FÍSICA 1

4ª Edicion

Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

CAPÍTULO 6 DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117

CAPÍTULO 7 TRABAJO Y ENERGÍA 149

CAPÍTULO 8 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171

CAPÍTULO 9 SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203

CAPÍTULO 10 COLISIONES 233

CAPÍTULO 11 CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261

CAPÍTULO 12 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277

CAPÍTULO 26 ENTROPÍA Y LA SEGUNDA LEY DE LA TERMODINÁMICA 635

APÉNDICES

Física / Robert Resnick ; David Halliday ; Kenneth Krane. 3a. ed. español. México : Compania Editorial Continental, 2001

CAPÍTULO 15

OSCILACIONES

Todos los días nos encontramos con muchas clases de movimiento oscilatorio. Entre los ejemplos más comunes podemos mencionar el péndulo de un reloj al oscilar, el salto de una persona desde un trampolín, y la cuerda de una guitarra al vibrar. En la escala microscópica, otros ejemplos son la vibración de los átomos en el cristal de cuarzo de un reloj de pulsera o la vibración de las moléculas de aire que transmiten las ondas sonoras. Los casos citados son oscilaciones mecánicas. Tampoco nos resultan desconocidas las oscilaciones electromagnéticas, como los electrones que entran y salen en circuitos que dan origen a la transmisión y la recepción de señales de radio o de televisión.

Una característica común de todos estos sistemas, a pesar de las diferencias en sus atributos y en las leyes que rigen su comportamiento, es la fórmula matemática que se utiliza para describir sus oscilaciones. En todos los casos, la cantidad de oscilación, ya sea el desplazamiento de una partícula o la magnitud de un campo eléctrico, puede describirse en términos de funciones seno y coseno, que son las funciones periódicas más conocidas para nosotros.

En este capítulo nos concentraremos en las oscilaciones mecánicas y su descripción. Más adelante, en este libro, estudiaremos las diversas clases de ondas y las oscilaciones electromagnéticas, las cuales utilizan también la misma descripción matemática.

15-1 SISTEMAS OSCILATORIOS

Imaginemos un sistema que oscila, como el péndulo de un reloj o una masa suspendida de un resorte. ¿Cuáles deben ser las propiedades de la fuerza que produzca tales oscilaciones?

Si desplazamos a un péndulo en una dirección desde su posición de equilibrio, la fuerza (debida a la gravedad) impulsa de regreso hacia su posición de equilibrio. Si lo desplazamos en la otra dirección, la fuerza sigue actuando hacia la posición de equilibrio. *No importa cuál sea la dirección del desplazamiento, la fuerza siempre actúa en una dirección que restituye al sistema a su posición de equilibrio.* Esta fuerza recibe el nombre de *fuerza de restitución*. (La posición de equilibrio pertenece a la clase que llamamos *estable* en el capítulo 14; el sistema tiende a regresar al equilibrio cuando se le desplaza ligeramente.)

Consideremos un ejemplo sencillo. Supongamos que tenemos una partícula que puede moverse libremente sólo en la dirección x, y hagamos que la partícula experimente una fuerza de magnitud constante F_m que actúe en la dirección $+x$ cuando $x < 0$ y en la dirección $-x$ cuando $x > 0$, como se muestra en la figura 1*a*. La fuerza, que se muestra en la figura 1*b*, es similar a las fuerzas seccionalmente constantes que consideramos en el capítulo 2.

Una partícula de masa m en la coordenada $x = +x_m$ experimenta una fuerza cuya componente x es $-F_m$, y la componente correspondiente x de la aceleración de la partícula es $-a_m = -F_m/m$. La partícula se mueve hacia su posición de equilibrio en $x = 0$ y llega a esa posición con una velocidad $v = -v_m$. Cuando pasa por el origen a la x negativa, la fuerza se convierte en $+F_m$, y la aceleración es $+a_m$. La partícula pierde velocidad y llega al reposo por un instante en $x = -x_m$ antes de invertir su movimiento a través del origen y regresar eventualmente a $x = +x_m$. En ausencia de la fricción y de otras fuerzas disipativas, el ciclo se repite una y otra vez.

