/x$ es par, concluimos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.$$

Ejercicio 56.

1. Verificar que la función coseno es derivable en 0 y calcular su derivada $\cos'(0)$.

2. Usando las igualdades trigonométricas

$$\begin{array}{rcl} \cos(x+y) & = & \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) \\ \operatorname{sen}(x+y) & = & \cos(x)\operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x)\cos(y) \end{array}$$

probar que cos y sen son derivables en $\mathbb{R}$, y que $\operatorname{sen}'(x) = \cos(x)$ y $\cos'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.

Un comentario "circular"

En el cálculo anterior se dijo que un radián es una proporción de $\frac{1}{2\pi}$ del ángulo completo. Esta no es la definición habitual de radián. Sin embargo, con esta definición se puede ver que, si π es el área del círculo*, el área de un sector angular de ángulo h es $h/2$, que es lo que hemos usado.

Así, lo anterior puede considerarse una demostración de que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$. ¿Cómo podríamos calcular, usando esto, la *longitud* de la circunferencia? No hemos definido en este curso la longitud de una curva, pero podemos pensar que la longitud de la circunferencia es el límite de los perímetros de los n-ágonos regulares inscriptos cuando n se hace cada vez más grande. El perímetro del n-ágono regular se puede calcular como ejercicio, usando un poco de trigonometría. ¿A qué se aproxima este perímetro cuando n crece? ¡Para ver que se aproxima a 2π, tenemos que usar justamente que $\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1$! Es decir, usamos este límite para ver que la longitud de la circunferencia es 2π.

Una vez que sabemos que la longitud de la circunferencia es 2π, podemos ver que el *arco de circunferencia* determinado por un radián tiene longitud 1–lo que normalmente se presenta como la definición de radián.

¡Pero que la longitud de la circunferncia es 2π es algo que sabemos de toda la vida! ¿Cómo lo sabemos? Porque nos lo dijeron en la escuela, pero nunca nos explicaron realmente por qué es cierto. Si usamos este dato para calcular el límite del Ejemplo de la derivada de la función seno en 0, y usamos este límite para "demostrar"que la longitud de la circunferencia es 2π, estamos haciendo un *razonamiento circular*.

*Estamos tan acostumbrados a trabajar con el número π que, cuando lo vemos, no nos despierta ninguna suspicacia. Pero, ¿qué es π? Una definición posible, y de las más razonables, es decir que es el área del círculo de radio 1.

Ejemplo 5.2.8. *Una función continua que no es derivable.*

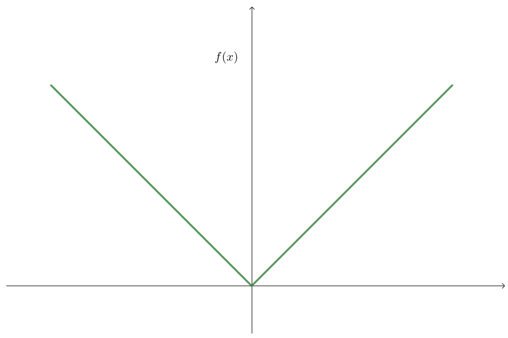
La Proposición 5.1.6 nos dice que si una función es derivable en un punto, entonces es continua en ese punto. ¿Será cierta la afirmación recíproca? Es decir, ¿será cierto que si una función es continua en un punto, también es derivable?

No, la vida del estudiante de cálculo no es tan plácida. Para ver esto, consideremos la función valor absoluto $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, cuya gráfica aparece en la figura. Esta función es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, y vamos a ver que no es derivable en 0.

Si pensamos en que la derivada se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica, parece claro que la gráfica de f en 0 no admite una recta tangente. Sin embargo, *la derivada es, por definición, el límite del cociente incremental. Para ver que no existe $f'(0)$, tenemos que ver que no existe el límite del cociente incremental.*

El cociente incremental de f en 0 es

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$



Cuando $h > 0$, esto vale $\frac{h}{h} = 1$, por lo que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1.$$

Cuando $h < 0$, esto vale $\frac{-h}{h} = -1$, por lo que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1.$$

Por lo tanto, no existe $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$, es decir, f no es derivable en 0.

Un comentario sobre funciones continuas no derivables

Hay incluso funciones continuas en todos los puntos que no son derivables en ninguno de ellos. El primer ejemplo conocido es la "función de Weierstrass", y data del siglo XIX.

Lejos de ser funciones raras, las funciones continuas no derivables en ningún punto son muy abundantes, y muy útiles en muchas aplicaciones de la matemática. Se usan, entre otras cosas, para modelar fenómenos tan diversos como el movimiento de las moléculas en un gas y el precio de activos financieros.

5.2.2. Un ejemplo que desafía la intuición

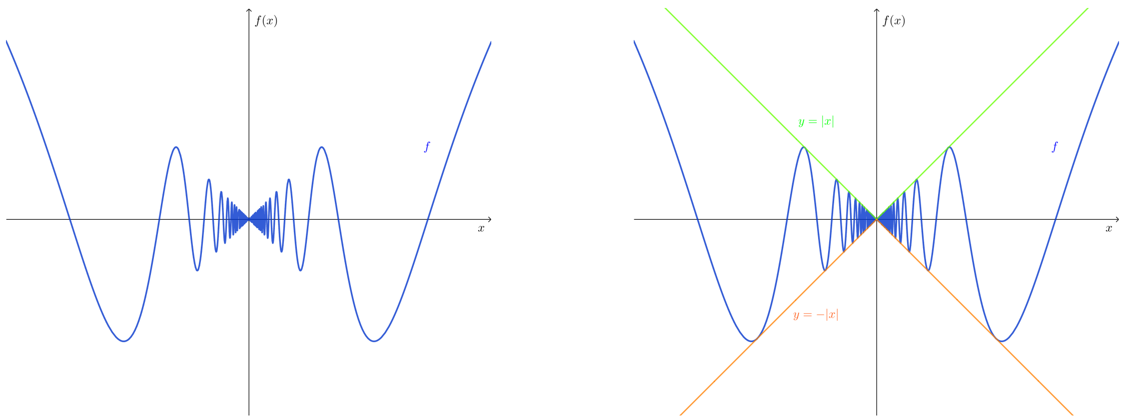
Recordemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es continua en 0. El cociente incremental de f en 0 es

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h \operatorname{sen}(1/h) - 0}{h} = \operatorname{sen}(1/h),$$

que no tiene límite cuando h tiende a 0, por lo que f no es derivable en 0.



Observemos la figura. La gráfica de la función f está comprendida entre las de las funciones $|x|$ y $-|x|$, dos funciones continuas que valen 0 en 0. Por eso, cerca de 0, hay un *sandwich*

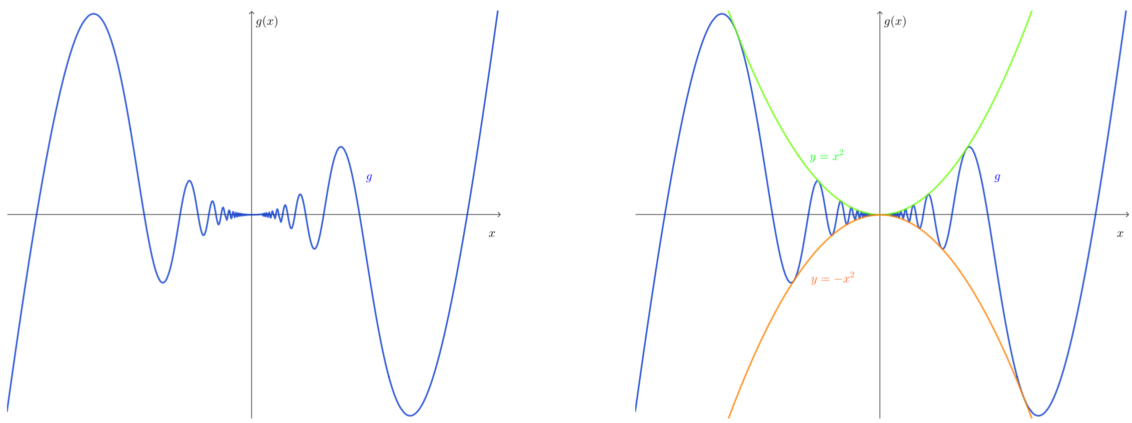
$$-|x| \leq f(x) \leq |x|$$

que nos permite ver la continuidad de f en 0.

Consideremos ahora a una parienta cercana de f, que es la función dada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.2.9.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Al igual que f, esta función es continua en 0. (¡Verificarlo como ejercicio!) El cociente incremental de g en 0 es

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} = \frac{h^2 \text{sen}(1/h) - 0}{h} = h\, \text{sen}(1/h),$$

por lo que

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} h\mathrm{sen}(1/h) = 0.$$

Observemos la figura. La gráfica de la función g está comprendida entre las de las funciones x^2 y $-x^2$, es decir,

$$-x^2 \leq g(x) \leq x^2.$$

Tanto $-x^2$ como x^2 son funciones derivables en 0, y su derivada vale 0. Dicho de otro modo, las parábolas $y = -x^2$ e $y = x^2$ tienen recta tangente en el punto $(0,0)$, que es la recta horizontal $y = 0$.

¿Tiene sentido decir que la gráfica de g tiene recta tangente en $(0,0)$, y que esta es la recta horizontal $y = 0$? ¡Quién sabe! Pero sí tiene sentido decir que g es derivable en 0 y que $g'(0) = 0$, *porque la derivada es el límite del cociente incremental, y lo acabamos de calcular.*

Esta función desafía nuestra intuición geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente. Es un ejemplo elegido para mostrar que la derivada, tal como la definimos, es un concepto un poco más general. Es por ejemplos como este que usamos dibujos de funciones sencillas y razonamientos geométricos para *entender* las ideas y los razonamientos nuevos, pero siempre nos remitimos a las definciones y a los resultados ya demostrados para *demostrar* (es decir, justificar rigurosamente mediante razonamientos lógicos) teoremas.

5.2.3. Álgebra de derivadas

Como la derivada es un límite, las propiedades que conocemos de los límites nos permiten calcular derivadas.

Proposición 5.2.10. *Si f y g son dos funciones definidas en un intervalo I y derivables en un punto x, entonces $f+g$ y fg también son derivables en x. Si $g \neq 0$ en I, la función f/g también es derivable en x. Estas derivadas valen:*

1. $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Esto nos da una familia importante de ejemplos de funciones derivables.

Ejercicio 57. Las funciones polinómicas son derivables, y la derivada de $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \cdots + a_nx^n$ es $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}$.

Ejercicio 58. La función tangente $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ es derivable, y su derivada es

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

Ejercicio 59. Demostrar que $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$, usando la linealidad del límite.

Vamos a demostrar la segunda y la tercera afirmación de la Proposición 5.2.10.

Demostración de *2*.

El cociente incremental para la función fg es

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Lo que hemos hecho es, en el numerador del cociente incremental, sumar y restar $f(x)g(x+h)$. Luego, agrupamos los sumandos convenientemente y aplicamos la propiedad distributiva.

Tomando límite,

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.\end{aligned}$$

Por la Proposición 5.1.6, $\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, y

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \ \square$$

Demostración de *3*.

Vamos a calcular la derivada de la función $1/g$. Luego podemos usar la fórmula de la derivada del producto que acabamos de demostrar aplicándola a $f/g = f \cdot (1/g)$.

Observemos que el cociente incremental de $1/g$ en el punto x es

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x) - g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)},$$

que cuando $h \to 0$ converge a

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}. \tag{5.2.11}$$

Ejercicio 60. Usando *2* y la ecuación (5.2.11), terminar la demostración de *3*.

Observación 5.2.12. *El conjunto*

$$V = \{\varphi : I \to \mathbb{R} \ / \ \varphi \textit{ es una función derivable en } x\}$$

es un espacio vectorial.

Según la Proposición 5.2.10, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ y $(cf)'(x) = cf'(x)$ para toda constante c. Esto nos dice que la función $T : V \to \mathbb{R}$ dada por $T(f) = f'(x)$ es una transformación lineal.

5.2.4. Regla de la cadena

Cuando escribimos una función "dada por una fórmula", como por ejemplo

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \varphi(x) &= \operatorname{sen}(\log(x^2+3)) \end{aligned}$$

estamos, en general, haciendo sumas, productos, cocientes y *composiciones* de funciones más sencillas. Para poder derivar una función así, lo que nos falta es saber cómo derivar una composición de funciones. El resultado que nos dice cómo hacer esto se conoce como *Regla de la Cadena.*

Teorema 5.2.13. (Regla de la cadena)
Sean I y J dos intervalos de $\mathbb{R}$, x_0 un punto de I y $g : I \to J$ y $f : J \to \mathbb{R}$ dos funciones tales que g es derivable en x_0 y f es derivable en $g(x_0)$. Entonces, la composición $f \circ g$ es derivable en x_0 y su derivada es

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Ejemplo 5.2.14. *Derivada de $\psi(x) = \log(x^2+3)$.*

Esta función es la composición $\psi = f \circ g$, donde $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x)$ y $g : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $g(x) = x^2 + 3$. Ambas funciones son derivables en todo su dominio, y por la Regla de la Cadena $\psi'(x) = f'(g(x))g'(x)$. Es decir,

$$\psi'(x) = \frac{1}{x^2+3}2x.$$

Ejemplo 5.2.15. *Derivada de $\varphi(x) = \operatorname{sen}(\log(x^2+3))$.*

Esta función es la composición $\varphi = h \circ \psi$, donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{sen}(x)$ y ψ es la función del ejemplo anterior. Ambas funciones son derivables en todo su dominio, y por la Regla de la Cadena $\varphi'(x) = h'(\psi(x))\psi'(x)$. Es decir,

$$\varphi'(x) = \cos(\log(x^2+3))\frac{2x}{x^2+3}.$$

Daremos primero una idea de la demostración de la Regla de la Cadena, para luego escribir una demostración rigurosa.

Idea de la demostración del Teorema 5.2.13:

El cociente incremental de $f \circ g$ en el punto x_0 es

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h}.$$

Si lo multiplicamos y dividimos por $g(x_0+h) - g(x_0)$, obtenemos

$$\frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{h} = \frac{f(g(x_0+h)) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}. \tag{5.2.16}$$

El segundo factor es el cociente incremental de g en x_0, que cuando h tiende a cero converge a $g'(x_0)$.

Por otro lado, como g es derivable en x_0, es también continua en x_0 (por la Proposición 5.1.6). Entonces, cuando $h \to 0$, tenemos que $g(x_0+h) \to g(x_0)$, o sea, $g(x_0+h) - g(x_0) \to 0$. Si llamamos k al incremento $k = g(x_0+h) - g(x_0)$[7], el primer factor de (5.2.16) nos queda

$$\frac{f(g(x_0)+k) - g(x_0)}{k}.$$

y $k \to 0$ cuando $h \to 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x_0)+k) - g(x_0)}{k} = f'(g(x_0)).$$

Tomando límite del cociente incremental (5.2.16), tenemos que

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0).$$

El problema con esta idea es que cuando dividimos entre $g(x_0+h) - g(x_0)$ en la ecuación (5.2.16), *no tuvimos cuidado de no dividir entre cero.* Es decir, podría pasar que para valores de $h \neq 0$ la diferencia $g(x_0+h) - g(x_0)$ fuera igual a 0.

Por este motivo, en la demostración de la Regla de la Cadena tomaremos una función auxiliar que a primera vista puede parecer un tanto artificial, pero que evitará este problema.

Demostración del Teorema 5.2.13:

Consideremos la función φ definida en un entorno de 0 dada por

$$\varphi(h) = \begin{cases} \frac{f(g(x_0+h) - f(g(x_0))}{g(x_0+h) - g(x_0)} & \text{si} \quad g(x_0+h) \neq g(x_0) \\ \\ f'(g(x_0)) & \text{si} \quad g(x_0+h) = g(x_0) \end{cases}$$

[7] Hay que tener presente que k depende de h.

Ejercicio 61. Verificar que

$$\frac{f(g(x_0+h))-f(g(x_0))}{h}=\varphi(h)\,\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} \tag{5.2.17}$$

para todos los valores de h, y que $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=f'(g(x_0))$.

Tomando límite con $h\to 0$ en la ecuación (5.2.17), nos queda que

$$(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0),$$

que es lo que queríamos probar. □

5.2.5. Teorema de la función inversa

Recordemos que si una función $f: I\to J$ es biyectiva, su inversa es una función $g: J\to I$ tal que $f\circ g$ y $g\circ f$ son la función identidad, es decir,

$$f\circ g(x)=x \quad \forall x\in J \tag{5.2.18}$$

y

$$g\circ f(x)=x \quad \forall x\in I. \tag{5.2.19}$$

En esta sección, I y J serán siempre intervalos en $\mathbb{R}$. Vamos a considerar las preguntas siguientes:

- *Si f es derivable en I, ¿es g derivable en J?*
- *En caso afirmativo, ¿cómo se calcula la derivada?*

Antes de abordar este problema, recordemos algunas particularidades que tienen las funciones biyectivas entre intervalos de $\mathbb{R}$.

Si I y J son intervalos de $\mathbb{R}$ y $f: I\to J$ es *continua* y biyectiva, entonces es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

En el capítulo de continuidad de las notas, ya se vio (Proposición 4.2.18) que si f es sobreyectiva y estrictamente monótona (es decir, estrictamente creciente o estrictamente decreciente), entonces es biyectiva. Lo que aquí estamos diciendo es que éstas son las únicas funciones continuas y biyectivas entre intervalos.

Ejercicio 62. Demostrar la afirmación del recuadro amarillo, con los siguientes pasos como guía:

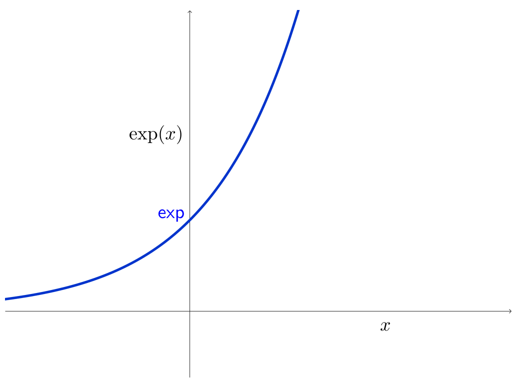
1. Suponer que f no es ni estrictamente creciente ni estrictamente decreciente. Probar que en este caso existen $x, y, z \in I$ tales que $x < y < z$ y
   - $f(x) < f(y)$ y $f(z) < f(y)$ o
   - $f(x) > f(y)$ y $f(z) > f(y)$.
2. Suponer que para $x < y < z$ se tiene que $f(x) < f(y)$ y $f(z) < f(y)$, ya que el otro caso es análogo. Probar que existe $\lambda \in (f(x), f(y)) \cap (f(y), f(z))$.[8]
3. Usando el Teorema de los valores intermedios,[9] probar que existen $w_1 \in (x, y)$ y $w_2 \in (y, z)$ tales que $f(w_1) = f(w_2) = \lambda$. Concluir que f no es biyectiva.

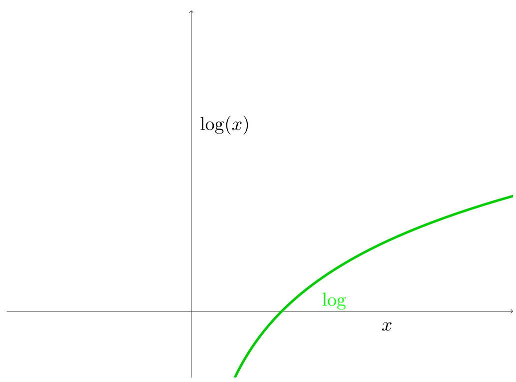
En este ejercicio se usaron dos corolarios del Teorema de Bolzano, que es un teorema fundamental sobre las funciones continuas. Dar un ejemplo de una función biyectiva entre dos intervalos de $\mathbb{R}$ que no sea continua y que no sea estrictamente monótona.

Una función biyectiva f y su inversa g tienen gráficos con la siguiente propiedad geométrica:

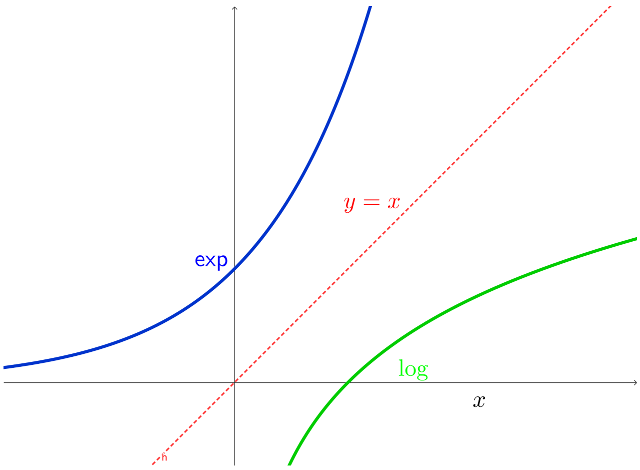
Si $f : I \to J$ es biyectiva y $g : J \to I$ es su inversa, entonces el gráfico de g se obtiene a partir del de f haciendo una simetría axial que tiene como eje a la recta $y = x$.

Esto se ve, por ejemplo, en las gráficas de las funciones exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ y logaritmo $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.





[8]Recordar el Corolario 4.2.10 del capítulo Límites y Continuidad, que dice que la imagen por una función continua de un intervalo es otro intervalo.
[9]Corolario 4.2.9 del capítulo Límites y Continuidad.



Veamos por qué es cierto en general. El gráfico de f es el conjunto

$$Gr(f) = \{(x, y) \in I \times J \ / \ y = f(x)\}.$$

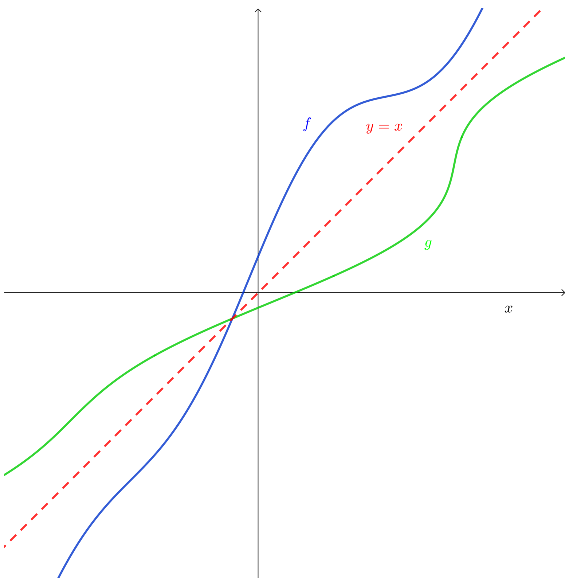
La simetría axial de eje $y = x$ lleva un punto (x, y) en el punto (y, x), por lo que la imagen de $Gr(f)$ por esta simetría es el conjunto

$$X = \{(y, x) \in J \times I \ / \ y = f(x)\}.$$

Como g es la inversa de f, lo podemos escribir como

$$X = \{(y, x) \in J \times I \ / \ g(y) = x\},$$

y esto es exactamente el gráfico de g.



Volvamos a las preguntas que motivaron esta sección.

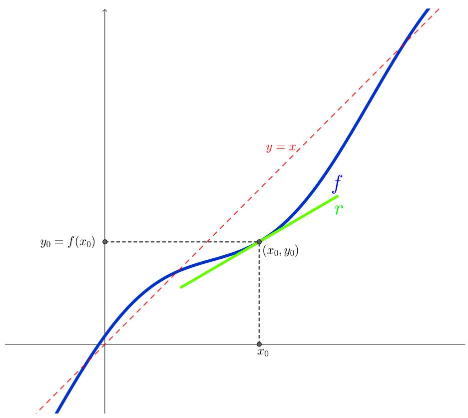
- *Si f es derivable en I, ¿es g derivable en J?*
- *En caso afirmativo, ¿cómo se calcula la derivada?*

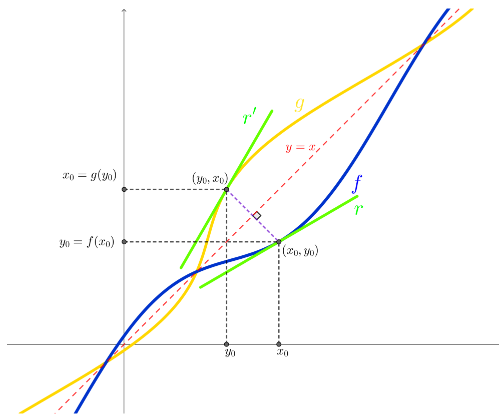
La respuesta viene dada en el siguiente resultado, que se llama Teorema de la Función Inversa.

Teorema 5.2.20. (Teorema de la función inversa) *Sean I y J intervalos de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ una función continua y biyectiva que es derivable en un punto x_0 que es interior a I y $g : J \to I$ la inversa de f. Si $f'(x_0) \neq 0$, g es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y su derivada vale*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

Antes de demostrarlo, vamos a tratar de entender geométricamente lo que nos dice este teorema.





Miremos, en la imagen, el punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ del gráfico de f. La función f es derivable en x_0 si el gráfico tiene recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$ y si esta recta tangente no es vertical.[10] En este caso la derivada $f'(x_0)$ es la pendiente de esta tangente. Llamamos r a esta recta.

En este caso, el punto simétrico $(y_0, x_0) = (y_0, g(y_0))$ del gráfico de g tiene recta tangente, que se obtiene simetrizando r respecto de $y = x$. Llamamos r' a esta recta. Entonces r' es vertical si y sólo si r es horizontal, es decir, si y sólo si $f'(x_0) = 0$. Cuando $f'(x_0) \neq 0$, la recta r' tiene pendiente $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Lo anterior nos indica que si f es derivable en x_0 y $f'(x_0) \neq 0$, entonces g es derivable en $y_0 = f(x_0)$, y su derivada es $\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$, que es exactamente lo que dice el Teorema de la función inversa.

[10] Porque si la tangente es vertical, el límite del cociente incremental es infinito.

Demostración del Teorema de la función inversa.

Supongamos que f es estrictamente creciente, ya que el caso en que es estrictamente decreciente es análogo. En este caso, g también es estrictamente creciente.

Ejercicio 63. Demostrar que si $f : I \to J$ es estrictamente creciente, su inversa $g : J \to I$ también lo es.

Vamos a ver en primer lugar que la inversa g de f es continua en $y_0 = f(x_0)$. Tomemos $\varepsilon > 0$. Como x_0 es interior a I, existen $x_1 \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \cap I$ y $x_2 \in (x_0, x_0 + \varepsilon) \cap I$. Al ser f estrictamente creciente, $f(x_1) < y_0 < f(x_2)$. Tomemos $\delta > 0$ tal que $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (f(x_1), f(x_2))$. Como g es estrictamente creciente, para todo $y \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $g(y) \in (x_1, x_2) \subset (g(y_0) - \varepsilon, g(y_0) + \varepsilon)$.

Usaremos esto para probar que g es derivable en y_0. La derivada de g en y_0 es

$$\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}.$$

Llamando x a $g(y)$, tenemos que $f(x) = y$ y podemos escribir el cociente incremental como

$$\frac{x - g(y_0)}{f(x) - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

Como g es continua en y_0, $\lim_{y \to y_0} g(y) = x_0$, por lo que la derivada de g en y_0 queda

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}. \qquad \square$$

Lo anterior demuestra que g es derivable en y_0 y calcula su derivada. Sabiendo que g es derivable, hay una forma sencilla de calcular su derivada usando la regla de la cadena, que es útil para recordarla. La vemos en el siguiente recuadro.

Como $f \circ g(y) = y$, derivando de ambos lados tenemos que $(f \circ g)'(y) = 1$.[a] Por la regla de la cadena, $(f \circ g)'(y_0) = f'(g(y_0))g'(y_0)$, por lo que

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}.$$

[a] $f \circ g$ es la función identidad, que es derivable en todos los puntos de J. Por lo tanto, la igualdad $(f \circ g)'(y) = 1$ es cierta para $y \in J$ aún si f y g fueran sólo derivables en x_0 e y_0, respectivamente.

Ejemplo 5.2.21. *Derivada de la función exponencial.*

Consideremos la función exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, que es la inversa de $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Ya sabemos que $\log'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$. Entonces, por el teorema de la función inversa,

$$\exp'(y) = \frac{1}{\log'(\exp(y))} = \frac{1}{\frac{1}{\exp(y)}} = \exp(y).$$

Es decir, la función exponencial ($\exp(y) = e^y$) es igual a su derivada.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 1 - segundo parcial 2020) Calcular $f'(0)$ donde

$$f(x) = (2x+1)^{11}e^x$$

A) 12 C) 23 E) 34

B) 13 D) 25 F) 37

Solución. Aplicando la regla del producto:

$$f'(x) = ((2x+1)^{11})'e^x + (2x+1)^{11})(e^x)'$$

Además, por la regla de la cadena:

$$((2x+1)^{11})' = 11(2x+1)^{10} \cdot 2 = 22(2x+1)^{10}$$

Luego, $f'(x) = 22(2x+1)^{10} + (2x+1)^{11}e^x$ y, por lo tanto,

$$f'(0) = 22 + 1 = 23$$

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 2 - segundo parcial primer semestre 2020) Sean r la recta de ecuación $y = 2x$ y r' la recta tangente a la curva de ecuación $y = e^{a(x^2-1)}$ en el punto $x = 1$. El valor de a para el cual r y r' son paralelas es:

A) -2 C) 0 E) 2

B) -1 D) 1 F) 3

Solución. Comenzamos calculando la ecuación de la recta r'. Es decir, buscamos la recta tangente a f en $x = 1$ donde $f(x) = e^{a(x^2-1)}$. Tenemos que $f'(x) = e^{a(x^2-1)} \cdot 2a$ y, por lo tanto, $f'(1) = e^{a(1-1)} \cdot 2a = 2a$. Luego, la recta tangente a f en $x = 1$ es

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2ax + 1 - 2a$$

Finalmente, buscamos a de forma que las rectas

$$y = 2x \qquad \text{y} \qquad y = 2ax + 1 - 2a$$

sean paralelas. Para que esto suceda, ambas rectas deben tener la misma pendiente, es decir

$$2 = 2a$$

y, por lo tanto, $a = 1$.

Notar que en este ejercicio se puede trabajar directamente con $f'(1)$ que es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = e^{a(x^2-1)}$ sin necesidad de hallar la ecuación de la recta tangente.

5.2.6. Regla de L'Hôpital

Una aplicación muy útil de las derivadas al cálculo de límites es la Regla de L'Hôpital, que nos permite calcular muchos límites "indeterminados". Esto es, cociente de dos infinitésimos o de dos infinitos. En esta sección sólo la vamos a enunciar, y daremos su demostración más adelante.

Teorema 5.2.22 (Regla de L'Hôpital I)**.** *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a,b) excepto posiblemente en un punto x_0, y tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Si $g'(x) \neq 0$ en un entorno de x_0 y existe $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ y*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación 5.2.23. *La Regla de L'Hôpital I sigue siendo cierta si en lugar de tomar límite cuando $x \to x_0$ tomamos un límite lateral $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$, e incluso si tomamos límite cuando $x \to \pm\infty$.*

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 5.2.24. *Aplicación de la regla de L'Hôpital a un límite indeterminado de la forma* $0/0$.

Consideremos el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Es un límite indeterminado de la forma $0/0$. Aplicando la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{\cos(x)} = 2.$$

Ejemplo 5.2.25. *¡Hay que verificar las hipótesis!*

Consideremos el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{2x-1} = 4.$$

Este límite no es indeterminado. Si no observamos esto, podemos caer en la tentación de aplicar la regla de L'Hôpital, y llegar a la conclusión errónea de que

$$\lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6}{2} = 3.$$

Ejemplo 5.2.26. *La Regla de L'Hôpital no resuelve todos los problemas.*

Consideremos el límite

$$lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x},$$

que es un límite indeterminado de la forma $0/0$. Aplicando la regla de L'Hôpital, tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Esto es correcto, pero no útil. Si seguimos aplicando la regla de L'Hôpital, este límite solo "empeora", en el sentido de que el grado del denominador crece.

La regla de L'Hôpital también funciona para indeterminaciones de la forma ∞/∞.

Teorema 5.2.27 (Regla de L'Hôpital II)**.** *Sean f y g dos funciones derivables en un intervalo (a, b) excepto posiblemente en un punto x_0, y tales que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$. Si existe $\lim_{x\to x_0} f'(x)/g'(x)$, entonces también existe $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x)$ y*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Observación 5.2.28. *La Regla de L'Hôpital II sigue siendo cierta si en lugar de tomar límite cuando $x \to x_0$ tomamos un límite lateral $x \to x_0^+$ o $x \to x_0^-$, e incluso si tomamos límite cuando $x \to \pm\infty$.*

Ejemplo 5.2.29. *Aplicación de la regla de L'Hôpital a un límite indeterminado de la forma ∞/∞.*

Consideremos el límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{\log(x)}.$$

Aquí, $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} \log(x) = -\infty$, por lo que este límite es indeterminado. Por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = -\infty.$$

5.3. Teorema del valor medio

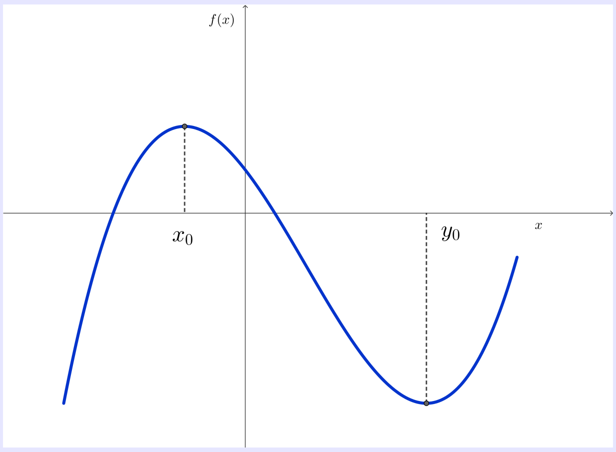
Del mismo modo en que vimos algunos teoremas importantes relativos a funciones continuas en un intervalo $[a, b]$,[11] veremos en esta sección teoremas importantes relativos a funciones que son derivables en un intervalo. El principal, y que da nombre a la sección, es el *Teorema del valor medio de Lagrange*.

5.3.1. Extremos relativos

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función con dominio en un intervalo I. Recordemos que f tiene un *máximo absoluto* en un punto $x_0 \in I$ si $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in I$. La definición de mínimo absoluto es análoga.

Una noción similar, pero local, es la de *máximo relativo* que damos a continuación.

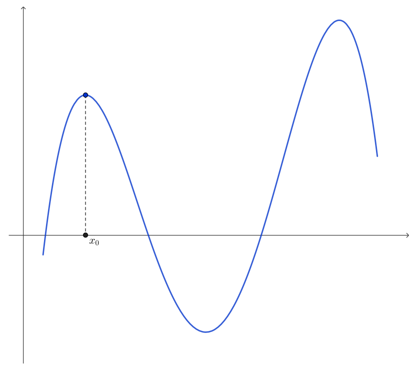
Definición 5.3.1. La función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un máximo relativo en $x_0 \in I$ si existe un entorno U de x_0 tal que $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in U \cap I$.
La función $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en $y_0 \in I$ si existe un entorno U de y_0 tal que $f(x) \geq f(y_0)$ $\forall x \in U \cap I$.



Si f tiene un máximo relativo en x_0 o un mínimo relativo en x_0, decimos que tiene un extremo relativo en x_0.

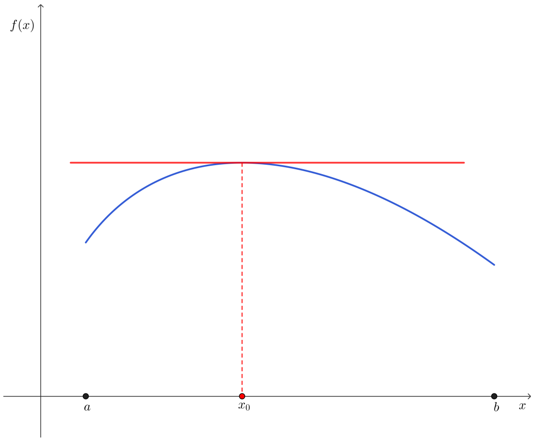
Claramente, si f tiene un máximo absoluto en x_0, en particular tiene un máximo relativo. En la figura siguiente podemos ver una función que tiene un máximo relativo que no es absoluto.

[11] Integrabilidad de funciones continuas, Teorema de Bolzano, Teorema de Weierstrass.



Para funciones derivables, tenemos la proposición siguiente:

Proposición 5.3.2. *Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in (a, b)$. Si f tiene un extremo relativo en x_0 y es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.*



Demostración:

Supongamos que f tiene un máximo relativo en x_0, ya que el caso en que tiene un mínimo es análogo. Sea U un entorno de f, contenido en (a, b), tal que

$$f(x) \leq f(x_0) \ \forall x \in U.$$

Para $x \in U$, $x > x_0$, el cociente incremental

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

es menor o igual que 0, porque $f(x) - f(x_0) \leq 0$ y $x - x_0 > 0$. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \tag{5.3.3}$$

En forma análoga, para $x \in U$, $x < x_0$, el cociente incremental

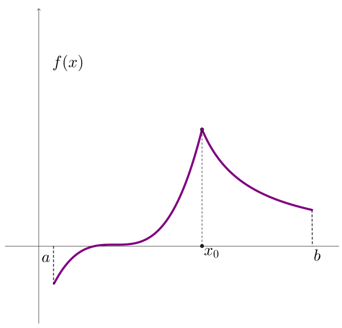
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

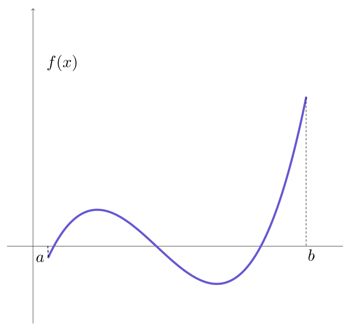
es mayor o igual que 0, por lo que

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0. \tag{5.3.4}$$

Como f es derivable en x_0, los límites (5.3.3) y (5.3.4) son iguales y valen $f'(x_0)$. Esto nos dice que, $f'(x_0) \leq 0$ y $f'(x_0) \geq 0$, por lo que $f'(x_0) = 0$. $\square$

Como siempre, es importante tener en cuenta las hipótesis de esta proposición, a saber, que f es derivable en el punto x_0 en que tiene el extremo y que x_0 es interior al dominio de f. Cuando estas hipótesis no se cumplen, la proposición no vale, como se ve en los dibujos. En uno de ellos hay un extremo en un punto en el que la función no es derivable, y en el otro hay un extremo en un punto que no es interior al dominio de la función.





El recíproco de esta proposición no es cierto, como muestra el siguiente ejemplo.

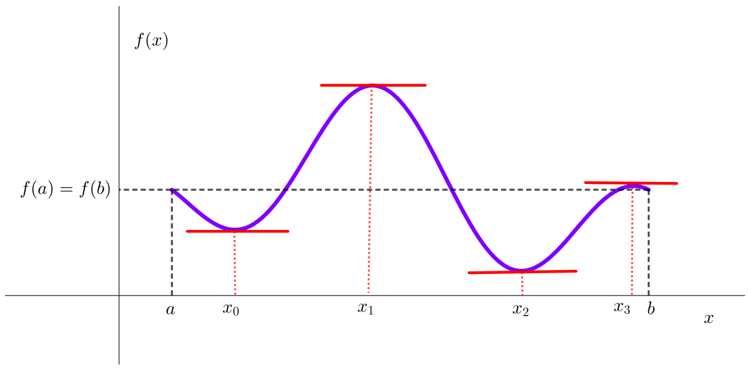
Ejemplo 5.3.5. *La derivada puede anularse en un punto donde no hay un extremo.*

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Esta función es derivable en todo su dominio, y es estrictamente creciente. Su derivada es $f'(x) = 3x^2$, por lo que $f'(0) = 0$. Sin embargo, f no tiene un extremo relativo en 0.

5.3.2. Teorema de Rolle

Teorema 5.3.6 (Teorema de Rolle)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Este teorema nos dice que para una función derivable, si $f(a) = f(b)$, hay algún punto de la gráfica donde la tangente es horizontal. Este punto no tiene por qué ser único, como se ve en la figura.



Demostración.

Consideremos primero el caso (muy particular) en que f es constante, es decir, $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$. En este caso $f'(x) = 0$ en todos los puntos, por lo que el teorema vale.

Nos queda en caso en que f no es constante. Como f es continua en $[a, b]$, el Teorema de Weierstrass nos asegura que tiene máximo y mínimo absolutos.

Los extremos absolutos pueden darse en el interior de $[a, b]$ o en el borde de $[a, b]$, pero como $f(a) = f(b)$, algún extremo absoluto tiene que darse en un punto de (a, b). En efecto, si el máximo absoluto se da en a también se da en b, y como f no es constante el máximo y el mínimo no coinciden. Esto asegura que el mínimo se da en algún punto de (a, b). Lo mismo pasa si en a y b hay un mínimo.

Sea entonces $c \in (a, b)$ un punto donde hay un extremo absoluto. Entonces, como f es derivable en c, $f'(c) = 0$. $\square$

Si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es la posición de un móvil que se mueve en una dimensión, la condición $f(0) = f(T)$ significa que la posición inicial es igual a la posición final. El teorema de Rolle nos dice que, en un movimiento unidimensional, si la posición inicial y la posición final coinciden, hay un momento intermedio en que la velocidad es igual a cero.

5.3.3. Teorema del valor medio de Lagrange

El teorema del valor medio de Lagrange se demuestra a partir del de Rolle, y es más general. Dice lo siguiente:

Teorema 5.3.7 (Teorema del valor medio de Lagrange)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función que es continua en* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b)*. Entonces existe* $c \in (a, b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Observemos que el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ es la pendiente del segmento que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ de la gráfica de f. Llamemos s a este segmento. Lo que nos dice este teorema es que hay un punto $c \in (a, b)$ para el cual la tangente a la gráfica de f en $(c, f(c))$ es paralela al segmento s. Al igual que en el teorema de Rolle, este punto podría no ser único. (Si f es una función lineal, todos los puntos cumplen esto).

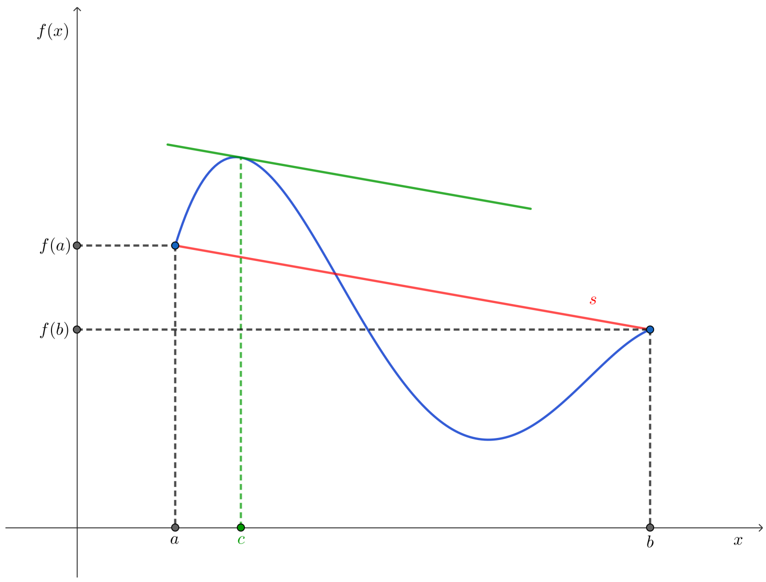
Si $f : [0, T] \to \mathbb{R}$ es la posición de un móvil que se mueve en una dimensión, el cociente $\bar{v} = \frac{f(T)-f(0)}{T}$ es la velocidad media. Lo que nos dice el teorema de Lagrange es que hay un momento intermedio en que la velocidad instantánea es igual a $\bar{v}$.
Supongamos, por ejemplo, que un auto que circula por la ruta interbalnearia pasa por el peaje Pando a las 3 de la tarde y por el peaje Solís a las 3:20. La distancia entre ambos peajes es de 48,6 km, y el auto la recorrió en 20 minutos, es decir, en 1/3 de hora. La velocidad media es por lo tanto

$$\bar{v} = \frac{48,6 km}{\frac{1}{3} h} = 145,8\, km/h.$$

La velocidad máxima permitida es $110\, km/h$. ¿Es correcto que al llegar al peaje Solís el auto sea multado? ¡Claro que sí! El teorema del valor medio de Lagrange nos *asegura* que en algún momento entre las 3:00 y las 3:20 la velocidad instantánea fue de $145,8\, km/h$, lo cual supera en mucho la velocidad máxima permitida.