La figura 2 muestra una gráfica del movimiento resultante, trazada al estilo de los ejemplos considerados en el capítulo 2. La posición $x(t)$ consta de una secuencia de segmentos de parábola unidos suavemente, como es siempre el caso del movimiento con aceleración constante. La

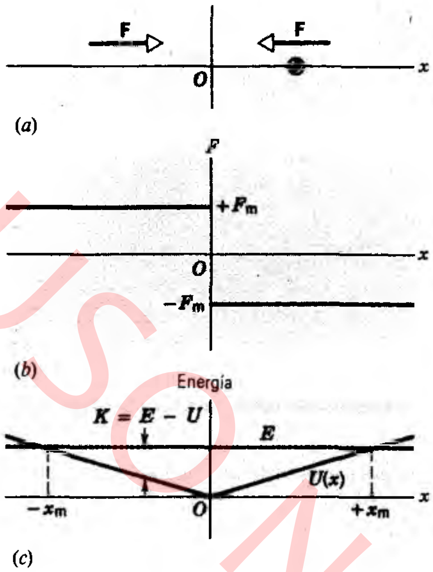

Figura 1 (a) Una fuerza constante **F** que está siempre dirigida hacia el origen actúa sobre una partícula. (b) Diagrama de esta fuerza seccionalmente constante, igual a $+F_m$ cuando $x < 0$ y a $-F_m$ cuando $x > 0$. Cualquier fuerza real de este tipo debe estar representada por una función continua, aun cuando pueda ser de pendiente muy grande al pasar por $x = 0$. (c) La energía potencial que corresponde a esta fuerza. Si el sistema tiene una energía mecánica total E, entonces la diferencia $E - U$ da la energía cinética en cualquier posición.

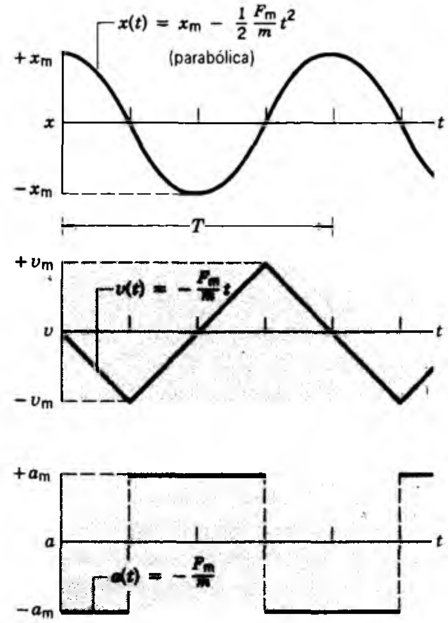

Figura 2 La posición, la velocidad, y la aceleración de la partícula de la figura 1 graficadas en función del tiempo. La aceleración consta de segmentos horizontales alternativos con valores $+F_m/m$ y $-F_m/m$; la velocidad consta de segmentos lineales alternativos con pendientes $+F_m/m$ y $-F_m/m$, y la posición consista de secciones de parábola unidas suavemente. Puesto que la fuerza $F(x)$ es en realidad una función continua, $a(t)$ es también continua, teniendo los segmentos horizontales uniones muy empinadas. Además, los picos agudos de $v(t)$ están redondeados. Sin embargo, las curvas que se muestran son aproximaciones excelentes si la fuerza cambia de $+F_m$ a $-F_m$ durante un intervalo de tiempo muy corto.

partícula oscila yendo y viniendo entre $x = +x_m$ y $x = -x_m$. La magnitud del desplazamiento máximo desde el equilibrio (x_m en este caso) se llama *amplitud* de movimiento. El tiempo necesario para un ciclo completo (una repetición completa del movimiento) se llama *periodo T*, como se indica en la figura 2a. El número de ciclos por unidad de tiempo recibe el nombre de *frecuencia* ν. La frecuencia y el periodo son recíprocos entre sí:

$$\nu = 1/T. \tag{1}$$

El periodo se mide en unidades de tiempo (segundos, por ejemplo), mientras que la frecuencia se mide en una unidad SI: el hertz (Hz),* donde 1 Hz = 1 ciclo/s. Entonces, por ejemplo, una oscilación con un periodo de $T = 5$ s tiene una frecuencia $\nu = 0.2$ Hz.