Demostración del Teorema 5.3.7.

La imagen que ilustra el teorema de Lagrange es similar a la que ilustra el teorema de Rolle, pero “torcida”. La idea de esta demostración consiste en tomar una función auxiliar “enderece” a f, de modo de poder aplicarle el teorema de Rolle.



Observemos, en la figura, la gráfica de f y el segmento s, que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. El segmento s es la gráfica de una función lineal $h : [a, b] \to \mathbb{R}$.

La derivada de h es constante e igual a la pendiente de s, es decir, es $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Además, la función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es la diferencia $g = f - h$ cumple $g(a) = g(b) = 0$. Es decir, g está en las hipótesis del teorema de Rolle. Por lo tanto, existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Como $g'(c) = f'(c) - h'(c)$, esto quiere decir, que $f'(c) = h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. $\square$

Observación 5.3.8. *La función h que tomamos está dada por $h(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$. Lo único que nos importa de ella es que es una función lineal con derivada $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, por lo que con cualquier función así se puede hacer el mismo argumento.*[12]

Observación 5.3.9. *El Teorema 5.3.6 es un caso particular del Teorema 5.3.7. En efecto, cuando $f(b) = f(a)$, el cociente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ vale 0, y en el punto intermedio c dado por el teorema de Lagrange se cumple que $f'(c) = 0$.*

5.3.4. Demostración de la Regla de L'Hôpital

En esta sección daremos (¡al fin!) una prueba del Teorema 5.2.22, la Regla de L'Hôpital I.

Lema 5.3.10. *Observemos que, bajo las hipótesis del Teorema 5.2.22, existe un entorno reducido de x_0 donde $g(x) \neq 0$.*

[12] ¿Por qué para cualquier función lineal h con derivada $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ se cumple que $(f - h)(a) = (f - h)(b)$?

Demostración.

Sabemos por hipótesis que existe un entorno de x_0 donde $g'(x) \neq 0$. Es decir, existe $\delta > 0$ tal que $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in E^*(x_0, \delta)$.

Supongamos que en todo entorno reducido de x_0 hay ceros de la función g. En particular, existe $y_0 \in E^*(x_0, \delta)$ tal que $g(y_0) = 0$. Sea $\delta_1 = d(x_0, y_0)$, y observemos que $\delta_1 < \delta$. Existe $y_2 \in E^*(x_0, \delta_1)$ tal que $g(y_1) = 0$.

Si y_0 e y_1 son ambos mayores que x_0, tenemos que $x_0 < y_1 < y_0 < x_0 + \delta$. La función g es derivable en el intervalo (y_1, y_0), continua en $[y_1, y_0]$ y $g(y_1) = g(y_0) = 0$. Por el teorema de Rolle, existe $c \in (y_1, y_0)$ tal que $g'(c) = 0$. Esto es absurdo porque, por hipótesis, no hay ceros de g' en $E^*(x_0, \delta)$.

Si y_0 e y_1 son ambos menores que x_0, haciendo un argumento análogo también llegamos a una contradicción.

Si $(y_0 - x_0)(y_1 - x_0) < 0$, tomemos $\delta_2 = d(x_0, y_1)$. Existe $y_2 \in E^*(x_0, \delta_2)$ tal que $g(y_2) = 0$. De los tres puntos $y_0,\ y_1$ e y_2, dos deben estar del mismo lado de x_0, y podemos aplicarles el razonamiento anterior. $\square$

Demostración del Teorema 5.2.22.

Las funciones f y g pueden no estar definidas en x_0, por lo que consideramos las nuevas funciones con dominio (a, b) dadas por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

y

$$G(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

Son continuas en x_0. Fijemos $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Supongamos que $x > x_0$, ya que el otro caso es análogo. Sea

$$h : [x_0, x] \to \mathbb{R}$$

la función dada por

$$h(y) = F(y)G(x) - G(y)F(x).$$

Entonces h es continua en $[x_0, x]$ y derivable en (x_0, x). Además, $h(x) = h(x_0)$.[13] Por el teorema de Rolle, existe $c_x \in (x_0, x)$ tal que $h'(c_x) = 0$.

Como $h'(y) = F'(y)G(x) - G'(y)F(x) = f'(y)g(x) - g'(y)f(x)$, esto quiere decir que

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

[13] ¡Verificarlo!

Cuando $x \to x_0^+$, $c_x \to x_0^+$, por lo que tomando límite de ambos lados de esta igualdad tenemos que

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

De forma análoga probamos que

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{g(x)},$$

y esto concluye la demostración. □

No demostraremos la Regla de L'Hôpital II que sirve para las indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Se demuestra haciendo un cambio de variable (astuto) a partir de la anterior.

5.4. Crecimiento y clasificación de extremos

5.4.1. Crecimiento y signo de la derivada

El Teorema del valor medio de Lagrange tiene muchas consecuencias geométricas importantes para las funciones derivables. Una de ellas es que nos indica cuándo una tal función *crece, decrece o permanece constante.*

Proposición 5.4.1. *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, entonces f es constante.*

Demostración.

Para ver que f es constante, tenemos que demostrar que para cualquier par de puntos $a, b \in I$, $f(a) = f(b)$. Tomemos entonces $a, b \in I$ con $a < b$. La restricción de f al intervalo $[a, b]$ está en las hipótesis del Teorema 5.3.7, por lo que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como $f'(c) = 0$, esto nos dice que $f(b) = f(a)$. □

Recordemos que f es creciente en un intervalo I si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$ se cumple que $f(x) \leq f(y)$. Decimos que es *estrictamente creciente* si para todo par de puntos $x, y \in I$ con $x < y$ se cumple que $f(x) < f(y)$. La definición de función estrictamente decreciente es análoga.

Teorema 5.4.2. *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable.*

1. *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente creciente.*
2. *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$, entonces f es estrictamente decreciente.*

Demostración.

Demostraremos lo primero, ya que lo segundo es análogo.

Tomemos $a, b \in I$ con $a < b$. La restricción de f al intervalo $[a, b]$ está en las hipótesis del Teorema 5.3.7, por lo que existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como $f'(c) > 0$, esto nos dice que $f(b) > f(a)$. □

Ejemplo 5.4.3. *Estudio del crecimiento a partir del signo de la derivada.*

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1).$$

Por lo tanto,

- f' se anula en -1 y en 3.
- f' es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.
- f' es negativa en $(-1, 3)$.

De lo anterior podemos concluir que f es estrictamente decreciente en $(-1, 3)$, que es estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$ y que también es estrictamente creciente en $(3, +\infty)$.

Ejercicio 64. Sea $g : (-\infty, -1) \cup (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ la restricción de la función f del ejemplo anterior al conjunto $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$. ¿Es g una función creciente?

Ejemplo 5.4.4. *La condición dada en el Teorema 5.4.2 para que f sea estrictamente creciente es suficiente, pero no necesaria.*

Para ver esto, consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$. Es estrictamente creciente, y $f'(0) = 0$.

En el Teorema 5.4.2 se pide que f' sea positiva (o negativa) en un intervalo. Veremos en el siguiente ejemplo que si $f' > 0$ en un punto, esto no es suficiente para garantizar que f crece en un entorno de ese punto.

Ejemplo 5.4.5. *Función con derivada positiva en un punto que no es creciente en un entorno del punto.*

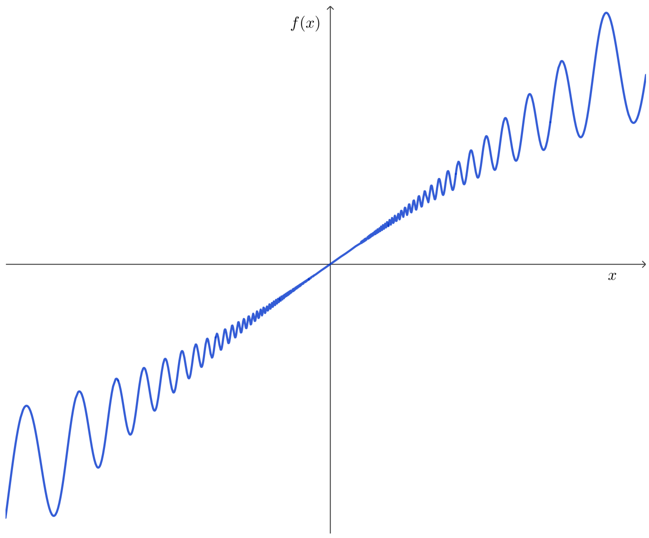
Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}x + x^2 \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Esta función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ porque se obtiene haciendo sumas, productos, cocientes y composiciones de funciones derivables. También es derivable en 0 (ver el Ejemplo 5.2.9), y $f'(0) = \frac{1}{10}$.

Para $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{1}{10} + 2x \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$



Ejercicio 65. Demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, la derivada f' toma valores positivos y negativos en el intervalo $(0, \varepsilon)$.

Observemos que en $\mathbb{R} - \{0\}$ la derivada f' es continua. Por lo tanto, el Teorema de conservación del signo nos asegura que si $f'(x_0) > 0$ en un $x_0 \neq 0$, entonces hay un entorno de x_0 donde $f' > 0$.

Del ejercicio y de la observación anterior podemos concluir que en $(0, \varepsilon)$ hay subintervalos donde la función f crece y donde la función f decrece. Por lo tanto, a pesar de que $f'(0) > 0$, no hay ningún entorno de 0 donde f sea creciente.

5.4.2. Clasificación de extremos a partir del signo de la derivada

Definición 5.4.6. Sea f una función que es derivable en un punto x_0 de su dominio. Si $f'(x_0) = 0$, decimos que x_0 es un punto crítico de f.

Usando esta definición, podemos reescribir la Proposición 5.3.2 diciendo que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in (a, b)$ y f tiene un extremo relativo en x_0, entonces x_0 es un punto crítico de f.[14]

Hasta ahora, vimos cómo el signo de f' nos sirve para estudiar el crecimiento de f en los intervalos que no contienen puntos críticos. Ahora veremos lo que el signo de f' nos dice sobre los puntos críticos de f. Comenzaremos con un par de ejemplos.

Ejemplo 5.4.7. *Clasificación de extremos.*

Retomemos la función del Ejemplo 5.4.3, es decir, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Ya hemos visto que su derivada se anula cuando $x = -1$ y cuando $x = 3$, y hemos estudiado el crecimiento de f en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

¿Qué podemos decir de los puntos -1 y 3? Como en esos puntos f' vale 0, de acuerdo a la Proposición 5.3.2 podría haber en ellos extremos relativos.

Observemos que para $x < -1$ la función f crece, y a partir de -1 empieza a decrecer. Por lo tanto, en el punto $x = -1$ la función f tiene un máximo relativo. Para $-1 < x < 3$ la función f decrece, y a partir de 3 empieza a crecer. Por lo tanto, en el punto $x = 3$ la función f tiene un mínimo relativo.

Ejemplo 5.4.8. *Identificación de un punto crítico que no es un extremo.*

Consideremos ahora la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x - 1)^2$.

Por lo tanto,

- f' se anula únicamente en 1.
- f' es positiva en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

De lo anterior podemos concluir que f es estrictamente creciente tanto en $(-\infty, 1)$ como en $(1, +\infty)$. ¿Qué pasa en $x = 1$? La función f crece para $x < 1$, y también para $x > 1$. Por lo tanto, en el punto crítico 1 no hay ni un máximo ni un mínimo relativo.

[14] Atención: es fundamental para que esta proposición sea cierta que $x_0 \neq a$ y $x_0 \neq b$.

5.4.3. Clasificación de extremos con la derivada segunda

Decimos que una función f es *dos veces derivable* en un intervalo I si es derivable en I y su derivada, f', es a su vez derivable en I. La derivada de f' se denota por f'', y se llama *derivada segunda* (o *derivada de orden dos*) de f.

Como la derivada de f nos habla del crecimiento y decrecimiento de f, la derivada segunda nos habla del crecimiento y decrecimiento de f'. Veremos una primera aplicación de este fenómeno en la clasificación de los extremos relativos de f.

Teorema 5.4.9. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función dos veces derivable en (a, b) y tal que f'' es continua. Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto crítico de f.*

1. *Si $f''(x_0) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.*
2. *Si $f''(x_0) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.*

Demostración.

Demostremos el primer inciso, ya que el segundo es análogo.

Como $f''(x_0) > 0$ y f'' es continua, por el Teorema de conservación del signo existe $\delta > 0$ tal que f'' es positiva en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. El Teorema 5.4.2 nos dice por lo tanto que f' es estrictamente creciente en ese entorno.

Como $f'(x_0) = 0$, lo anterior implica que $f' < 0$ en $(x_0 - \delta, x_0)$ y $f' > 0$ en $(x_0, x_0 + \delta)$. Es decir, f decrece a la izquierda de x_0 y crece a la derecha de x_0. Concluimos que f tiene en x_0 un mínimo relativo. □

Ejemplo 5.4.10. *Clasificación de extremo usando la derivada segunda.*

Consideremos nuevamente la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. La derivada de f es

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1),$$

por lo que los puntos críticos de f son -1 y 3. La derivada segunda de f es

$$f''(x) = 6x - 6,$$

que por ser una función polinómica es continua. Como $f''(-1) = -12 < 0$ y $f''(3) = 12 > 0$, concluimos que f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

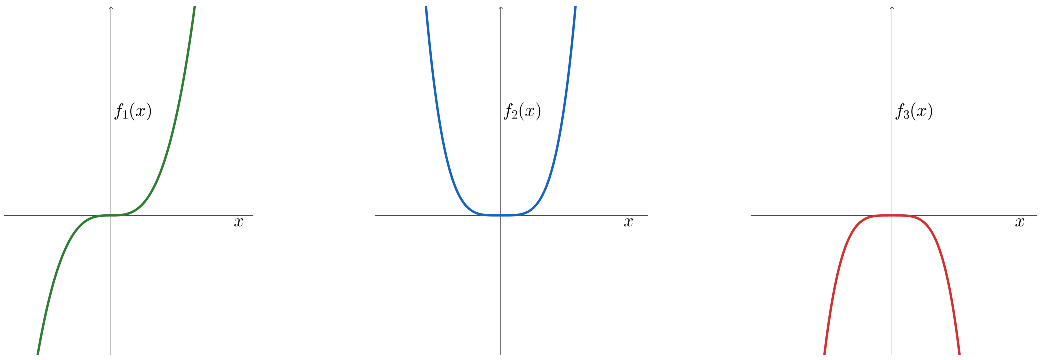
Ejemplo 5.4.11. *¿Qué pasa cuando $f''(x_0) = 0$?*

El criterio anterior no nos dice lo que pasa en un punto crítico x_0 cuando $f''(x_0) = 0$. En este caso, la derivada segunda no sirve para clasificar el punto crítico. Veámoslo en los siguientes ejemplos.

Consideremos las funciones f_1, f_2 y f_3 definidas en $\mathbb{R}$ por

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x^4, \quad f_3(x) = -x^4.$$

Para todas ellas, 0 es un punto crítico. Es decir, $f_1'(0) = f_2'(0) = f_3'(0) = 0$. Además, para todas ellas, la derivada segunda se anula en 0. Es decir, $f_1''(0) = f_2''(0) = f_3''(0) = 0$.



Observemos que f_2 tiene un máximo relativo en 0, f_3 tiene un mínimo relativo en 0, y f_3 no tiene extremo relativo en 0.

Resumamos brevemente lo que sabemos sobre la clasificación de extremos, en el siguiente recuadro.

Si tenemos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, el Teorema de Weierstrass nos asegura que f tiene máximo y mínimo absolutos. Es decir, hay al menos dos puntos de $[a, b]$ donde f presenta un extremo relativo.

Si además f es derivable en (a, b), los extremos relativos que se den en puntos de (a, b) deben darse en puntos críticos. Por lo tanto, para encontrar los extremos relativos, buscamos primero puntos $x_0 \in (a, b)$ tales que $f'(x_0) = 0$. Estudiando el signo de f' en un entorno de x_0, a veces podemos determinar si en x_0 hay un máximo relativo, un mínimo relativo, o si no hay un extremo relativo.

Si además f' es derivable en (a, b) y f'' es continua, a veces podemos determinar si en un punto crítico x_0 tenemos un máximo o un mínimo, mirando el signo de f''.

Ejemplo 5.4.12. *Búsqueda y clasificación de extremos para una función definida en un intervalo cerrado.*

Consideremos la función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 24x + 3.$$

Su derivada es

$$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 60x - 24 = 12(x - 1)^2(x - 2),$$

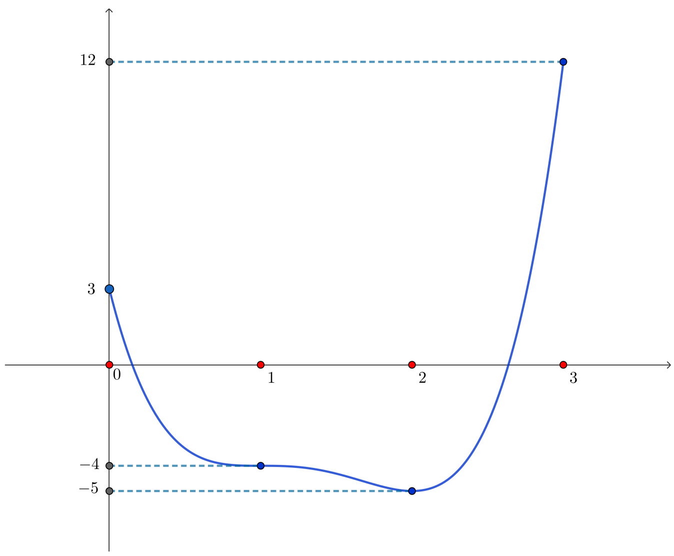
por lo que los puntos críticos de f en $(0,3)$ son $x=1$ y $x=2$. La derivada segunda de f es

$$f''(x) = 36x^2 - 96x + 60.$$

Como $f''(2) > 0$, podemos concluir que f tiene en $x=2$ un mínimo relativo. Sin embargo, $f''(1) = 0$, por lo que la derivada segunda de f no nos sirve para determinar si en $x=1$ hay o no un extremo. Sin embargo, si miramos el signo de f', vemos que $f' < 0$ en $(0,1)$ y en $(1,2)$, por lo que f es decreciente en estos intervalos. De esta información sí podemos concluir que f **no** tiene un extremo en $x=1$.

Veamos qué pasa en los puntos 0 y 3, ya que, al ser $[0,3]$ el dominio de f, podría haber extremos relativos en esos puntos aunque no se anule la derivada. Como $f' < 0$ en $(0,1)$, ahí la función f es estrictamente decreciente, por lo que f tiene un máximo relativo en 0. Análogamente, como $f' > 0$ en $(2,3)$, ahí f es estrictamente creciente, por lo que f tiene un máximo relativo en 3.

¿Qué pasa con los extremos absolutos? El mínimo absoluto de f debe darse en el único punto en que hay un mínimo relativo, es decir, en $x=2$. Por lo tanto el mínimo absoluto de f es $f(2) = -5$. El máximo absoluto puede darse en $x=0$ o en $x=3$. Como $f(0)=3$ y $f(3)=12$, el máximo absoluto es $f(3)=12$.



Ejercicio de parcial

(Ejercicio 6 - segundo parcial primer semestre 2020) Calcular el valor mínimo alcanzado por la función

$$f(x) = x\log(3x) + (1-x)\log(4(1-x))$$

en el intervalo $(0,1)$.

(**A**) $\log(4) - \log(5)$ (**C**) $\log(4) - \log(3)$ (**E**) $\log(12) - \log(7)$

(**B**) $\log(5) - \log(6)$ (**D**) $\log(10) - \log(7)$ (**F**) $\log(15) - \log(8)$

Solución. Notemos que el intervalo $(0,1)$ donde buscamos el valor mínimo alcanzado por la función es un intervalo abierto. Comenzamos calculando la derivada de f. Por la regla del producto y la regla de la cadena, tenemos que

$$f'(x) = \log(3x) - \log(4(1-x))$$

Luego, para encontrar el mínimo alcanzado por la función, buscamos los valores de x donde f tiene un extremo relativo, es decir los valores de x tales que $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \log(3x) - \log(4(1-x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \log(3x) = \log(4(1-x)) \\ &\Leftrightarrow 3x = 4(1-x) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Para ver si f alcanza un mínimo relativo en $x = \frac{4}{7}$ nos interesa conocer el signo de $f''(\frac{4}{7})$. Tenemos que

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1+x}$$

por lo que

$$f''(\frac{4}{7}) = \frac{7}{4} + \frac{7}{3} > 0$$

Dado que $f''(\frac{4}{7}) > 0$, concluímos que f alcanza un mínimo relativo en $x = \frac{4}{7}$ y el valor mínimo alcanzado por la función f en el intervalo $(0,1)$ es

$$f(\frac{4}{7}) = \frac{4}{7}\log(3\cdot\frac{4}{7}) + (1-\frac{4}{7})\log(4(1-\frac{4}{7})) = \log(12) - \log(7)$$

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 2 - Segundo parcial primer semestre 2022) Sea $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-x}(x^2 - x + 1)$. Si M es el máximo de la función y m es el mínimo de la función, entonces:

A) $mM = \frac{1}{e}$

B) $mM = \frac{3}{e^3}$

C) $mM = \frac{3}{e^2}$

D) $mM = 2e$

E) $mM = 3e$

Solución. Notemos que el intervalo $[0,2]$ donde buscamos el máximo y el mínimo alcanzado por la función es un intervalo cerrado. En tal sentido comenzaremos buscando extremos relativos en el intervalo abierto $(0,2)$ y luego estudiaremos lo que ocurre en los extremos del intervalo $[0,2]$, es decir lo que ocurre en 0 y en 2. Para buscar extremos relativos en el intervalo $(0,2)$, comenzamos calculando la derivada de f. Por la regla del producto y la regla de la cadena, obtenemos:

$$f'(x) = e^{-x}(x^2 - x + 1) + e^{-x}(2x - 1) = e^{-x}(-x^2 + 3x - 2)$$

Luego, buscamos los valores de x tales que $f'(x) = 0$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x}(-x^2 + 3x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 3x - 2 = 0 \qquad \text{pues } e^{-x} > 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ o } x = 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f alcanza extremos relativos en $x = 1$ y $z = 2$. Para ver su son máximos o mínimos realtivos estudiamos el signo de f'' en estos puntos. Tenemos que

$$f'(x) = e^{-x}(x^2 - 5x + 5)$$

por lo tanto

$$f''(1) = e^{-1}(1 - 5 + 5) = e^{-1} > 0$$

es decir, f alcanza un mínimo relativo en $x = 1$, y

$$f''(2) = e^{-2}(2^2 - 5 \cdot 2 + 5) = -e^{-1} < 0$$

es decir, f alcanza un máximo relativo en $x = 2$.

¡Cuidado! Dado que estamos buscando los extremos absolutos de f en $[0,2]$ que es un intervalo cerrado, f podría alcanzar un máximo o un mínimo en los extremos del intervalo $[0,2]$ sin que estos sean necesariamente puntos donde se anule la derivda de f. Luego, para encontrar los extemos absolutos de f en $[0,2]$ comparamos el mínimo y el máximo relativos que encontramos a los valores que toma f en 0 y 2:

$$f(0) = 1, \quad f(1) = e^{-1}, \quad f(2) = 3e^{-2}$$

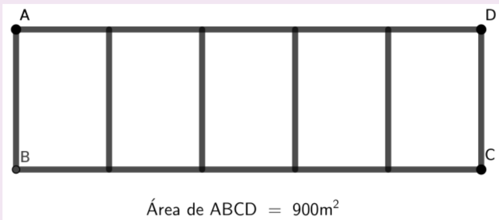
Tenemos que $f(2) = 3e^{-2}$ es un máximo relativo de f pero $f(2) < f(0)$ por lo que $f(2)$ no es el máximo de f en $[0, 2]$. Finalmente,

$$M = 1 \text{ y } m = e^{-1}$$

y, por lo tanto, $Mm = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 11 - segundo parcial primer semestre 2020) Queremos construir cinco corrales idénticos, de acuerdo al plano que se muestra en la figura. Para eso, haremos una cerca de alambre, que incluye el perímetro total (o sea el rectángulo $ABCD$) así como las separaciones entre corrales adyacentes. En otras palabras, la cerca incluye todas las líneas negras en la figura. Queremos que el área total de los cinco corrales sea de $900m^2$. Si queremos minimizar la longitud de la cerca, ¿qué dimensiones debe tener el rectángulo $ABCD$?



A) $12\sqrt{3}m \times 25\sqrt{3}m$

B) $30\sqrt{3}m \times 10\sqrt{3}m$

C) $30m \times 30m$

D) $15m \times 60m$

E) $15\sqrt{2}m \times 30\sqrt{2}m$

F) $18\sqrt{5}m \times 10\sqrt{5}m$

Solución. Le llamamos x a la longitud AB e y a la longitud de BC. Dado que el área de $ABCD$ es de $900m^2$, tenemos que $xy = 900$ y, por lo tanto, $y = \frac{900}{x}$. Por otro lado, la longitud total del cerca es $2y + 6x$. Entonces, queremos minimizar $2y + 6x$ bajo la condición $y = \frac{900}{x}$. Es decir, nos interesa minimizar la función

$$f(x) = 2 \cdot \frac{900}{x} + 6x$$

Comenzamos calculando la derivada de f:

$$f'(x) = -1800 \cdot \frac{1}{x^2} + 6$$

y buscamos los valores de x para los cuales $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -1800 \cdot \frac{1}{x^2} + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow 6x^2 - 1800 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 10\sqrt{3} \ \text{ o } x = -10\sqrt{3} \end{aligned}$$

Notamos que x no puede vales $-10\sqrt{3}$ ya que x es una distancia. Estudiamos, entonces el extremos relativo en $x = 10\sqrt{3}$. Para ver si es un máximo o un mínimo relativo, estudiamos el signo de $f''(10\sqrt{3})$. Tenmos que

$$f''(x) = 1800 \cdot 3x^{-4}$$

por lo que $f''(10\sqrt{3}) = 1800 \cdot 3(10\sqrt{3})^{-4} > 0$, es decir, f alcanza un mínimo en $x = 10\sqrt{3}$. Luego, las dimensiones que debe tener el rectángulo $ABCD$ son:

$$x = 10\sqrt{3}m, \ y = \frac{900}{10\sqrt{3}} = 30\sqrt{3}m$$

Capítulo 6

Teorema fundamental del cálculo y métodos de integración

El Teorema Fundamental del Cálculo es, como su nombre lo indica, el resultado central de este curso. Es, además, el motivo por el cual el *cálculo diferencial* y el *cálculo integral* se consideran un único objeto de estudio, e invariablemente se enseñan juntos.

Observemos que, a priori, la integral y la derivada son objetos totalmente diferentes. La integral es un área, y el problema del cálculo de áreas, y la idea de aproximar las áreas a calcular por la suma de áreas de figuras conocidas, ya aparecen en la matemática de la antigua Grecia. Por otra parte, la derivada es históricamente muy posterior. Surgió alrededor del siglo XVII, como herramienta para hallar extremos y rectas tangentes a curvas, y se incorporó a la mecánica clásica como *tasa de cambio* o *velocidad*.

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice, por lo tanto, algo sorprendente por lo poco intuitivo: que el problema de derivar y el problema de integrar son esencialmente problemas *inversos*.

Para precisar esta idea, daremos la definición siguiente:

Definición 6.0.1. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo I. Una primitiva de f es una función derivable $g : I \to \mathbb{R}$ tal que

$$g' = f.$$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que las funciones continuas siempre tienen primitivas, y que estas primitivas se calculan *integrando*.

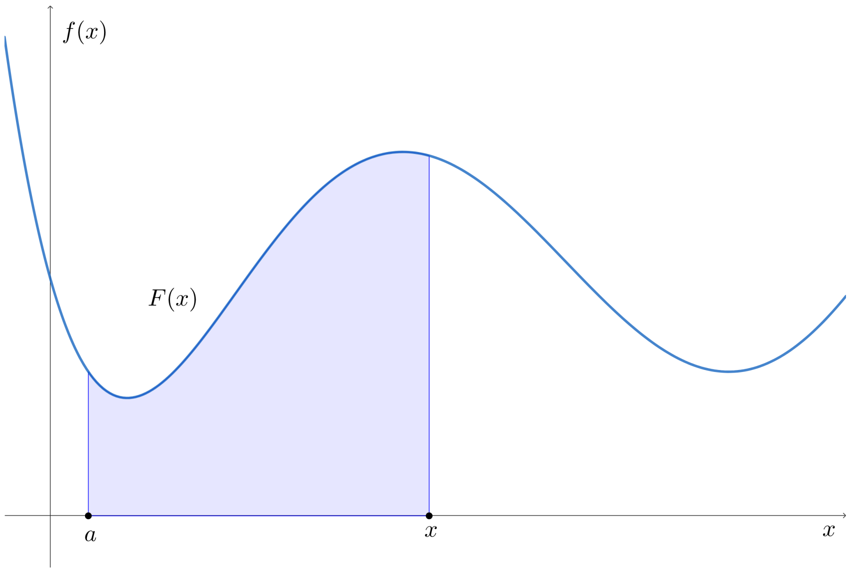
En este capítulo veremos este importante resultado, y una de sus consecuencias más importantes: podemos usar nuestro conocimiento de derivadas para calcular integrales.

6.1. Teorema Fundamental del Cálculo

6.1.1. Teorema Fundamental del Cálculo: enunciado y demostración

Cuando tenemos una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que es integrable, podemos definir una nueva función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por la expresión

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$



La Proposición 4.2.24 del capítulo *Límites y continuidad* de las notas de este curso nos dice que la función F es continua.

Ejercicio 66. Observemos que para definir F es necesario que f sea integrable en $[a, x]$, para todo $x \in [a, b]$. En este ejercicio demostraremos que si f es integrable en $[a, b]$, también es integrable en $[a, x]$ para todo $x \in [a, b]$.

Para esto, fijemos $x \in [a, b]$ y definamos una nueva función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t < x \\ 0 & \text{si } t \geq x \end{cases}$$

1. Sea P una partición de $[a, b]$ que contiene al punto x. Probar que $S^*(g, P) - S_*(g, P) \leq S^*(f, P) - S_*(f, P)$.
2. Probar que, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P de $[a, b]$ tal que $S^*(g, P) - S_*(g, P) < \varepsilon$. Concluir que g es integrable en $[a, b]$.

3. Observar que g es integrable en $[x, b]$, y concluir que es integrable en $[a, x]$.
4. Probar que f es integrable en $[a, x]$.

Ahora veremos que, en los puntos en que f es continua, F es no solo continua sino derivable.

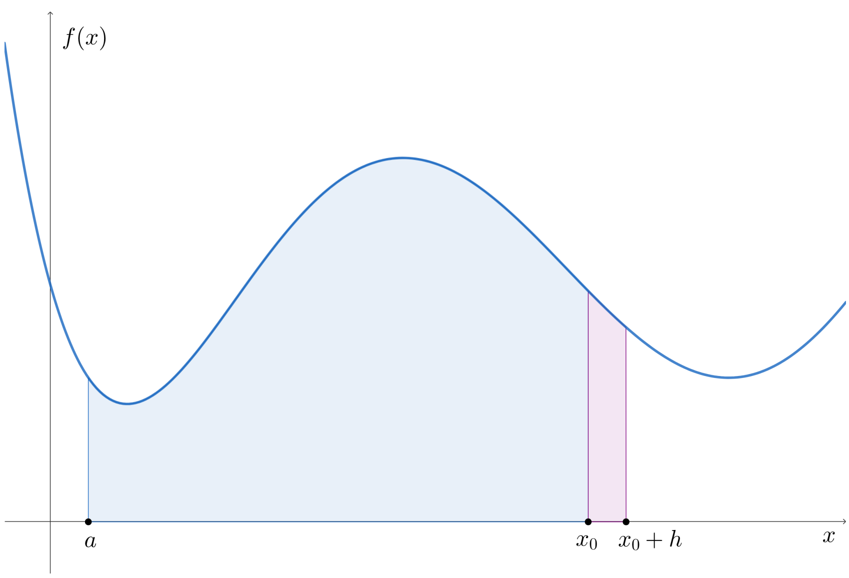
Teorema 6.1.1 (Teorema Fundamental del Cálculo, o TFC)**.** *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función que es integrable en $[a, b]$, y definamos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Si $x_0 \in [a, b]$ es un punto en el que f es continua, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Demostración.

Calcularemos el cociente incremental de F en el punto x_0.



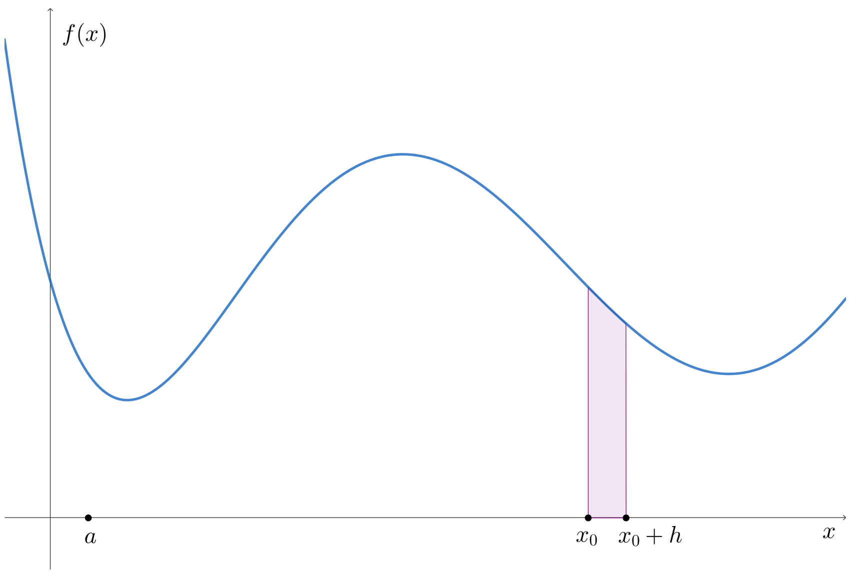
Es

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

En la figura, toda el área pintada es $F(x_0 + h)$ y el área pintada de celeste es $F(x_0)$. La diferencia $F(x_0 + h) - F(x_0)$ es el área rosada.

La derivada es el límite de este cociente incremental, es decir:

$$
\begin{aligned}
F'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)+(f(t)-f(x_0))\,dt \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(x_0)h + \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right) \\
&= f(x_0) + \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt
\end{aligned}
$$



Para ver que $F'(x_0) = f(x_0)$, sólo nos queda probar que

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt = 0. \tag{6.1.2}$$

Como f es continua en x_0, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Entonces, si tomamos h con $|h| < \delta$, tendremos que $|f(t) - f(x_0)|$ es menor que ε para t entre x_0 y $x_0 + h$. Por to tanto, para $|h| < \delta$,

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t)-f(x_0))\,dt\right| \leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt < \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, esto demuestra 6.1.2. $\square$

Observación 6.1.3. *Supongamos ahora que I es un intervalo cualquiera, no necesariamente acotado, que $a \in I$ y que $f : I \to \mathbb{R}$ es integrable en $[a, x]$ o en $[x, a]$, según corresponda, para todo $x \in I$.*

Podemos definir $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Como es usual, cuando $x < a$, esto simplemente quiere decir que $F(x) = -\int_x^a f(t)\, dt$.

En este caso, el TFC también nos dice que si $x_0 \in I$ es un punto de continuidad de f, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Veámoslo.

En efecto, cuando $x_0 \geq a$ podemos tomar $b \in I$ tal que $a \leq x_0 \leq b$ y aplicar el Teorema 6.1.1 a f en $[a, b]$. Cuando $x_0 < a$, podemos tomar $b \in I$ tal que $b \leq x_0 \leq a$ y aplicar el Teorema 6.1.1 a f en $[b, a]$. Nos dice que si $G : [b, a] \to \mathbb{R}$ está dada por $G(x) = \int_b^x f(t)\, dt$, entonces $G'(x_0) = f(x_0)$. Pero

$$G(x) = \int_b^a f(t)\, dt + F(x),$$

y como $\int_a^b f(t)\, dt \in \mathbb{R}$ (es decir, no depende de x), $F'(x_0) = G'(x_0)$.

Corolario 6.1.4. *Sean I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f tiene una primitiva en I.*

El corolario anterior nos dice que las funciones continuas tienen primitiva. Pero... ¿hay funciones que no tengan primitiva? ¿Podremos conocer alguna?
Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Supongamos que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, es decir, que g es derivable y $g' = f$. Como g es derivable, es una función continua. Sumándole a g una constante, no modificamos su derivada y podemos suponer que $g(0) = 0$.
Si $a < 0$, podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange a g en $[a, 0]$, y obtenemos $c \in (a, 0)$ tal que

$$\frac{g(0) - g(a)}{0 - a} = g'(c) = f(c) = 0,$$

por lo que $g(a) = 0$. Es decir, g vale 0 en $(-\infty, 0)$.
Si $b > 0$, podemos aplicar el Teorema del valor medio de Lagrange a g en $[0, b]$, y obtenemos $c \in (0, b)$ tal que

$$\frac{g(b) - g(0)}{b - 0} = g'(c) = f(c) = 1,$$

por lo que $g(b) = b$. Es decir, g es la función identidad en $(0, +\infty)$.
Es decir,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Como g es continua en 0, $g(0) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0$ y

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

¡Pero esta función no puede ser la primitiva de f, porque no es una función derivable! Esto demuestra que f, en realidad, no tiene primitiva.

6.1.2. Primitivas de una función

Tomemos ahora una función continua $f : I \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo I, que puede ser un intervalo acotado o no acotado.

El Teorema Fundamental del Cálculo no nos da solo una primitiva de f. En general, nos da infinitas. Esto es porque si $a, a' \in I$ son dos puntos distintos, las funciones dadas por

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\, dt \quad \text{y} \quad F_{a'}(x) = \int_{a'}^x f(t)\, dt$$

son ambas primitivas de f, y en general no son iguales porque

$$F_a(x) - F_{a'}(x) = \int_a^{a'} f(t)\,dt.$$

Ejemplo 6.1.5. *Dos primitivas de la función identidad.*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x) = x$, las funciones $F_0(x) = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$ y $F_1(x) = \int_1^x t\,dt = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ son dos primitivas diferentes de f.

Cualquier función de la forma $g(x) = \frac{x^2}{2} + k$, con $k \in \mathbb{R}$, será también una primitiva de f.

Volvamos a pensar en una función continua cualquiera f definida en un intervalo I. Como habíamos dicho, el TFC nos da, para cada $a \in I$, una primitiva F_a. Si elegimos otro punto a', obtenemos otra primitiva que difiere de la anterior en una constante.

Aquí surge una pregunta natural: *¿habrá otras primitivas de f, que no se obtengan sumando una constante a F_a?* Como veremos a continuación, la respuesta es *no*.

Proposición 6.1.6. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función. Si g y h son dos primitivas de f, entonces $g - h$ es constante.*

Vamos primero a probar un lema, que es en realidad un caso particular de la Proposición 6.1.6.

Lema 6.1.7. *Si $g : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo I tal que $g' = 0$, entonces g es constante.*

Demostración del Lema 6.1.7.

Sean a y b dos puntos de I; tenemos que probar que $g(a) = g(b)$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b$. Aplicando el Teorema del valor medio de Lagrange a la función g en el intervalo $[a, b]$, tenemos que existe $c \in (a, b)$ para el cual

$$g(b) - g(a) = g'(c)(b - a).$$

Como $g'(c) = 0$, esto nos dice que $g(b) - g(a) = 0$, es decir, que $g(b) = g(a)$.□

Notación

Una notación muy usual es la llamada *notación de Leibniz* para las primitivas, que explicaremos en este recuadro.

Cuando se escribe

$$g(x) = \int f(x)\, dx$$

eso quiere decir "la función g es una primitiva de la función f".

Por ejemplo,

$$\operatorname{sen}(x) = \int \cos(x)\, dx.$$

Observemos que esto no es una igualdad de funciones, porque hay muchas primitvas de f.[a]

Otra notación usual es

$$\int f(x)\, dx = g(x) + C,$$

y eso se lee "la familia de las primitivas de f es el conjunto de las funciones de la forma $g + C$, donde c es una constante".

Por ejemplo,

$$\int \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x) + C.$$

[a]La notación de Leibniz, si bien es muy usual, no es muy "correcta" para los estándares de escritura de la matemática moderna. Normalmente al escribir el signo de igual (=), lo que está a su izquierda es igual a lo que está a su derecha. Por ejemplo, la expresión "$2 + 2 = 4$", que es una igualdad *entre números*, dice que el número $2+2$ es igual al número 4. En particular, si a la izquierda del signo "=" hay un número, a la derecha tiene que haber también un número. Del mismo modo, si a la izquierda del signo "=" hay una función, a la derecha tendría que haber también una función. La notación de Leibniz no debe leerse de este modo.

Demostración de la Proposición 6.1.6:

Como g y h son dos primitivas de f, tenemos que $(g-h)' = g' - h' = f - f = 0$. Por lo tanto, el Lema 6.1.7 nos dice que $g - h$ es constante.□

6.1.3. Derivada de funciones dadas por expresiones integrales

Ejemplo 6.1.8. *Aplicación directa del TFC.*

Consideremos la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

La derivada de F es $F'(x) = x^2 \cos(x^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(x)}$. Ahora consideremos $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_1^x t^2 \cos(t^3 - 1) e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

Su derivada también es $G'(x) = x^2 \cos(x^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(x)}$. De hecho, F y G difieren en una constante, ya que

$$F(x) = \int_0^1 t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt + G(x).$$

Ejemplo 6.1.9.

Ahora consideremos la siguiente modificación del ejemplo anterior. Definamos la función $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$H(x) = \int_x^0 t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

Como $H(x) = -F(x)$, su derivada es $H'(x) = -F'(x) = -x^2 \cos(x^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(x)}$.

Ejemplo 6.1.10. *Función dada por una expresión integral con otros límites de integración.*

Ahora definamos $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$J(x) = \int_0^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

El TFC, por sí mismo, no nos dice que esta función sea derivable ni nos da la derivada de esta función. Sin embargo, observemos que $J(x) = F(x^2)$. Es decir, J es la composición de F y la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$. Por la Regla de la Cadena, J es derivable y su derivada vale

$$J'(x) = F'(g(x))g'(x) = F'(x^2)2x = (x^4 \cos(x^6 - 1)e^{-\operatorname{sen}(x^2)})2x.$$

Ejemplo 6.1.11.

Un último ejemplo antes de ver un resultado general. Tomemos $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$K(x) = \int_{e^{-x}}^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt.$$

Escribimos a esta función como

$$\begin{aligned} K(x) &= \int_0^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt + \int_{e^{-x}}^0 t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt \\ &= \int_0^{x^2} t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt - \int_0^{e^{-x}} t^2 \cos(t^3 - 1)e^{-\operatorname{sen}(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Si tomamos las funciones $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $g(x) = x^2$ y $h(x) = e^{-x}$, la función K nos queda

$$K(x) = F \circ g(x) - F \circ h(x),$$

siendo F, como hasta ahora, la función del Ejemplo 6.1.8.