Hasta ahora hemos usado una descripción dinámica de la oscilación, pero a menudo es conveniente una descripción en función de la energía. La figura 1c muestra la energía potencial que corresponde a la fuerza de la figura 1b. Nótese que, como se indica con la expresión $F = -dU/dx$, el negativo de la pendiente de $U(x)$ da la fuerza. La energía mecánica $E = K + U$ permanece constante en un sistema aislado. En cada punto, la diferencia $E - U$ da la energía cinética K en ese punto. Si extendemos la gráfica a desplazamientos suficientemente grandes, eventualmente llegaríamos a posiciones en las que $E = U$ y entonces $K = 0$. En estos puntos, como lo muestra la figura 2, la velocidad es cero y la posición es $x = \pm x_m$. Estos puntos se llaman los *puntos de retorno* del movimiento.

Las figuras 1b y 1c ilustran dos maneras equivalentes de describir las condiciones de la oscilación: la fuerza debe actuar siempre para restituir la partícula al equilibrio, y la energía potencial debe tener un mínimo en la posición de equilibrio.

Siempre agrada trabajar con el caso de la aceleración constante, porque la matemática es sencilla, pero rara vez constituye una descripción precisa de la naturaleza. La figura 3a muestra un ejemplo de una fuerza más realista que puede producir un movimiento oscilatorio. Tal fuerza es la causa del enlace de las moléculas que contienen dos átomos. La fuerza aumenta rápidamente si tratamos de empujar a un átomo más cerca del otro; su componente

* La unidad de frecuencia se llama así en memoria de Heinrich Hertz (1857-1894), cuya investigación proporcionó la confirmación experimental de las ondas electromagnéticas.

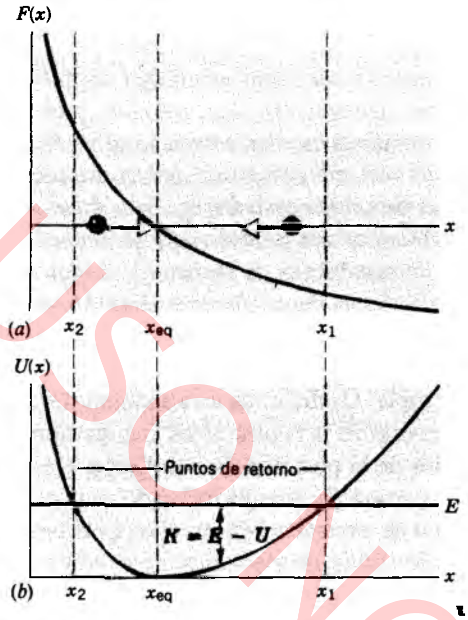

Figura 3 (*a*) La fuerza que actúa sobre una partícula que oscila entre los límites x_1 y x_2. Nótese que la fuerza tiende siempre a empujar a la partícula hacia su posición de equilibrio, como en la figura 1. Tal fuerza puede actuar sobre un átomo en una molécula. (*b*) La energía potencial correspondiente a esta fuerza.

de repulsión impide que la molécula se colapse. Cuando tratamos de jalar a los átomos hacia espaciamientos más grandes, la fuerza trata de oponerse a nuestros intentos; esta fuerza puede ser una fuerza electrostática entre dos cargas eléctricas opuestas, pero a menudo es más compleja e implica la distribución espacial de las órbitas electrónicas de los átomos.