La derivada de K es, por la Regla de la Cadena y el TFC,

$$\begin{aligned} K'(x) &= F'(g(x))g'(x) - F'(h(x))h'(x) \\ &= (x^4\cos(x^6-1)e^{-\operatorname{sen}(x^2)})2x - (e^{-2x}\cos(e^{-3x-1})e^{-\operatorname{sen}(e^{-2x})})(-e^{-x}). \end{aligned}$$

Proposición 6.1.12. *Sean I y J intervalos, $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y $g, h : J \to I$ funciones derivables. Consideremos la función $K : J \to \mathbb{R}$ dada por*

$$K(x) = \int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt.$$

La función F es derivable y su derivada está dada por

$$K'(x) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Ejercicio 67. Demostrar la Proposición 6.1.12 usando el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena.

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 9 - segundo parcial primer semestre 2020) Consideremos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^{x^2}(e^t+1)dt$. Entonces $F'(2)$ vale:

A) $4e^4+4$ C) $4e^4+2$ E) e^4+1

B) $4e^2+4$ D) $4e^2+2$ F) e^4-1

Solución. Reescribimos la función $F(x)$ como

$$F(x) = g(h(x))$$

donde $g(x) = \int_0^x (e^t+1)dt$ y $h(x) = x^2$. Luego, por la regla de la cadena, tenemos que

$$F'(x) = g'(h(x))h'(x)$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, obtenemos que

$$g'(x) = e^x + 1$$

y, por otro lado,

$$h'(x) = 2x$$

Entonces

$$F'(x) = (e^{x^2}+1)\cdot 2x$$

y, por lo tanto, $F'(2) = (e^4+1)\cdot 4 = 4e^4+4$.

6.2. Métodos de integración

6.2.1. Regla de Barrow

Ahora veremos cómo a partir del Teorema Fundamental del Cálculo surgen los llamados "métodos de integración". Éstos consisten en usar las propiedades de la derivación para calcular primitivas e integrales de funciones continuas. Se basan en una consecuencia sencilla pero importante del TFC, conocida como la Regla de Barrow.

Teorema 6.2.1 (Regla de Barrow)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en un intervalo I, a y b dos puntos de I y $g : I \to \mathbb{R}$ una primitiva de f. Entonces*

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a).$$

Demostración de la Regla de Barrow:

Consideremos la función $F : I \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$. Entonces, por definición, $\int_a^b f(t)\, dt = F(b)$. Como $F(a) = 0$,

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

Las funciones F y g son dos primitivas de f, y de acuerdo a la Proposición 6.1.6, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = g(x) + k$, para todo $x \in I$. Entonces $F(b) - F(a) = g(b) + k - g(a) - k = g(b) - g(a)$, y por lo tanto

$$\int_a^b f(t)\, dt = g(b) - g(a). \ \square$$

Notación

$$g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Ejemplo 6.2.2.

Como la derivada de la función seno es la función coseno, tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx = \operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1.$$

6.2.2. Integración por partes

El primer método de integración que veremos es el *método de integración por partes*. Viene de una propiedad importante de las derivadas que ya conocemos, la *fórmula de la derivada del producto*, que nos dice que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Teorema 6.2.3 (Integración por partes)**.** *Sean f y g dos funciones definidas en un intervalo I, derivables y con derivadas continuas. Entonces:*

1. $\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,dt$
2. $\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$

Observemos que este teorema nos dice dos cosas: cómo calcular la *integral* de $f'g$ en un intervalo y cómo calcular una *primitiva* de la función $f'g$.

Observación 6.2.4. *Recordemos cómo se usa la notación $\int h(x)\,dx$. Cuando escribimos $H(x) = \int h(x)\,dx$, estamos diciendo que H es una primitiva de h. Equivalentemente, que $H' = h$.*

Demostración del Teorema 6.2.3:

Sabemos que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_a^b (fg)'(x)\,dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\ &= \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x))\,dx.\end{aligned}$$

Usando la Regla de Barrow, sabemos que $\int_a^b (fg)'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b$, por lo que

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)\,dx, \tag{6.2.5}$$

que es lo que dice *1*.

Como esto es cierto para $a, b \in I$ cualesquiera, vamos a reescribir la ecuación (6.2.5) cambiando la notación ligeramente:

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt + \int_a^x f(t)g'(t)\,dt, \tag{6.2.6}$$

es decir,

$$\int_a^x f'(t)g(t)\,dt = f(x)g(x) - \int_a^x f(t)g'(t)\,dt - f(a)g(a). \tag{6.2.7}$$

Por el TFC, la expresión $F(x) = \int_a^x f'(t)g(t)\,dt$ da una primitiva de $f'g$ y la expresión $G(x) = \int_a^x f(t)g'(t)\,dt$ da una primitiva de fg'. Como $f(a)g(a)$ es una constante, $G(x) + f(a)g(a)$ también es una primitiva de fg'. Por lo tanto, la ecuación 6.2.7 dice que la resta de fg y una primitiva de fg' es una primitiva de $f'g$, es decir,

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx. \ \square$$

Veamos ahora algunos ejemplos de uso de la integración por partes.

Ejemplo 6.2.8. $\int_0^1 xe^x\,dx$.

Para calcular $\int_0^1 xe^x\,dx$, aplicaremos el Teorema 6.2.3 a las funciones f y g dadas por $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$. Observemos que $f'(x)g(x) = e^x x$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 f'(x)g(x)\,dx \\
&= f(x)g(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \\
&= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx \\
&= xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx$.

Tomaremos $f(x) = g(x) = \mathrm{sen}(x)$, con lo cual $f'(x)g(x) = \cos(x)\mathrm{sen}(x)$. Tenemos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx = \mathrm{sen}^2(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{sen}(x)\cos(x)\,dx.$$

¡Llegamos a la misma integral que al principio! Pero de esta igualdad, podemos despejarla, y obtenemos

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx = \mathrm{sen}^2(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1,$$

por lo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Ejemplo 6.2.10. $\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx$.

Este ejemplo es similar al anterior, pero en vez de calcular una integral vamos a hallar *una* primitiva de la función $\operatorname{sen}^2(x)$. Cualquier otra primitiva se puede obtener a partir de ésta sumando una constante.

Tomaremos $f(x) = -\cos(x)$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx &= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \int \cos^2(x)\,dx \\
&= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + \int (1-\operatorname{sen}^2(x))\,dx \\
&= -\cos(x)\operatorname{sen}(x) + x - \int \operatorname{sen}^2(x)\,dx
\end{aligned}$$

Nuevamente podemos despejar, obteniendo

$$\int \operatorname{sen}^2(x)\,dx = \frac{x-\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{2}.$$

Ejercicio 68. Hallar una primitiva de $\cos^2(x)$, y calcular $\int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx$.

Ejemplo 6.2.11. *Primitiva del logaritmo.*

Definimos $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$. Por el TFC, sabemos que la derivada de $\log(x)$ es $\frac{1}{x}$. Ahora calcularemos una primitiva de $\log(x)$. Para esto, aplicaremos el Teorema 6.2.3 a las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \log(x)$.

$$\begin{aligned}
\int \log(x)\,dx &= \int 1\cdot\log(x)\,dx \\
&= x\log(x) - \int x\frac{1}{x}\,dx \\
&= x\log(x) - \int 1\,dx = x(\log(x)-1).
\end{aligned}$$

Ejercicio de examen

(Ejercicio 7 - examen diciembre 2023) Calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx$$

A) $\frac{1}{10}(3e^{\frac{3\pi}{2}}+1)$ C) $\frac{1}{4}(3e^{\frac{3\pi}{2}}+1)$ E) $\frac{1}{10}(e^{\frac{\pi}{2}}+1)$

B) $\frac{1}{10}(3e^{-\frac{3\pi}{2}}-1)$ D) $\frac{1}{4}(3e^{-\frac{3\pi}{2}}-1)$ F) $\frac{1}{10}(e^{-\frac{\pi}{2}}-1)$

Solución. Usamos el método de integración por partes para encontrar una primitiva de $\operatorname{sen}(x)e^{3x}$. Tomando $f(x) = e^{3x}$ y $g(x) = -\cos(x)$ obtenemos

$$\int \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx = -e^{3x}\cos(x) \underbrace{- \int -3e^{3x}\cos(x)dx}_{3\int e^{3x}\cos(x)dx}$$

Aplicamos partes a $\int e^{3x}\cos(x)dx$ tomando $f(x) = e^3x$ y $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ y obtenemos

$$\int e^{3x}\cos(x)dx = e^{3x}\operatorname{sen}(x) - \int 3e^{3x}\operatorname{sen}(x)dx$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx &= -e^{3x}\cos(x) + 3\left(e^{3x}\operatorname{sen}(x) - 3\int \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx\right)\\ &= e^{3x}(-\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x)) - 9\int \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$10\int \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx = e^{3x}(-\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x))$$

es decir,

$$\int \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx = \frac{1}{10}e^{3x}(-\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x))$$

Finalmente, por la regla de Barrow,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x)e^{3x}dx &= \frac{1}{10}e^{3x}(-\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x))\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{1}{10}e^{\frac{3\pi}{2}}(\underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{0} + 3\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{1}) - \frac{1}{10}e^0((\underbrace{-\cos(0)}_{1} + 3\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{0}))\\ &= \frac{1}{10}(3e^{\frac{3\pi}{2}} + 1)\end{aligned}$$

6.2.3. Integración por sustitución o cambio de variable

El segundo método de integración que veremos es el *método de integración por sustitución* o *cambio de variable*. Viene de una propiedad importante de las derivadas que ya conocemos, la *regla de la cadena*, que nos dice que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Teorema 6.2.12 (Cambio de variable)**.** *Sean $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), y f una función que es continua en el intervalo cerrado delimitado por $g(a)$ y $g(b)$.*[a] *Entonces*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b (f \circ g(x))g'(x)\,dx.$$

[a]Es decir, el intervalo $[g(a), g(b)]$ o $[g(b), g(a)]$, según si $g(a) \leq g(b)$ o $g(a) > g(b)$.

Demostración del Teorema 6.2.12:

Sea I el intervalo cerrado delimitado por $g(a)$ y $g(b)$. Como f es continua en I, tiene una primitiva que llamaremos F. Entonces, por la regla de Barrow,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F \circ g(b) - F \circ g(a).$$

Por otro lado, la regla de la cadena nos dice que

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = (f \circ g(x))g'(x)$$

para $x \in I$. Usando nuevamente la regla de Barrow tenemos que

$$\int_a^b (f \circ g(x))g'(x)\,dx = F \circ g(b) - F \circ g(a). \ \square$$

Veamos ahora algunos ejemplos del uso de este resultado.

Ejemplo 6.2.13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx.$

Esta integral ya fue calculada en el Ejemplo 6.2.9 usando el método de integración por partes, por lo que ya sabemos que vale $\frac{1}{2}$.

Para aplicar el teorema de cambio de variable, tomemos $g : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \mathrm{sen}(x)$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Entonces $f \circ g(x) = g(x) = \mathrm{sen}(x)$. Como $g'(x) = \cos(x)$, la función que queremos integrar es $(f \circ g)g'$. El Teorema 6.2.12 nos dice que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}(x)\,dx$ es igual a

$$\int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x)\,dx,$$

es decir, a

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 6.2.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\mathrm{sen}^n(x)\,dx,$ *donde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.*

Aquí nuevamente podemos tomar $g(x) = \text{sen}(x)$, cuya derivada es $g'(x) = \cos(x)$. Como ahora en el integrando $\text{sen}(x)$ aparece elevado a la potencia n, tomaremos $f(x) = x^n$. La función que queremos integrar es por lo tanto $(f \circ g)g'$.

Por el teorema de cambio de variable, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\text{sen}^n(x)\, dx$ es igual a

$$\int_{g(0)}^{g(\pi/2)} f(x)\, dx,$$

es decir, a

$$\int_0^1 x^n\, dx = \frac{1}{n+1}.$$

Ejemplo 6.2.15. *Primitiva de* $h(x) = \cos(x)\text{sen}^3(x)$.

Tomemos la función del ejemplo anterior en el caso particular en que $n = 3$. Si en vez de querer hallar su integral en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ queremos hallar una primitiva, podemos calcular $F(x) = \int_0^x h(t)\, dt$ (o en realidad $\int_a^x h(t)\, dt$ para cualquier valor de a).

Eligiendo $f(x) = x^3$ y $g(x) = \text{sen}(x)$, tenemos que

$$F(x) = \int_0^x \cos(t)\text{sen}^3(t)\, dt = \int_{g(0)}^{g(x)} t^3\, dt = \int_0^{\text{sen}(x)} t^3\, dt.$$

Es decir,

$$F(x) = \frac{\text{sen}^4(x)}{4}.$$

Ejercicio 69. Verificar, derivando, que F efectivamente es una primitiva de la función h.

Ejemplo 6.2.16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\text{sen}(x)}\, dx$.

Para calcular esta integral tomaremos de nuevo $g(x) = \text{sen}(x)$, y la función f será $f(x) = e^x$. La integral que queremos calcular, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\text{sen}(x)}\, dx$, queda en este caso igual a

$$\int_0^1 e^x\, dx = e - 1.$$

Notación

Los ejemplos anteriores tienen en común que en el integrando aparece una expresión que depende de $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ (que es $\operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{sen}^n(x)$ o $e^{\operatorname{sen}(x)}$) multiplicada por $g'(x) = \cos(x)$. Sin importar cuál sea la función continua f y cuáles sean los límites de integración a y b,

$$\int_a^b \cos(x) f(\operatorname{sen}(x))\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx.$$

Por este motivo, al aplicar el teorema de cambio de variable suele utilizarse una notación diferente a la presentada en estos ejemplos. Solemos decir que la *nueva variable* es $u = \operatorname{sen}(x)$, y que $du = \cos(x)\, dx$. Entonces escribimos

$$\int_a^b \cos(x) f(\operatorname{sen}(x))\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du.$$

La expresión $du = \cos(x)\, dx$ es solamente una notación, pero es muy útil para recordar que al hacer el cambio de variable que consiste en cambiar $\operatorname{sen}(x)$ por u, no podemos simplemente cambiar dx por du.

Ejemplo 6.2.17. $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Para aplicar el teorema de cambio de variable, busquemos una nueva variable u (correspondiente a $u = g(x)$) de modo que du (es decir, $g'(x)dx$) aparezca también en el integrando.

Si tomáramos $u = \sqrt{x}$, tendríamos $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$. Modifiquemos ligeramente el aspecto de nuestra integral:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx.$$

Ahora sí estamos en condiciones de hacer el cambio de variable $u = \sqrt{x}$. ¡Recordemos que hay que cambiar los límites de integración! Cuando $x = 1$, $u = 1$ y cuando $x = 4$, $u = 2$. Por lo tanto

$$2\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\, dx = 2\int_1^2 e^u\, du = 2(e^2 - e).$$

Ejemplo 6.2.18. *Cálculo de una primitiva de* $h(x) = \frac{\cos(log(1+x))}{1+x}$.

Calcularemos $F(x) = \int_0^x \frac{\cos(\log(1+t))}{1+t}\, dt$, que está definida para $x \in (-1, +\infty)$ y es una primitiva de h. Haremos el cambio de variable $u = \log(1+t)$, para el cual $du = \frac{1}{1+t}dt$. Con este cambio de variable,

$$F(x) = \int_0^{\log(1+x)} \cos(u)\, du = \operatorname{sen}(u)\Big|_0^{\log(1+x)} = \operatorname{sen}(\log(1+x)).$$

Ejemplo 6.2.19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(2x)\,dx$.

Para resolver esta integral aplicaremos los dos métodos de integración que hemos visto hasta el momento: integración por partes y cambio de variable.

Primero haremos el cambio $u = 2x$. Como $du = 2dx$, reescribimos la integral que queremos calcular como

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^{2x}\cos(2x)\,dx,$$

que tras el cambio de variable queda

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{u}\cos(u)\,du.$$

Integremos ahora por partes, primitivizando el coseno y derivando la exponencial:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{u}\cos(u)\,du &= e^{u}\mathrm{sen}(u)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{u}\mathrm{sen}(u)\,du\\ &= -\int_0^{\pi} e^{u}\mathrm{sen}(u)\,du.\end{aligned}$$

Haciendo partes nuevamente, primitivizando el seno y derivando la exponencial, tenemos que esto es igual a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} e^{u}(-\mathrm{sen}(u))\,du &= e^{u}cos(u)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{u}\cos(u)\,du\\ &= -e^{\pi} - 1 - \int_0^{\pi} e^{u}\cos(u)\,du.\end{aligned}$$

De las dos ecuaciones anteriores podemos despejar

$$\int_0^{\pi} e^{u}\cos(u)\,du = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1),$$

por lo que

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^{u}\cos(u)\,du = -\frac{1}{4}(e^{\pi}+1).$$

Hasta ahora hemos visto ejemplos en los que la función $u = g(x)$ aparece explícitamente en el integrando. Sin embargo, el teorema de cambio de variable puede ser aplicado, con cierta astucia, en otros casos.

Ejemplo 6.2.20. *Área del círculo.*

Calcularemos $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx$, que es el área del semicírculo de radio 1. ¡Nos debería dar $\frac{\pi}{2}$! Haremos un pequeño cambio cosmético, que es cambiar el nombre de la variable de integración de x a u. Entonces, la integral queda:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, du.$$

Si u fuera $\operatorname{sen}(x)$, tendríamos que $\sqrt{1-u^2} = \cos(x)$. Intentemos hacer este cambio de variable. Para ello, debemos tener en cuenta que $du = \cos(x)dx$. Entonces,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, du = \int_{a}^{b} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)\, dx,$$

para límites de integración a y b elegidos apropiadamente. Éstos deben cumplir que $\operatorname{sen}(a) = -1$ y $\operatorname{sen}(b) = 1$, así que podemos tomar $a = -\frac{\pi}{2}$ y $b = \frac{\pi}{2}$.

La integral que queremos calcular queda

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-u^2}\, du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\, dx.$$

Ejercicio 70. Calcular esta integral usando el método de integración por partes, verificando así que efectivamente da $\frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 71. El *coseno hiperbólico* y el *seno hiperbólico* son las funciones definidas por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Probar que:

- $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$.
- $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$.
- $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$.
- $\operatorname{senh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es biyectiva.

La función inversa de senh se llama arcsenh, que se lee *arcosenohiperbólico.*

Ejemplo 6.2.21. *Primitiva de* $\sqrt{1+x^2}$.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1+x^2}$. De acuerdo al TFC, una primitiva de f está dada por

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt.$$

Para hallar F, haremos el cambio de variable $t = \operatorname{senh}(u)$, con lo que $dt = \cosh(u)du$. Al hacer este cambio de variable, los límites de integración cambiarán. En vez de ser 0 y x serán $\operatorname{arcsenh}(0) = 0$ y $\operatorname{arcsenh}(x)$. Usaremos en los siguientes cálculos las propiedades de cosh y senh que constituyen el enunciado del ejercicio anterior.

Entonces

$$\begin{aligned} \int_0^x \sqrt{1+t^2}\, dt &= \int_0^{\operatorname{arcsenh}(x)} \sqrt{1+\operatorname{senh}^2(u)}\cosh(u)\, du \\ &= \int_0^{\operatorname{arcsenh}(x)} \cosh^2(u)\, du \end{aligned}$$

Integrando por partes, o usando la fórmula de cosh, esta integral es igual a

$$\frac{1}{2}(\operatorname{senh}(u)\cosh(u) + u)\Big|_0^{\operatorname{arcsenh}(x)},$$

y tras evaluar obtenemos

$$F(x) = \frac{x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arcsenh}(x)}{2}.$$

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 3 - segundo parcial primer semestre 2020) Calcular

$$\int_0^1 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x^3}}dx$$

A) $\frac{8e-8}{3}$ C) $\frac{14e-14}{3}$ E) $\frac{15e-15}{4}$

B) $\frac{10e-10}{3}$ D) $3e-3$ F) $\frac{21e-21}{4}$

Solución. Comenzamos reescribiendo

$$\int_0^1 4\sqrt{x}e^{\sqrt{x^3}}dx = \int_0^1 4x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{3}{2}}}dx$$

Luego, consideramos el cambio de variable $u = x^{\frac{3}{2}}$, para el cual $du = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, y obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 4x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{3}{2}}}\,dx &= \int_0^1 4\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \\
&= \frac{8}{3}\int_0^1 \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}e^{x^{\frac{3}{2}}}\,dx \\
&= \frac{8}{3}\int_0^1 e^u du \qquad \text{cuando } x=1,\ u=1 \text{ y cuando } x=0,\ u=0 \\
&= \frac{8}{3}e^u\Big|_0^1 \\
&= \frac{8}{3}(e-1) \\
&= \frac{8e-8}{3}
\end{aligned}$$

6.2.4. Integración de funciones racionales

Una *función racional* es una función dada por un cociente de funciones polinómicas, es decir, una función de la forma

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios. Hay un método general que permite hallar sus primitivas. Esto es lo que veremos en esta sección.

Comenzaremos recordando algunas propiedades de los polinomios a coeficientes reales. Llamaremos $\mathbb{R}[x]$ al conjunto de los polinomios a coeficientes reales, es decir, a las expresiones de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^x,$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Si $a_n \neq 0$ decimos que p tiene *grado* n. Los números reales $a_0, \ldots, a_n$ son los *coeficientes* de p.

Siempre que hablemos de un *polinomio* éste tendrá coeficientes reales. Es decir, siempre estaremos hablando de un elemento de $\mathbb{R}[x]$.

División de polinomios

Si p y q son polinomios, existen polinomios c y r tales que

$$p = cq + r,$$

y el grado de r es menor al grado de q. Al expresar p de este modo, decimos que dividimos a p entre q. El polinomio p se llama el dividendo, q es el divisor, c es el cociente y r es el resto.

Observemos que si el grado de p es menor al de q, quedan $c = 0$ y $r = p$. Por lo tanto la división solo resulta interesante si el grado del dividendo es mayor al del divisor.

Por ejemplo, si $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1$ y $q(x) = x^3 - x$, tenemos que

$$p(x) = (x^2 + x + 3)q(x) + x^2 - x + 1.$$

En este caso $c(x) = x^2 + x + 3$ y $r(x) = x^2 - x + 1$.[1]

Descomposición de polinomios como producto de polinomios irreducibles

Un polinomio de grado n es *irreducible* si no puede descomponerse como producto de polinomios de grado menor. Los polinomios de grado 1 son irreducibles, y hay polinomios irreducibles de grado 2, como por ejemplo $x^2 + 1$.

En $\mathbb{R}[x]$, no hay polinomios irreducibles de grado mayor que 2.

Todo polinomio de grado $n \geq 1$, puede descomponerse como producto de polinomios irreducibles.

Por ejemplo, el polinomio

$$p(x) = x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$$

se descompone como

$$p(x) = (x - 1)(x + 2)(x^2 + 1).$$

El polinomio

$$q(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2$$

[1] Si no recuerdan cómo dividir polinomios, pueden por supuesto recurrir a *youtube*. Sin embargo, es un ejercicio provechoso recordar cómo es la división entera y tratar de hacer un razonamiento similar con los polinomios. Es decir, recordando lo que quiere decir

$$\begin{array}{r|l} 1538 & \underline{23} \\ 20 & 66 \end{array}$$

pueden plantear

$$x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1 \;\lfloor\underline{x^3 - x}$$

e intentar hacer este cálculo guiados por su intuición.

es
$$q(x) = (x-1)^2(x+2)(x^2+1).$$

Observemos que q tiene los mismos factores irreducibles que p, pero en q el factor $x-1$ aparece dos veces.

El objetivo de esta sección es integrar *funciones racionales*, es decir, funciones que son cocientes de funciones polinómicas. Antes de integrarlas, es conveniente expresarlas de la forma más simple posible.

Por ejemplo, la función racional
$$R_0(x) = \frac{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2}{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}$$
es el cociente $\frac{q(x)}{p(x)}$, donde p y q son los polinomios que acabamos de descomponer en factores irreducibles. Por lo tanto
$$R_0(x) = \frac{(x-1)^2(x+2)(x^2+1)}{(x-1)(x+2)(x^2+1)} = x - 1.$$
Si tomamos ahora $\frac{p(x)}{q(x)}$, obtenemos
$$R_1(x) = \frac{x^4 + x^3 - x^2 + x - 2}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{x-1}.$$
Ambas son funciones que sabemos integrar, cuando las escribimos en la forma apropiada.

Ejemplo 6.2.22. *Función racional con numerador de mayor grado que el denominador.*

Si
$$R(x) = \frac{x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{x^3 - x},$$
el numerador de R es $p(x) = x^5 + x^4 + 2x^3 - 4x + 1$ y el denominador es $q(x) = x^3 - x$. Como el grado de p es mayor que el de q, es conveniente dividir p entre q, lo que nos da
$$p(x) = (x^2 + x + 3)q(x) + x^2 - x + 1.$$
Ahora podemos expresar R como
$$R(x) = \frac{(x^2 + x + 3)(x^3 - x) + x^2 - x + 1}{x^3 - x} = x^2 + x + 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - x},$$
que es la suma de un polinomio y una función racional de grado más pequeño.

Si además descomponemos q en sus factores irreducibles, vemos que
$$R(x) = x^2 + x + 3 + \frac{x^2 - x + 1}{x(x+1)(x-1)}.$$
Enseguida veremos por qué esto es útil, pero primero registremos esta observación:

Observación 6.2.23. *Si* $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *es una función racional y el grado de* p *es mayor o igual al grado de* q*, dividiendo* p *entre* q *podemos reescribir* R *como*

$$R(x) = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

donde c *y* r *son polinomios y el grado de* r *es menor que el de* q*.*

Por lo tanto, para integrar funciones racionales es suficiente saber integrar funciones para las cuales el numerador tiene grado menor que el denominador.

Teorema 6.2.24 (Descomposición en fracciones simples)**.** *Sean* p *y* q *polinomios de coeficientes reales tales que el grado de* p *es menor que el de* q*. Consideremos la descomposición de* q *en factores irreducibles,*

$$q(x) = r_1(x)^{n_1} \cdots r_t^{n_t} s_1^{m_1} \cdots s_u^{m_u},$$

donde $r_1, \ldots, r_t$ *son los factores irreducibles de grado 1 y* $s_1, \ldots, s_u$ *son los factores irreducibles de grado 2. Entonces, la función racional*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

se descompone en $n_1 + \cdots + n_t + m_1 + \cdots + m_u$ *sumandos, que son de la forma*

$$\frac{a}{r_i(x)^k},$$

donde $a \in \mathbb{R}$ *y* $1 \leq k \leq n_i$*, o de la forma*

$$\frac{bx + c}{s_i(x)^k},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ *y* $1 \leq k \leq m_i$*.*

Veamos qué quiere decir esto en la práctica.

Ejemplo 6.2.25. *Denominador* $q(x) = (x+2)(x-1)(x-5)$*.*

El denominador se descompone como producto de polinomios irreducibles de grado 1, y ningún factor está repetido. En este caso,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{(x+5)},$$

donde a_1, a_2 y a_3 son números reales que dependen, por supuesto, de quién sea p.

Ejemplo 6.2.26. *Denominador* $q(x) = (x+2)(x-1)(x-5)^3$.

En este caso, el denominador se descompone como producto de polinomios irreducibles de grado 1, y el tercer factor aparece tres veces. Esto se verá reflejado en la descomposición en fracciones simples de la forma siguiente:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x+2} + \frac{a_2}{x-1} + \frac{a_3}{(x+5)} + \frac{a_4}{(x+5)^2} + \frac{a_5}{(x+5)^3},$$

donde $a_1, \dots, a_5$ son números reales que dependen, por supuesto, de quién sea p.

Ejemplo 6.2.27. *Denominador* $q(x) = (x+3)(x^2+1)$.

En este caso, en la descomposición en fracciones simples hay dos sumandos, uno por cada factor irreducible de q. Tiene la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a}{x+3} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

Ejemplo 6.2.28. *Denominador* $q(x) = (x+3)^2(x^2+1)^3$.

Este polinomio tiene los mismos factores irreducibles que el del ejemplo anterior, pero cada uno aparece varias veces. En la descomposición en fracciones simples de $\frac{p(x)}{q(x)}$ hay ahora 5 sumandos:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x+3} + \frac{a_2}{(x+3)^2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+1)^2} + \frac{b_3x+c_3}{(x^2+1)^3}.$$

El objetivo de este curso no es aprender a integrar todos los sumandos que pueden aparecer en la descomposición en fracciones simples. Esto puede hacerse, y hay métodos generales que permiten hacerlo en todos los casos. Por lo tanto, si tuviéramos que integrar una función racional *cualquiera*, podríamos hacerlo[2], siempre y cuando lográramos descomponer su denominador como producto de polinomos irreducibles[3].

Volvamos al Ejemplo 6.2.27, donde la descomposición en fracciones simples que se obtiene nos queda así:

$$\frac{a}{x+3} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$

[2]Es laborioso pero fácil.

[3]¡Esto no siempre es fácil!

Esta función es

$$a\frac{1}{x+3} + b\frac{x}{x^2+1} + c\frac{1}{x^2+1},$$

donde, recordemos, a, b y c son números reales.

Por lo tanto, para integrarla, alcanza con conocer:

- Una primitiva de $\frac{1}{x+3}$.
- Una primitiva de $\frac{x}{x^2+1}$.
- Una primitiva de $\frac{1}{x^2+1}$.

Ejercicio 72.
- Una primitiva de $\frac{1}{x+3}$ es $\log(x+3)$. Se obtiene aplicando el teorema de cambio de variable, tomando como nueva variable $u = x + 3$.
- Una primitiva de $\frac{x}{x^2+1}$ es $\frac{1}{2}\log(x^2+1)$. Se obtiene aplicando el teorema de cambio de variable, tomando como nueva variable $u = x^2 + 1$.
- Una primitiva de $\frac{1}{x^2+1}$ es la función arcotangente. Se obtiene a partir del teorema de la función inversa, aplicándolo a la función tan.

Ejemplo 6.2.29. *Primitiva de* $\frac{1}{x^2-2x+5}$.

El polinomio $q(x) = x^2 - 2x + 5$ es irreducible. Sabemos esto porque, si pudiera ser descompuesto como $(x-a)(x-b)$, a y b serían raíces de q, y q no tiene raíces reales.

¿Cómo podemos calcular una primitiva de $\frac{1}{q(x)}$? Conocemos la primitiva de $\frac{1}{x^2+1}$ que es $\arctan(x)$, y haremos manipulaciones algebraicas sobre la expresión $\frac{1}{q(x)}$ para llevarla a algo de este tipo.

Recordemos que, para $\alpha \in \mathbb{R}$, $(x+\alpha)^2 = x^2 + 2\alpha x + \alpha^2$. Entonces los dos primeros sumandos de $q(x)$, que son

$$x^2 - 2x,$$

forman parte de un cuadrado de binomio de este tipo. Es decir,

$$x^2 - 2x + \_\_\_ = (x+\alpha)^2,$$

si elegimos α y completamos el espacio en blanco adecuadamente. Como 2α debe ser igual a -2, $\alpha = -1$, y la igualdad anterior es

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

Entonces

$$q(x) = x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4.$$

Lo que *sabemos* integrar es $\frac{1}{x^2+1}$. Lo que *queremos* integrar es $\frac{1}{(x-1)^2+4}$. Estas expresiones se empiezan a parecer...

Si además, en $q(x)$, sacamos 4 de factor común, tenemos que

$$q(x) = 4\left(\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

y por lo tanto $\frac{1}{q(x)}$ nos queda

$$\frac{1}{(x-1)^2+4} = \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}.$$

Esto ya se parece bastante a $\frac{1}{x^2+1}$, ¿no?

Calculemos

$$\int \frac{1}{4}\frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx.$$

Haciendo el cambio de variable $u = \frac{x-1}{2}$, tenemos que $du = \frac{1}{2}$ y la primitiva que estamos calculando es

$$\int \frac{1}{2}\frac{1}{u^2+1}\,du,$$

que es $\frac{1}{2}\arctan(u)$. No olvidemos deshacer el cambio de variable. Hemos llegado a que

$$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

¿Será posible hacer esto mismo para una función racional de la forma $\frac{1}{q(x)}$, donde q es cualquier polinomio irreducible de grado 2? Sí, por supuesto que sí.[4]

[4]Nos alcanza con hacerlo para los polinomios *mónicos*, es decir, cuyo coeficiente principal es 1.

Ejercicio 73. Tomemos un polinomio $q(x) = x^2 + bx + c$ sin raíces reales, es decir, tal que $b^2 - 4c < 0$.

1. Completar cuadrados: hallar α y β reales tales que
$$q(x) = (x - \alpha)^2 + \beta.$$
Verificar que $\beta > 0$.[a]

2. Sacando β de factor común, podemos escribir
$$q(x) = \beta\left(\left(\frac{x-\alpha}{\sqrt{\beta}}\right)^2 + 1\right).$$
Hallar una primitiva de $\frac{1}{q(x)}$ haciendo un cambio de variable apropiado.

[a]Queda $\alpha = \frac{b}{2}$ y $\beta = c - \alpha^2$.

Hasta ahora, hemos visto cómo el teorema de descomposición en fracciones simples nos permite escribir una función racional como em suma de términos que sabemos integrar y términos que aprenderíamos a integrar, si tuviéramos que hacerlo.[5] Pero...¿cómo encontramos la descomposición en fracciones simples? Lo veremos en algunos ejemplos.

Ejemplo 6.2.30.
$$R(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)}$$

Buscamos números A y B tales que
$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}. \tag{6.2.31}$$
Hagamos denominador común en la expresión de la derecha. La ecuación (6.2.31) queda
$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A(x-1) + B(x+2)}{(x+2)(x-1)}. \tag{6.2.32}$$
Para que se cumpla, como las funciones racionales a la izquierda y a la derecha de (6.2.32) tienen el mismo denominador, alcanza con que
$$1 = A(x-1) + B(x+2) = (A+B)x + (2B - A). \tag{6.2.33}$$
Observemos que esta igualdad tiene que cumplirse para todos los $x \in \mathbb{R}$, es decir, la función polinómica dada por $(A+B)x + (2B - A)$ tiene que ser constante igual a 1. Por lo tanto,

[5]Como por ejemplo, $\frac{1}{(x^2-2x+5)^2}$.

el término lineal tiene que tener coeficiente 0 y el término independiente tiene que valer 1. Hallamos A y B resolviendo el sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ -A+2B &= 1, \end{aligned}$$

y obtenemos $A=-1/3$, $B=1/3$. Es decir,

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)} = \frac{-1/3}{x+2} + \frac{1/3}{x-1}.$$

Ejemplo 6.2.34.

$$R(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)(x-5)}$$

Buscamos números A, B y C tales que

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}. \tag{6.2.35}$$

Hagamos denominador común en la expresión de la derecha. La ecuación (6.2.35) queda

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A(x-1)(x-5)+B(x+2)(x-5)+C(x+2)(x-1)}{(x+2)(x-1)(x-5)}. \tag{6.2.36}$$

Al igual que en el ejemplo anterior, para hallar A, B y C igualamos los numeradores, obteniendo

$$1 = (A+B+C)x^2 + (-6A-3B+C)x + (5A-10B-2C). \tag{6.2.37}$$

A, B y C se obtienen como solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ -6A-3B+C &= 0 \\ 5A-10B-2C &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2.38.

$$R(x) = \frac{2x+3}{(x+2)(x-1)(x+5)}$$

Queremos hallar A, B y C tales que

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x-1)(x-5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-5}.$$

Haciendo denominador común en la expresión de la derecha e igualando los numeradores que nos quedan, obtenemos

$$2x+3 = (A+B+C)x^2 + (-6A-3B+C)x + (5A-10B-2C).$$

Por lo tanto, A, B y C se obtienen como solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -6A - 3B + C &= 2 \\ 5A - 10B - 2C &= 3 \end{aligned}$$

Método de la tapadita

Hay un "método"para hallar rápidamente los coeficientes que aparecen en la descomposición en fracciones simples. Para entenderlo, miremos la ecuación (6.2.31), que es una igualdad de funciones racionales. Si multiplicamos a ambos lados por $(x-1)$, obtenemos

$$\frac{1}{x+2} = \frac{A(x-1)}{x+2} + B.$$

Cuando evaluamos esto en $x = 1$, nos queda $\frac{1}{1+2} = B$, es decir $B = 1/3$. Análogamente, si multiplicamos la ecuación (6.2.31) por $x + 2$, obtenemos

$$\frac{1}{x-1} = A + \frac{B(x+2)}{x-1},$$

y evaluando en $x = -2$ obtenemos $\frac{1}{-2-1} = A$, es decir, $A = -1/3$.

Este truco se llama "método de la tapadita"porque se aplica así: tomamos

$$\frac{1}{(x+2)(x-1)},$$

que es la función que queremos descomponer en fracciones simples. *Tapamos* el factor $x+2$ del denominador, y evaluamos lo que queda (es decir, $\frac{1}{x-1}$) en la raíz del factor que hemos tapado, es decir, en $x = -2$. Esto nos da $-1/3$, por lo que en la descomposición aparece

$$\frac{-1/3}{x+2}.$$

Ahora *tapamos* el factor $x - 1$ en el denominador, y evaluamos lo que queda en la raíz de $x - 1$, obteniendo $1/3$. En la descomposición aparece

$$\frac{1/3}{x-1}.$$

Como ejercicio, verificar que este "método"también funciona para los otros dos ejemplos que vimos, y pensar por qué.

¿Es recordar esto más fácil que resolver un sistema lineal de ecuaciones? Probablemente no, pero este es un truco muy popular que se incluye en estas notas a pedido del público.

Ejemplo 6.2.39.

$$R(x) = \frac{2x+3}{(x+2)(x^2+1)}.$$

En este ejemplo, buscamos una descomposición de la forma

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \tag{6.2.40}$$

Esta ecuación es igual a

$$\frac{2x+3}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2 + (2B+C)x + (A+2C)}{(x+2)(x^2+1)}. \tag{6.2.41}$$

Al igualar los numeradores, nos queda el sistema lineal que debemos resolver para obtener A, B y C:

$$\begin{aligned} A+B &= 0 \\ 2B+C &= 2 \\ A+2C &= 3. \end{aligned}$$

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 8 - segundo parcial primer semestre 2022) La integral

$$\int_0^1 \frac{4x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1} dx$$

es igual a:

A) $\log(2) + \pi$

B) $3\log(2) + \frac{\pi}{4}$

C) $2\log(2) - \frac{\pi}{4}$

D) $\log(3) + \pi$

E) $-\log(2) + \frac{\pi}{4}$

Observar que -1 es raíz del denominador.

Solución. A partir de la observación de que -1 es raíz del denominador, factorizamos x^3+x^2+x+1 usando división de polinomios o Ruffini:

$$x^3+x^2+x+1 = (x+1)(x^2+1)$$

Luego, aplicamos fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{4x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1} &= \frac{4x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \end{aligned}$$

Para encontrar las incógnitas A, B y C, tomamos denominador común en el término de la derecha

$$\begin{aligned}\frac{4x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1} &= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{(A+Bx^2+(B+C)x+(A+C))}{(x+1)(x^2+1)}\end{aligned}$$

y, al igualar los numeradores, nos queda el sistema lineal que debemos resolver para obtener A, B y C:

$$\begin{aligned} A+B &= 4 \\ B+C &= 3 \\ A+C &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema obtenemos que $A = 2$, $B = 2$ y $C = 1$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}dx &= \int \frac{2}{x+1}+\frac{2x+1}{x^2+1}dx \\ &= \int \frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}dx \\ &= 2\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{2x}{x^2+1}dx+\int \frac{1}{x^2+1}dx \\ &= 2\log(x+1)+\log(x^2+1)+\arctan(x)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{4x^2+3x+3}{x^3+x^2+x+1}dx &= 2\log(x+1)+\log(x^2+1)+\arctan(x)\Big|_0^1 \\ &= 2\log(2)+\log(2)+\underbrace{\arctan(1)}_{\frac{\pi}{4}}-(2\underbrace{\log(1)}_{0}+\underbrace{\log(1)}_{0}+\underbrace{\arctan(0)}_{0}) \\ &= 3\log(2)+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Capítulo 7

Polinomio de Taylor

Como sabemos, si f es una función derivable en un punto a, la derivada de f en a se define como el límite

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

La recta tangente al gráfico de a en el punto $(a, f(a))$ es la recta de ecuación

$$y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

es decir, *es la gráfica de la función lineal* dada por $p(x) = f(a)+f'(a)(x-a)$. Intuitivamente, esta función es la función lineal "cuya gráfica más se parece a la de f cerca del punto a". Exploremos un poco más esta idea.

Observemos que

$$\lim_{x\to a}(f(x) - p(x)) = \lim_{x\to a}(f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)) = 0.$$

Esto es simplemente porque f, al ser derivable en a, es continua en a. Pero dividiendo esta expresión por $x - a$, también tenemos que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p(x)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0.$$

Es decir, no sólo $f(x) - p(x)$ es pequeño para x cerca de a, sino que es *muy pequeño. Es un infinitésimo de orden mayor que $x - a$.*

En este curso hemos visto que hay funciones no lineales con las cuales es difícil trabajar. Por ejemplo, es difícil calcular sus valores. (¿Cuánto vale el seno de 8? ¿Y e^{π}?) Es muy natural la idea de *aproximar* estas funciones difíciles por funciones sencillas, que entendemos mejor y con las que operamos fácilmente, como las funciones lineales. La derivada nos permite hacer esto, al menos en el entorno de un punto. Pero no siempre la aproximación lineal de una función es suficientemente buena.

A este problema responde el Teorema de Taylor, que nos permite aproximar funciones por polinomios. Lleva el nombre de Brook Taylor, que lo enunció y demostró en 1715. Es un teorema asombrosamente potente y útil, dentro de la matemática y en otras ciencias. Sin embargo, no todos los contemporáneos de Taylor comprendieron su importancia. Se popularizó recién en 1772, cuando el famoso matemático Joseph-Louis Lagrange lo llamó "el fundamento principal del cálculo diferencial".[1]

A más de trescientos años del artículo de Taylor, nuestra herramienta principal de cálculo es la computadora. Con ella, el Teorema de Taylor no ha hecho sino ganar en importancia, porque este resultado está en la base de muchos de los algoritmos con los que nuestro software hace cuentas.

7.1. Definición del polinomio de Taylor

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función derivable en un intervalo I, su derivada es otra función $f' : I \to \mathbb{R}$. Si f' es a su vez derivable, esto nos da $f'' : I \to \mathbb{R}$. Si f'' es a su vez derivable, obtenemos f''', y así sucesivamente. Muchas de las funciones con las que trabajamos habitualmente pueden ser derivadas tantas veces como queramos. Son ejemplo de esto los polinomios, el seno y el coseno, el logaritmo y la exponencial, y todas las funciones que se obtienen de éstas haciendo sumas, productos, cocientes y composiciones.

Notación: derivadas de orden superior

Si n es un número natural mayor que uno y $f : I \to \mathbb{R}$ es una función que es n veces derivable en I, llamamos $f^{(k)}$ a su *derivada de orden* k, para $k = 1, \ldots, n$. Por ejemplo, $f' = f^{(1)}$ y $f'' = f^{(2)}$.

A veces nos referiremos a f como la derivada de orden 0, y escribiremos $f = f^{(0)}$.

Imaginemos que tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0) = 5, \quad f'(0) = 8, \quad f''(0) = -3, \text{ y } f'''(0) = 1.$$

Claramente hay una única función polinómica p_0 de grado 0 tal que $p_0(0) = 5$, que es, justamente, la función constante igual a 5. Hay infinitas funciones lineales que en 0 valen 5, pero hay una sola, p_1, para la cual $p_1(0) = 5$ y $p_1'(0) = 8$, a saber, $p_1(x) = 5 + 8x$. Hay una única función polinómica de grado 2, p_2, tal que $p_2(0) = 5$, $p_2'(0) = 8$ y $p_2''(0) = -3$, que está dada por $p_2(x) = 5 + 8x - \frac{3}{2}x^2$.