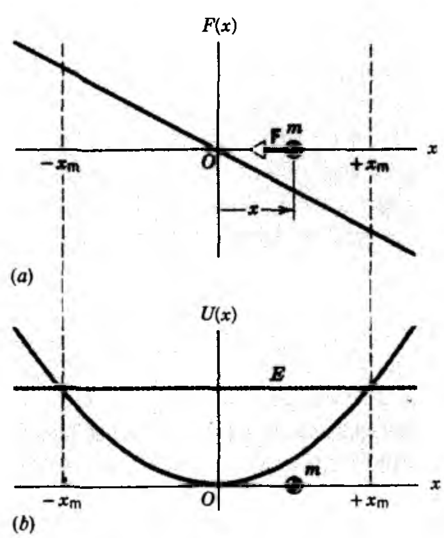

Figura 4 (*a*) La fuerza y (*b*) la energía potencial correspondiente de un oscilador armónico simple. Nótense las similitudes y las diferencias con la figura 3.

La figura 3*b* muestra la función de la energía potencial $U(x)$ correspondiente. Nótese que, como era el caso en la figura 1, la fuerza cambia de signo en la posición de equilibrio, y la energía potencial tiene un mínimo en esa posición. Nótese también que, en este caso, los puntos de cambio (x_1 y x_2 en la Fig. 3) *no* son simétricos respecto a la posición de equilibrio. Si estirásemos la molécula un poco más allá de su configuración de equilibrio y la soltásemos (lo cual ocurre a menudo cuando una molécula absorbe radiación infrarroja), efectuaría un movimiento periódico con respecto a la posición de equilibrio, aunque la descripción matemática sería más compleja que la de la figura 2. El estudio de estas oscilaciones es una técnica importante para el entendimiento de la estructura molecular, lo cual trataremos en la sección 15-10.

15-2 EL OSCILADOR ARMÓNICO SIMPLE

El movimiento de una partícula en un sistema complejo, como el átomo de la molécula en vibración tratado en la sección anterior, es más fácil de analizar si consideramos que el movimiento es una superposición de oscilaciones *armónicas*, las cuales pueden describirse en términos de funciones seno y coseno.

Consideremos un sistema oscilatorio consistente en una partícula sometida a una fuerza

$$F(x) = -kx, \tag{2}$$

donde k es una constante y x es el desplazamiento de la partícula a partir de su posición de equilibrio. Tal sistema oscilatorio recibe el nombre de *oscilador armónico simple*, y su movimiento se llama *movimiento armónico simple*. La energía potencial que corresponde a esta fuerza es

$$U(x) = \tfrac{1}{2}kx^2. \tag{3}$$

La fuerza y la energía potencial están, por supuesto, relacionadas por $F(x) = -dU/dx$. Como vimos por la ecuación 2 y como podemos apreciar en la gráfica de la figura 4*a*, la fuerza que actúa sobre la partícula es directamente proporcional al desplazamiento pero opuesta a él en dirección. La ecuación 3 muestra que la energía potencial varía con el cuadrado del desplazamiento, como lo ilustra la curva parabólica de la figura 4*b*.

Usted reconocerá las ecuaciones 2 y 3 como las expresiones de la fuerza y de la energía potencial de un resorte "ideal" con constante de fuerza k, comprimido o estirado en una distancia x; véase la sección 8-3. De aquí que *un cuerpo de masa m unido a un resorte ideal con constante de fuerza k y libre de moverse sobre una superficie horizontal sin fricción es un ejemplo de un oscilador armónico simple* (véase la Fig. 5). Nótese que existe una posición