¿Cuál es la única función polinómica de grado 3, p_3, tal que

[1] *Journal de l'Ecole polytechnique*, cuaderno noveno, p.5.

$$\begin{aligned} p_3(0) &= 5 \\ p_3'(0) &= 8 \\ p_3''(0) &= -3 \text{ y} \\ p_3'''(0) &= 1? \end{aligned}$$

Podemos hacer esto con las derivadas en 0 hasta cualquier orden, mediante el razonamiento siguiente.

Consideremos una función polinómica dada por

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

y derivémosla k veces, con $k \leq n$. Al hacer esto, los primeros sumandos van a desaparecer, pues la derivada de orden k de $a_0 + a_1 x + \cdots + a_{k-1}x^{k-1}$ es 0. Por otro lado, para $j > k$, la derivada de $a_j x^j$ es

$$a_j j(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1)x^{j-k}.$$

En esta expresión, x aparece con una potencia mayor o igual que uno. En resumen,

$$p^{(k)}(x) = a_k k! + xq(x),$$

donde $q(x)$ es un polinomio. Por lo tanto $p^{(k)}(0) = a_k k!$.

Si queremos *elegir* el polinomio p para que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$, tenemos que tomar $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Es decir, el polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

cumple que $p^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ para todo $k \leq n$, y es el único polinomio de grado menor o igual que n con esta propiedad.

Hasta aquí nos hemos limitado a mirar el valor de las derivadas de una función en 0. Podemos hacer lo mismo en cualquier punto, como veremos más adelante. Antes, haremos una observación.

Observación 7.1.1. *El polinomio*

$$-2 + 3(x-1) + (x-1)^2$$

es igual a

$$-4 + x + x^2.$$

Las dos expresiones determinan la misma función, pero presentan un aspecto distinto.

La segunda corresponde a como solemos escribir un polinomio, es decir,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

y la segunda está en la forma de un polinomio en $x-1$, *lo que quiere decir*

$$b_0 + b_1(x-1) + \cdots + b_n(x-1)^n.$$

Todo polinomio se puede escribir como polinomio en $x-1$, y viceversa.

Nomenclatura

Si $a \in \mathbb{R}$ y escribimos un polinomio $p(x)$ como

$$b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n,$$

decimos que lo hemos escrito en la forma de *polinomio en $x-a$*.

Proposición 7.1.2. *Sean $n \in \mathbb{N}$, I un intervalo, a un elemento de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en el punto a. Entonces existe un único polinomio p de grado menor o igual que n tal que*

$$p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$$

para todo $k = 0, \dots, n$.

Ejercicio 74. Consideremos el polinomio

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Para $k = 0, \dots, n$, calcular $p^{(k)}(x)$. Concluir que $p^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$.

El ejercicio demuestra que el polinomio que se anuncia en la Proposición 7.1.2 efectivamente existe. Para ver que es único, antes probaremos un lema.

Lema 7.1.3. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $q(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que n tal que $q^{(k)}(a) = 0$ para todo $k \leq n$, entonces q es el polinomio nulo.*

Demostración del Lema 7.1.3.

Haremos una demostración por reducción al absurdo.

Supongamos que $q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, y que q no es el polinomio nulo. Esto es, alguno de sus coeficientes es distinto de 0. Supongamos que

$$k = \text{máx}\{j \ : \ 0 \leq j \leq n \text{ y } a_j \neq 0\}.$$

Es decir, que q es un polinomio de grado k, por lo que

$$q(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$$

con $a_k \neq 0$.

La derivada de orden k de q es constante e igual a $k!a_k$. Como $q^{(k)}(a) = 0$, tenemos que $a_k = 0$, lo cual es absurdo por cómo hemos definido k. Llegamos a una contradicción que surgió de suponer que q no era el polinomio nulo, por lo que q es el polinomio nulo.□

Fin de la demostración de la Proposición 7.1.2.

Supongamos que $p_0(x)$ es otro polinomio de grado menor o igual que n tal que $p_0^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. Entonces, si $q(x) = p(x) - p_0(x)$, para todo $k \leq n$ se cumple que $q^{(k)}(a) = 0$. Por el Lema 7.1.3, $q = 0$, o sea que $p = p_0$.□

Definición 7.1.4. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en un punto $a \in I$. El polinomio de Taylor de orden n en el punto a es el polinomio $P_n(f, a)$ de grado menor o igual que n cuyas derivadas hasta orden n en a son

$$f(a), \ f'(a), \ f''(a), \ldots, f^{(n)}(a).$$

Es decir, es el polinomio

$$P_n(f, a)(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Ejercicio de examen

(Ejercicio 3 - examen febrero 2020) Calcular $p(2)$ donde p es el polinomio de Taylor en 0 de grado 2 de la función $f(x) = \cos(x) \log(x^2 + 1)$

A) 4
B) 8
C) 9
D) 15
E) 17
F) 23

Solución. El polinomio de Taylor en 0 de grado 2 de la función f es

$$\begin{aligned} P_2(f, 0)(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - 0)^2 \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \end{aligned}$$

y se tiene que

- $f(0) = \cos(0)\log(1) = 0$
- $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)\log(x^2+1) + \cos(x)\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x$ y por lo tanto $f'(0) = 0$
- $f''(x) = -\cos(x)\log(x^2+1) - \operatorname{sen}(x)\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x - \operatorname{sen}(x)\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \cos(x)\frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2}$ y por lo tanto $f''(0) = 2$

Entonces
$$P_2(f,0)(x) = \frac{2}{2}x^2 = x^2$$
por lo que $p(2) = P_2(f,0)(2) = 4$.

7.2. Ejemplos

En esta sección calcularemos los polinomios de Taylor de algunas funciones conocidas. Cuando esté claro por el contexto cuáles son la función f y el punto a, escribiremos simplemente P_n en lugar de $P_n(f,a)$.

Ejemplo 7.2.1. *f polinómica.*

Si $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es una función polinómica, $P_n(f,a) = f$, cualquiera sea el punto a.

Para $k < n$, $P_k(f,0) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k$. (¡Verificarlo como ejercicio!)

¿Qué pasa con $P_k(f,a)$ para $a \neq 0$? Consideremos por ejemplo, la función dada por
$$f(x) = -4 + x + x^2$$
y tomemos $a = 1$ y $k = 1$. Si escribimos $f(x)$ como un polinomio en $x-1$, queda
$$f(x) = -2 + 3(x-1) + (x-1)^2.$$
El polinomio de Taylor $P_1(f,1)$ es el polinomio de grado 1 tal que $P_1(f,1)(1) = -2$ y $P_1(f,1)'(1) = 3$. Este es
$$P_1(f,1)(1) = -2 + 3(x-1) = 3x - 3.$$
Esto *no* es lo mismo que $-4 + x + x^2$ sin el término de grado 2.

En general, si f es una función polinómica de grado n, obtenemos el polinomio de Taylor de f de orden k en a escribiendo f como un polinomio en $x-a$ y luego borrando los términos de grado mayor que k.

Ejemplo 7.2.2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$.

Derivando esta función vemos que[2]

$$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \ldots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Por lo tanto

$$f(0) = 1,\ f'(0) = -1,\ f''(0) = 2, \ldots, f^{(n)}(0) = (-1)^n n!$$

y el polinomio de Taylor de f de orden n en el punto 0 es

$$P_n(f,0)(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n.$$

Ejemplo 7.2.3. $g(x) = \log(1+x)$, $a = 0$.

Observemos que $g(0) = 0$, y que $g'(x) = f(x)$, donde f es la función del ejemplo anterior. Por lo tanto, $g^{(k)}(0) = f^{(k-1)}(0)$ para todo $k \geq 1$ y el polinomio de Taylor de g de orden n en el punto 0 es

$$P_n(g,0)(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}.$$

Ejemplo 7.2.4. $f(x) = e^x$, $a = 0$.

Como $f^{(k)}(x) = f(x)$ para todo $k \geq 0$, resulta que $f^{(k)}(0) = 1$ para todo $k \geq 0$. El polinomo de Taylor de f de orden n en el punto 0 es

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Ejemplo 7.2.5. $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $a = 0$.

Como sabemos, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\operatorname{sen}(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$ y $f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x) = f(x)$. Por lo tanto, a partir de la derivada de orden 4, las derivadas de f empiezan a repetirse. Por ejemplo, $f^{(23)}(x) = f'''(x) = -\cos(x)$, porque $23 = 20 + 3$ y 20 es múltiplo de 4, por lo que derivar f veinte veces dará f nuevamente.

Entonces tenemos que

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} \ \ 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ \ \ 1 & \text{si el resto de dividir } k \text{ entre 4 es 1} \\ -1 & \text{si el resto de dividir } k \text{ entre 4 es 3} \end{cases}$$

[2]Aquellos que cursan Matemática Discreta 1, pueden demostrar esto por inducción completa.

Otra manera de escribir esto es

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es par} \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \text{ es impar} \end{cases}$$

Observemos que, para cualquier n, el polinomio de Taylor $P_n(f, 0)$ no tiene términos de grado par. Entonces, si n es par, $P_n(f, 0) = P_{n-1}(f, 0)$, por lo que alcanza con dar los polinomios de Taylor cuyo orden es impar.

Para n impar,

$$P_n(f, 0)(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} x^n}{n!}.$$

Ejercicio 75. Para $f(x) = \cos(x)$ y $a = 0$, calcular $P_n(f, a)$.

Ejercicio 76. Probar que si f y g son funciones con derivadas hasta orden n en el punto a, entonces $P_n(f + g, a) = P_n(f, a) + P_n(g, a)$.

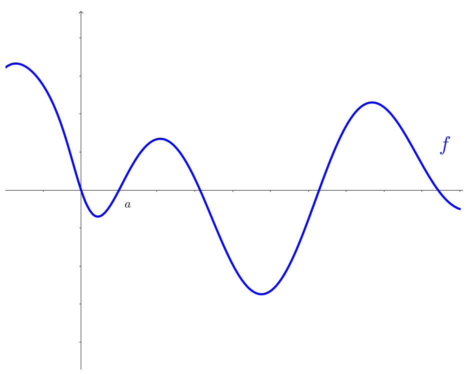
7.3. El teorema de Taylor

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función n veces derivable en el punto a, ya definimos su polinomo de Taylor de orden n en a. Para varias funciones conocidas, lo calculamos. En esta sección contestaremos la pregunta más importante: ¿para qué hicimos todo esto?

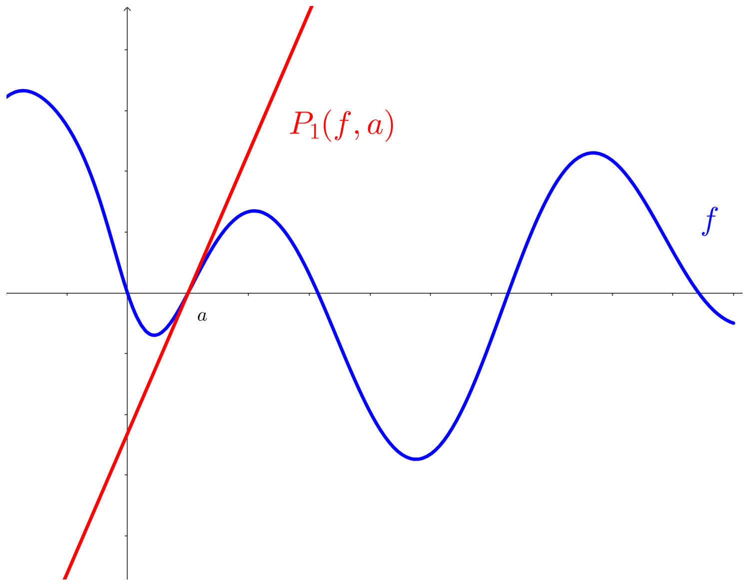
Habíamos dicho que la función lineal $P_1(f, a)$, cuya gráfica es la recta tangente al gráfico de f en el punto $(a, f(a))$, "se parece" a f cerca de a. Las dos funciones valen lo mismo en el punto a y tienen igual derivada. Tenemos la esperanza de que $P_2(f, a)$, al tener derivadas hasta orden 2 iguales a las de f en a, se le parezca aun más, y que el parecido de $P_3(f, a)$ sea aun mayor, etc.

Los dibujos muestran las gráficas de una función f y de sus polinomios de Taylor hasta orden 4 en $a = 1$. (Para esta función, $f(1) = 0$, pero eso no tiene importancia). Para valores de x lejanos a a la función f y los polinomios son muy diferentes. Sin embargo, cerca de a, los polinomios parecen aproximar cada vez mejor a f a medida que crece su orden.

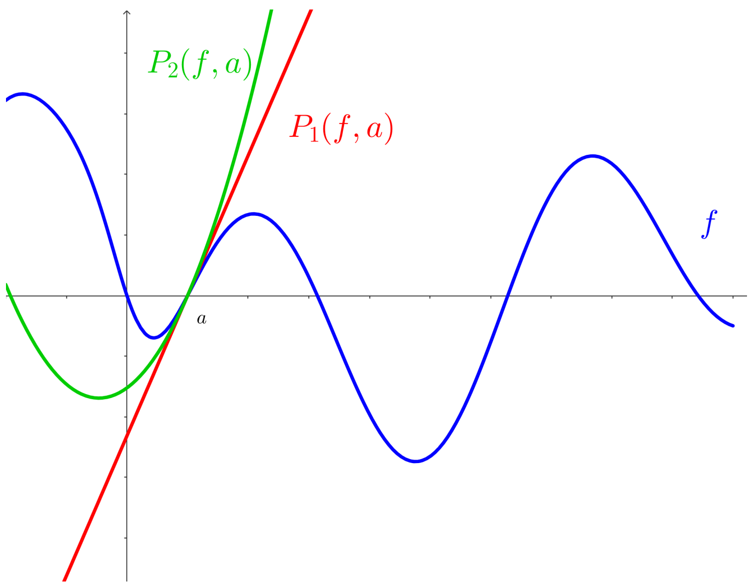
Esta es la gráfica de f.



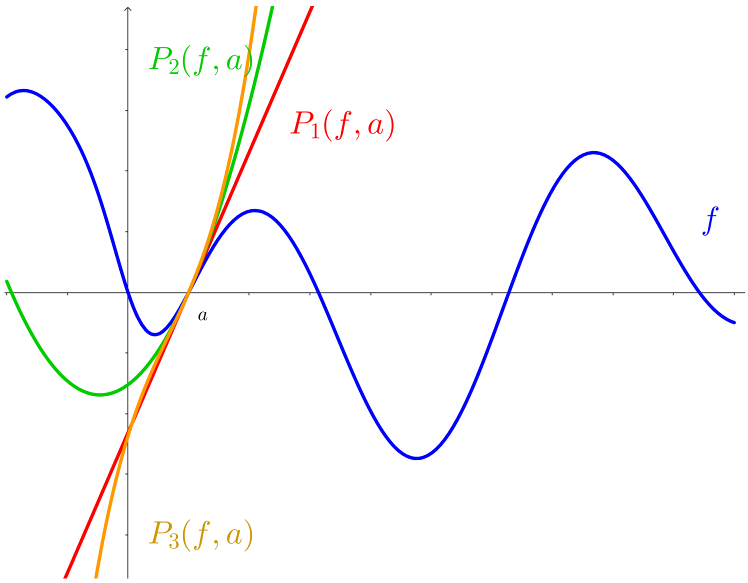
Su polinomio de Taylor de orden 1 tiene como gráfica la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.



Su polinomio de Taylor de orden 2 tiene como gráfica una parábola, que cerca de $(a, f(a))$ se parece aun más a la gráfica de f.



Su polinomio de Taylor de orden 3 tiene como gráfica una cúbica, que se parece aún más.



Tenemos que hacer precisa esta noción de *aproximación*. Cuando decimos que $P_n(f,a)$ "se parece" a f o que "aproxima" a f (para x cerca de a), lo que estamos diciendo es que la diferencia $f(x) - P_n(f,a)(x)$ es pequeña (para x cerca de a). El teorema de Taylor nos habla, justamente, de esta diferencia, que por su importancia tiene un nombre: el resto.

Definición 7.3.1. Si f es n veces derivable en a, el resto de Taylor de orden n de f en a es la función

$$R_n(f,a)(x) = f(x) - P_n(f,a)(x).$$

El resto $R_n(f,a)$ es el *error* que estaríamos cometiendo si reemplazáramos la función f por su polinomio de Taylor $P_n(f,a)$.

Observación 7.3.2. *Por como lo hemos definido, $R_n(f,a)$ vale 0 en a, y todas sus derivadas hasta orden n también valen 0 en a.*

Teorema 7.3.3 (Teorema de Taylor.)**.** *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función que es n veces derivable en un entorno de $a \in I$ y tal que $f^{(n)}$ es continua en a. Entonces*

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

es decir, el resto $R_n(f,a)$ es un infinitésimo de orden mayor que $x - a$.

Demostración.

Llamaremos R_n a $R_n(f,a)$. Como f es n veces derivable en un entorno de a y P_n es un polinomio, R_n también es n veces derivable en a y las derivadas $R_n^{(0)}$, $R_n^{(1)}$,…,$R_n^{(n-1)}$ son todas continuas. Por hipótesis, $f^{(n)}$ es continua en a, y por lo tanto también lo es $R_n^{(n)}$.

Usaremos la Regla de L'Hôpital para demostrar el teorema de Taylor. Recordemos la Observación 7.3.2, que nos dice que $R_n^{(k)}(a) = 0$ para $k = 0, \dots, n$. Como las derivadas hasta orden n de R_n son continuas en a,

$$\lim_{x \to a} R_n^{(k)}(x) = R_n^{(k)}(a) = 0 \tag{7.3.4}$$

para $k \leq n$.

El límite que debemos calcular, que es

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n},$$

es una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, y le podemos aplicar la Regla de L'Hôpital. Al derivar una vez, dos veces,…, $n-1$ veces, seguimos teniendo una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Por lo tanto, podemos aplicar la Regla de L'Hôpital n veces, al cabo de las cuales obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}.$$

Usando la ecuación (7.3.4) para $k = n$, llegamos a que este límite es 0.□

Observación 7.3.5. *Observemos que la aproximación que nos da el teorema de Taylor es local, ya que está dada por un límite. Es decir, este teorema sólo nos habla de cuánto se parecen la función f y su polinomio de Taylor $P_n(f,a)$ en entornos, que pueden ser pequeños, del punto a.*

Ejemplo 7.3.6. *Miremos $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Su polinomio de Taylor de orden n en 0 es $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$, y define una función en toda la recta $\mathbb{R}$. Sin embargo, la función f está definida únicamente para $x > -1$, y $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$, por lo que*

$$\lim_{x \to -1^+} R_n(x) = \lim_{x \to -1^+} (f(x) - P_n(x)) = +\infty,$$

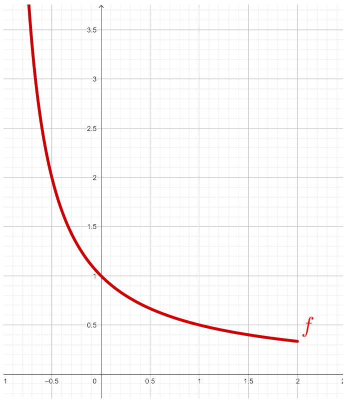
pues $\lim_{x \to -1^+} P_n(x) = P_n(-1) = n$.

Es decir, aunque n sea muy grande, la aproximación de f por P_n es muy mala cuando nos acercamos a $x = -1$.

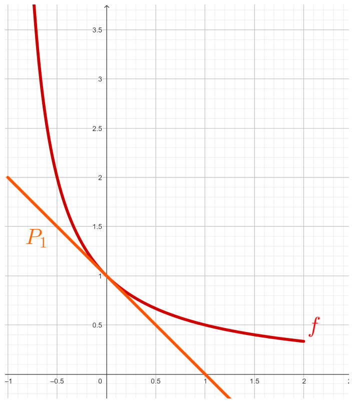
Observemos lo que pasa cerca de 1. El polinomio $P_n(1)$ vale 0 o 1 según si n es par o impar, y $f(1) = \frac{1}{2}$. Por lo tanto $|R_n(1)| = \frac{1}{2}$ para cualquier n, lo cual muestra que en $x = 1$ el polinomio P_n tampoco es una buena aproximación de f.

Las imágenes muestran a f y sus polinomios de Taylor hasta orden 4.

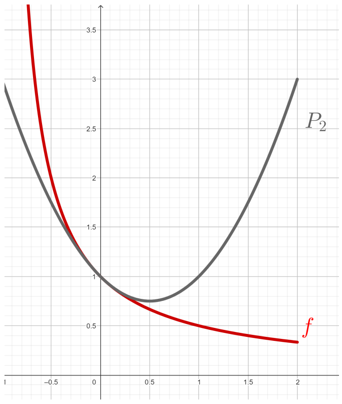
Más adelante volveremos a este ejemplo para entender mejor qué pasa con el resto $R_n(x)$ en el intervalo abierto $(-1, 1)$.



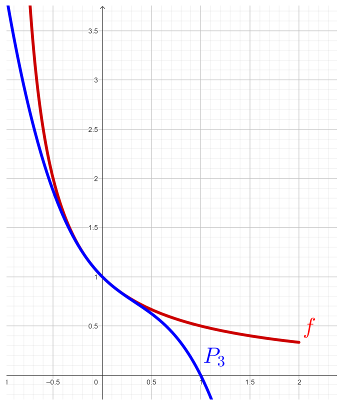
La función f



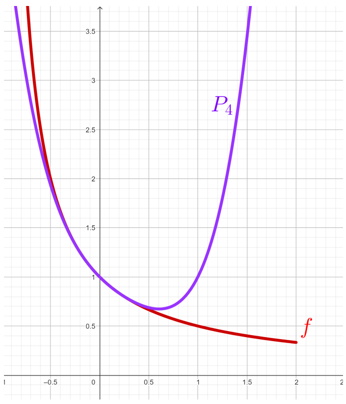
f y su polinomio de Taylor de orden 1



f y su polinomio de Taylor de orden 2



f y su polinomio de Taylor de orden 3



f y su polinomio de Taylor de orden 4

Para terminar esta sección, veremos que no hay otros polinomios que aproximen a f cerca de a como lo hace el polinomio de Taylor.

Proposición 7.3.7. *Sea f una función que es n veces derivable en un entorno de a y tal que $f^{(n)}$ es continua en a. Si Q es un polinomio de grado menor o igual que n tal que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $Q = P_n(f,a)$.

Para probar esta proposición haremos uso del siguiente lema:

Lema 7.3.8. 1. *Si P es un polinomio de grado menor o igual que n tal que*

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces P es el polinomio nulo.

2. *Si P y Q son polinomios de grado menor o igual que n tales que*

$$\lim_{x\to a} \frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

entonces $P = Q$.

Demostración del Lema 7.3.8.

1. Escribamos a P como en polinomio en $x-a$. Tenemos que

$$P(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n.$$

En el cociente

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n}$$

el denominador tiende a 0 cuando x tiende a a. Para que el cociente tienda a cero, el numerador $P(x)$ también tiene que tender a 0, por lo que $b_0 = 0$. Entonces

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{b_1 + b_2(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^{n-1}}{(x-a)^{n-1}}.$$

Repitiendo el razonamiento anterior, tenemos que $b_1 = 0$. Haciendo esto n veces, llegamos a que todos los coeficientes $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ son iguales a 0. Entonces $\frac{P(x)}{(x-a)^n} = b_n$. Como $\lim_{x\to a} b_n = 0$ y b_n es una constante, $b_n = 0$.

2. Aplicando el inciso anterior al polinomio $P-Q$, tenemos que $P-Q=0$, es decir, que $P=Q$.$\square$

Demostración de la Proposición 7.3.7.

Llamemos P al polinomio de Taylor $P_n(f,a)$. Entonces

$$\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}+\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}.$$

Por hipótesis

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0,$$

y por el Teorema de Taylor

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0,$$

lo que nos permite concluir que

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Por el lema anterior, esto implica que $P=Q.\square$

Ejercicio de examen

(Ejercicio 9 - examen febrero 2024) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$. Indicar cuál de los siguientes polinomios es el que mejor aproxima a $f(x)$ si x está cerca de 1

A) $e(10x^2-18x+8)$

B) $e(5x^2-8x+3)$

C) $e(5x^2+2x)$

D) $\frac{1}{e}(-6x^2+14x-8)$

E) $\frac{1}{e}(-3x^2+2x)$

F) $\frac{1}{e}(-3x^2+8x-5)$

Solución. Buscamos el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $x=1$:

$$P_2(f,1)(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

y se tiene que:

- $f(1)=\int_1^1 e^{-t^2}dt=0$
- por la regla de la cadena y el Teorema Fundamental del Cálculo

  $$f'(x)=e^{-x^4}\cdot 2x$$

  y por lo tanto $f'(1)=2e^{-1}=\frac{1}{e}\cdot 2$

- por la regla de la cadena

$$f''(x) = -4xe^{-x^4} \cdot 2x + 2e^{-x^4} = e^{-x^4}(-8x^2+2)$$

  y por lo tanto $f''(1) = e^{-1}(-8+2) = \frac{1}{e} \cdot (-6)$

Entonces:

$$\begin{aligned} P_2(f,1)(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 \\ &= 0 + \frac{1}{e} \cdot 2(x-1) + \frac{1}{e}(-6)(x^2-2x+1) \\ &= \frac{1}{e}(-6x^2+14x-8) \end{aligned}$$

Ejercicio 77. Probar que si f y g son funciones con derivadas hasta orden n continuas en el punto a, y

$$P_n(f,a)(x)P_n(g,a)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-a)^k,$$

entonces

$$P_n(fg,a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k.$$

Leamos cuidadosamente lo que pide este ejercicio. Los polinomios $P_n(f,a)$ y $P_n(g,a)$ son polinomios de grado menor o igual que n, cuyo producto podría tener (y con frecuencia tiene) grado mayor. Digamos que el grado de $P_n(f,a)P_n(g,a)$ es N, con lo que podemos escribir

$$P_n(f,a)(x)P_n(g,a)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-a)^k.$$

Por otro lado $P_n(fg,a)$ es, por definición, un polinomio de grado menor o igual que n. El ejercicio nos pide probar que éste se obtiene tomando el producto $P_n(f,a)(x)P_n(g,a)(x)$ y borrando todos los términos de grado mayor que n que aparezcan en él.

Por ejemplo, si $f(x) = e^x$ y $g(x) = \frac{1}{1+x}$, entonces

$$P_2(f,0)(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \quad \text{y} \quad P_2(g,0)(x) = 1 - x + x^2.$$

Su producto es $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^4$. El polinomio de Taylor de orden 2, en 0, de la función $fg(x) = \frac{e^x}{1+x}$ es

$$P_2(fg,0)(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2.$$

¡El ejercicio del recuadro brinda una excelente oportunidad de usar la Proposición 7.3.7!

7.4. Aplicación al cálculo de límites

Observación 7.4.1. *Si f está en las hipótesis del Teorema de Taylor y $P_n = P_n(f, a)$,*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \left(\frac{P_n(x)}{(x-a)^n} + \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \right) = \lim_{x\to a} \frac{P_n(x)}{(x-a)^n},$$

pues

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Esta observación permite calcular algunos límites.

Ejemplo 7.4.2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3}.$$

El polinomio de Taylor de orden 3 en 0 de la función seno es $x - \frac{x^3}{6}$. Por lo tanto, Si $f(x) = \operatorname{sen}(x) - x$, el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto 0 es

$$P_3(x) = \frac{-x^3}{6}.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{P_3(x)}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Ejemplo 7.4.3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2}$$

Tomemos la función $f(x) = e^{x^2} - 1$. Su polinomio de Taylor de orden 2 es x^2, por lo que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{P_2(x)}{x^2} = 1.$$

Ejemplo 7.4.4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x) - x}$$

Podemos escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \frac{x^2}{\log(1+x) - x}.$$

Si tomamos $f(x) = \log(1+x) - x$, vemos que su polinomio de Taylor de orden 2 en 0 es $P_2(x) = -\frac{x^2}{2}$. Por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{P_2(x)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1+x)-x} = -2.$$

Juntando esto con lo que sabemos del ejemplo anterior,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\log(1+x)-x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} \frac{x^2}{\log(1+x)-x} = 1\cdot(-2) = -2.$$

Ejemplo 7.4.5.

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}}{(x-1)^3}$$

Si calculamos el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $\arctan(x)$ en el punto 1, vemos que es igual a

$$P_3(\arctan, 1)(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{x-1}{2} - \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(x-1)^3}{12}.$$

Por lo tanto, el polinomio de orden 3 en el punto 1 de la función

$$f(x) = \arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}$$

es

$$P_2(f, 1)(x) = \frac{(x-1)^3}{12}.$$

Por lo tanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{\arctan(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}}{(x-1)^3} = \lim_{x\to 1} \frac{P_3(f,1)(x)}{(x-1)^3} = \frac{1}{12}.$$

Ejercicio de parcial

(Ejercicio 5 - segundo parcial primer semestre 2020) Calcular

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x\mathrm{sen}(4x)}$$

(A) 1/8 **(C)** 1/2 **(E)** 9/8

(B) 1/10 **(D)** 2/5 **(F)** 9/10

Solución. El polinomio de Taylor de orden 2 de la función coseno en 0 es $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2!}$ por lo que el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $1-\cos(3x)$ en 0 es:

$$1 - p(3x) = 1 - \left(1 - \frac{(3x)^2}{2!}\right) = \frac{9}{2}x^2$$

Por otro lado, el polinomio de Taylor de orden 2 de la función seno en 0 es $q(x) = x$ por lo que el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $x\,\text{sen}(4x)$ en 0 es

$$xq(4x) = x \cdot (4x) = 4x^2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x\,\text{sen}(4x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{9}{2}x^2}{4x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{9\cancel{x^2}}{8\cancel{x^2}} \\ &= \frac{9}{8}\end{aligned}$$

Ejercicio de examen

(Ejercicio 9 - examen diciembre 2023) Indicar el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - x - 2 + \cos(x) - \frac{x^3}{6}}{x^4}$$

A) $-\frac{1}{24}$ B) $-\frac{1}{12}$ C) 0 D) $\frac{1}{24}$ E) $\frac{1}{12}$ F) $+\infty$

Solución. El polinomio de Taylor de orden 4 de la función e^x en 0 es:

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

y el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $\cos(x)$ en 0 es:

$$q(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

Entonces el polinomio de Taylor de orden 4 de $e^x - x - 2 + \cos(x) - \frac{x^3}{6}$ en 0 es:

$$p(x) - x - 2 + q(x) - \frac{x^3}{6} = \cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{x^4}{24} - \cancel{x} - \cancel{2} + \cancel{1} - + \cancel{\frac{x^2}{2}} + \frac{x^4}{24} - \cancel{\frac{x^3}{6}} = \frac{x^4}{12}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - x - 2 + \cos(x) - \frac{x^3}{6}}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{x^4}}{12}}{\cancel{x^4}} = \frac{1}{12}$$

7.5. Forma del resto de Lagrange y estimación de errores

El Teorema de Taylor nos dice que una función $f(x)$ puede ser aproximada por un polinomio $P_n(f,a)(x)$ *localmente*, cerca del punto a. ¿Cuán cerca? No lo sabemos. Como el enunciado del teorema nos da el valor de un límite, no tenemos información relevante sobre cuánto se parecen $f(x)$ y $P_n(f,a)(x)$ en un punto $x \neq a$. Para esto, quisiéramos tener una acotación de

$$R_n(f,a)(x)$$

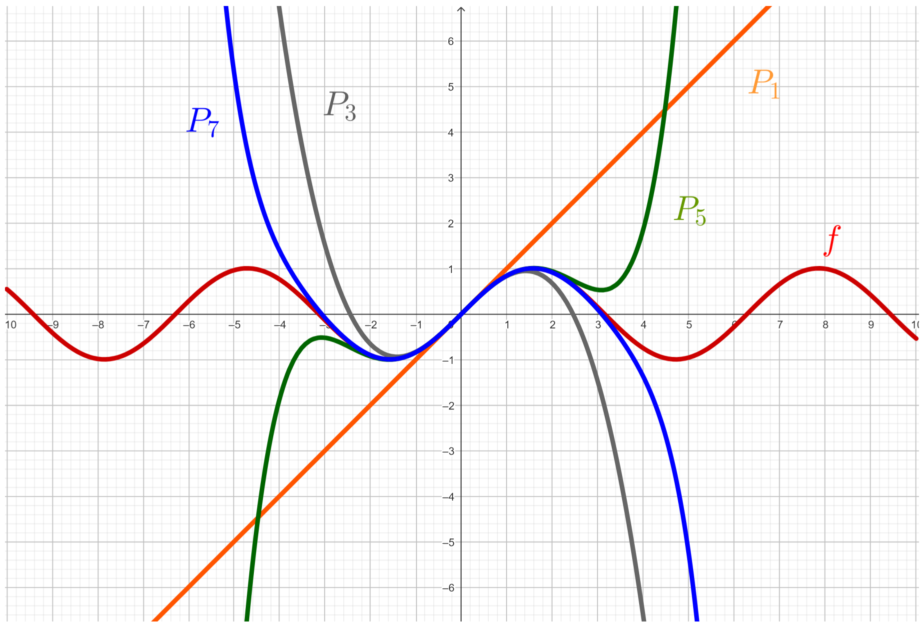
que sea válida al menos en un entorno de a cuyo tamaño conozcamos. Esto nos permitiría hacer un cálculo aproximado de valores de $f(x)$ aún cuando $x \neq a$.

La pregunta importante que queremos responder es:

¿Podemos aproximar $f(x)$ por un polinomio *en un intervalo*?

Como vimos en el Ejemplo 7.3.6, no siempre podemos esperar que el polinomio de Taylor $P_n(f,a)$ aproxime a la función f en todo su dominio. Para $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x}$, el polinomio $P_n(f,0)(x)$ no se parece a f en $x = 1$, aunque tomemos n muy, muy grande. Sin embargo, $P_n(f,0)$ sí parece, al menos en las gráficas que acompañan el Ejemplo 7.3.6, estarse aproximando a $f(x)$ en $(-1,1)$ a medida que crece n.

Ahora observemos la figura de abajo. En ella se ve la gráfica de la función $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, y sus polinomios de Taylor en 0 hasta orden 7. El dibujo parece sugerir que, al aumentar n, el polinomio $P_n(f,0)(x)$ se aproxima a $f(x)$ en un intervalo cada vez más grande. ¿Será cierto esto? En caso de serlo, ¿nos permitirá, por ejemplo, calcular aproximadamente el número $\mathrm{sen}(2)$?



Para responder a estas preguntas vamos a ver un resultado que nos dará una expresión para $R_n(f,a)(x)$.

Teorema 7.5.1 (Forma del resto de Lagrange)**.** *Sean $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable en I y a un punto de I. Entonces, para $x \in I$, existe un punto c_x entre a y x (es decir: c_x está en el intervalo (a, x) o en el intervalo (x, a), según corresponda). tal que*

$$R_n(f, a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Antes de demostrar este teorema, veremos cómo es útil para *acotar* el resto $R_n(f, a)(x)$ para x en un intervalo. Es decir, para ver que $R_n(f, a)(x)$ es, en valor absoluto, menor que algo que depende de a, n y, por supuesto, de cuál sea la función f. Así al aproximar f por $P_n(f, a)$, tendremos una estimación del error cometido.

Ejemplo 7.5.2. *Aproximación de la función seno.*

Tomemos $f(x) = \text{sen}(x)$ y $a = 0$. El Teorema 7.5.1 nos dice que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

por lo que

$$|R_n(x)| = \frac{|f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Observemos que $f^{(n+1)}$ es, dependiendo del valor de n, la función sen, cos, $-$sen, o $-$cos. En cualquier caso, y sin importar cuánto vale c_x,

$$|f^{(n+1)}(c_x)| \leq 1.$$

Por lo tanto,

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Digamos que queremos calcular sen(2) con un error menor a 10^{-3}. En primer lugar, tenemos que hallar n tal que

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

El valor $n = 9$ es el primero que cumple esto. Por lo tanto,

$$|\text{sen}(2) - P_9(2)| = |R_9(2)| < \frac{2^{10}}{10!} < 10^{-3}.$$

Como $P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$, el valor aproximado de sen(2) que obtenemos es

$$P_9(2) = 0,9093474426807760141093474426807 8.$$

¡Por supuesto que no todas estas cifras decimales son correctas para sen(2)! Pero este es un número que aproxima a sen(2) con un error menor a un milésimo.

Ejemplo 7.5.3. *¿Cuánto vale* $e^{1/2}$*, aproximadamente?*

Tomemos la función $f(x) = e^x$. Es una función positiva estrictamente creciente, que coincide con todas sus derivadas, por lo cual para todo $n \geq 0$

$$f^{(n+1)}(c_{\frac{1}{2}}) = e^{c_{\frac{1}{2}}} < e^{\frac{1}{2}},$$

si $c_{\frac{1}{2}} \in (0, \frac{1}{2})$.

Si no sabemos cuánto vale $e^{1/2}$, ¿de qué nos sirve esta acotación? Sabemos que $e < 4$, por lo que $e^{1/2} < 4^{1/2} = 2$. Por lo tanto,

$$f^{(n+1)}(c_{\frac{1}{2}}) = e^{c_{\frac{1}{2}}} < 2,$$

si $c_{\frac{1}{2}} \in (0, \frac{1}{2})$.

Si tomamos el polinomio de Taylor de f en 0, tendremos que

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f^{(n+1)}(c_{\frac{1}{2}})}{(n+1)!}\frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{(n+1)!2^n}.$$

Eligiendo $n = 4$, $\frac{1}{(n+1)!2^n} = \frac{1}{5!2^4} < 10^{-3}$. Por lo tanto

$$P_4\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{1}{2!} + \frac{1}{2^3}\frac{1}{3!} + \frac{1}{2^4}\frac{1}{4!}$$

es un número que aproxima $e^{1/2}$ a menos de un milésimo.

Ejercicio 78. Tomemos la función del Ejemplo 7.3.6, es decir, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Para $n \geq 0$, sean P_n su polinomio de Taylor de orden n en 0, y $R_n = f - P_n$ el resto.

1. Calcular $R_n(1)$ con la forma del resto de Lagrange.
2. Investigar si, para $x \in (0, 1)$, el valor de $P_n(x)$ aproxima a $f(x)$ cuando n es suficientemente grande.
3. Investigar si, para $x \in (-1, 0)$, el valor de $P_n(x)$ aproxima a $f(x)$ cuando n es suficientemente grande.

Expansión decimal

Si calculamos un número α con un error menor a 10^{-3}, ¿cuántas cifras hemos calculado en forma correcta? ¡No sabemos! Observemos que

$$\alpha_0 = 1 - 10^{-4} \quad \text{y} \quad \alpha_1 = 1 + 10^{-4}$$

están a distancia menor que 10^{-3} y difieren en la cifra de las unidades. Efectivamente, $\alpha_0 = 0,9999$ y $\alpha_1 = 1,0001$.

Entonces, si sólo podemos calcular el número π aproximadamente, ¿cómo estamos seguros de que su segunda cifra después de la coma es un 4?

Recordemos cómo se escribe la expansión decimal. Digamos que α es un número entre 0 y 1, es decir, es de la forma $\alpha = 0,\ldots$. Dividimos el intervalo $[0,1]$ en diez subintervalos iguales:

$$\left[0, \frac{1}{10}\right], \ \left[\frac{1}{10}, \frac{2}{10}\right], \ \left[\frac{2}{10}, \frac{3}{10}\right], \ \left[\frac{3}{10}, \frac{4}{10}\right], \ \left[\frac{4}{10}, \frac{5}{10}\right],$$

$$\left[\frac{5}{10}, \frac{6}{10}\right], \ \left[\frac{6}{10}, \frac{7}{10}\right], \left[\frac{7}{10}, \frac{8}{10}\right], \ \left[\frac{8}{10}, \frac{9}{10}\right], \ \text{y} \ \left[\frac{9}{10}, 1\right].$$

Si α está, por ejemplo, entre $\frac{6}{10}$ y $\frac{7}{10}$, su expansión decimal comienza con un 6. Es decir, $\alpha = 0,6\ldots$.

Para saber la segunda cifra decimal de α, dividimos el intervalo $[\frac{6}{10}, \frac{7}{10}]$ en diez subintervalos iguales. Si α está, por ejemplo, en el subintervalo $[\frac{62}{100}, \frac{63}{100}]$, su segunda cifra decimal será un 2.

¿Qué pasa si α *es* el número $\frac{63}{100}$? ¿Es de la forma

$$0,62\ldots$$

por pertenecer a $[\frac{62}{100}, \frac{63}{100}]$, o de la forma

$$0,63\ldots$$

por pertenecer a $[\frac{63}{100}, \frac{64}{100}]$? ¡Lo podemos escribir de cualquiera de las dos maneras! En efecto,

$$\frac{63}{100} = 0,63 = 0,62999999999999999\ldots,$$

donde la sucesión de nueves es infinita.

Tan cerca como queramos del $\frac{63}{100}$, habrá otros números cuya segunda cifra decimal sea 2 y números cuya segunda cifra decimal sea 3.

En realidad, todos los números que son de la forma $\dfrac{k}{10^n}$, donde $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, tienen dos expansiones decimales distintas. Son los números enteros y los números que, al subdividir un intervalo de extremos enteros $[N, N+1]$ primero en 10, luego en 10^2, luego en 10^3, etc., en algún momento caen en el borde de dos subintervalitos. Pero *todos los demás números tienen una expansión decimal única.*

Volvamos a la pregunta original, la de si podemos, al calcular aproximadamente un número, estar seguros de algunas de sus cifras decimales. Supongamos que sabemos que el número π está a una distancia menor de $\frac{1}{1000}$ de $3,1413$. Eso quiere decir que está entre $3,1403$ y $3,1423$. En particular, está necesariamente en el intervalo $(3,14,3,15) = (3 + \frac{14}{100}, 3 + \frac{15}{100})$, por lo que estamos seguros de que sus primeras dos cifras decimales son 1 y 4.

Demostración del Teorema 7.5.1.

Fijados a, n y x, queremos probar que $R_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún valor de c entre a y x.

Definamos el número R por la ecuación

$$f(x) = P_n(f,a)(x) + \frac{R}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

es decir,

$$R = (f(x) - P_n(f,a)(x))\,\frac{(n+1)!}{(x-a)^{n+1}}.$$

Con esta definición, el resto $R_n(f,a)(x)$ es igual a $\frac{R}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$. Por lo tanto, tenemos que probar que existe un c entre a y x para el cual $R = f^{(n+1)}(c)$.

Consideremos la función definida en el intervalo entre a y x por

$$F(y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k + \frac{R}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}.$$

Observemos que $F(x) = F(a) = f(x)$, y que F es una función derivable. Por el Teorema de Rolle, existe c entre a y x tal que $F'(c) = 0$.

Calculando la derivada de F obtenemos

$$\begin{aligned} F'(y) &= f'(y) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}\right) - \frac{R}{n!}(x-y)^n \\ &= f'(y) + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - f'(y) - \frac{R}{n!}(x-y)^n \\ &= \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - \frac{R}{n!}(x-y)^n \end{aligned}$$

Observemos que en el cálculo anterior usamos estos dos hechos elementales:

- $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k$

- La suma $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{f^{(k+1)}(y)}{k!}(x-y)^k - \frac{f^{(k)}(y)}{(k-1)!}(x-y)^{k-1}\right)$ es telescópica, e igual a $\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n - f'(y)$.

Que $F'(c) = 0$ quiere decir que $\frac{R}{n!}(x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n$, es decir, $R = f^{(n+1)}(c)$. Esto es lo que queríamos probar.$\square$