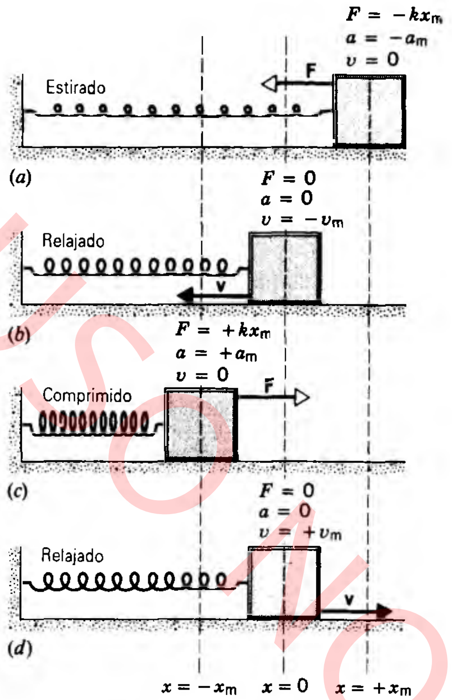

Figura 5 Oscilador armónico simple, consistente en un resorte que actúa sobre un cuerpo que se desliza en una superficie horizontal sin fricción. En (*a*), el resorte se estira de modo que el cuerpo tenga su desplazamiento máximo a partir del equilibrio. En (*c*) el resorte está totalmente comprimido. En (*b*) y (*d*), el cuerpo pasa por la posición de equilibrio con velocidad máxima y con el resorte relajado.

(la posición de equilibrio; véase la Fig. 5*b*) en que el resorte no ejerce ninguna fuerza sobre el cuerpo. Si el cuerpo se desplaza hacia la derecha (como en la Fig. 5*a*), la fuerza ejercida por el resorte sobre el cuerpo apunta hacia la izquierda. Si el cuerpo se desplaza hacia la izquierda (como en la Fig. 5*c*), la fuerza apunta hacia la derecha. En cada caso la fuerza es una *fuerza de restitución.* (Concretamente aquí, es una fuerza de restitución *lineal*, esto es, proporcional a la primera potencia de x.)

Apliquemos la segunda ley de Newton, $F = ma$, al movimiento de la figura 5. Sustituimos a F por $-kx$ y en vez de la aceleración a ponemos d^2x/dt^2 ($= dv/dt$). Esto nos da

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{4}$$

La ecuación 4 recibe el nombre de *ecuación del movimiento* del oscilador armónico simple. Su solución, la cual describiremos en la siguiente sección, es una función $x(t)$ que describe la posición del oscilador en función del tiempo, en analogía con la figura 2*a*, la cual representa la variación de la posición con el tiempo de un oscilador diferente.

El problema del oscilador armónico simple es importante por dos razones. Primera, muchos problemas que implican vibraciones mecánicas con amplitudes pequeñas se reducen al del oscilador armónico simple, o a una combinación de tales osciladores. Esto equivale a decir que si consideramos una porción suficientemente pequeña de la curva de una fuerza de restitución cerca de la posición de equilibrio, la figura 3*a*, por ejemplo, resulta arbitrariamente cercana a una línea recta, la cual, como lo muestra la figura 4*a*, es característica del movimiento armónico simple. O, dicho de otra manera, la curva de la energía potencial de la figura 3*b* es casi parabólica en las proximidades de la posición de equilibrio.

Segunda, como lo hemos ya indicado, ecuaciones como la ecuación 4 se presentan en muchos problemas físicos de acústica, de óptica, de mecánica, de circuitos eléctricos, e incluso de física atómica. El oscilador armónico simple exhibe características comunes a muchos sistemas físicos.

15-3 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Resolvamos ahora la ecuación del movimiento del oscilador armónico simple,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Obtuvimos la ecuación 4 para una fuerza $F = -kx$ de un resorte (donde la constante de fuerza k es una medida de la rigidez del resorte) que actúa sobre una partícula de masa m. Veremos más adelante que otros sistemas oscilatorios se rigen por ecuaciones de movimiento similares, en las que la constante k se relaciona con otras características físicas del sistema. Podemos usar el sistema oscilatorio masa-resorte como nuestro prototipo.

La ecuación 4 da una relación entre una función del tiempo $x(t)$ y su segunda derivada con respecto al tiempo, d^2x/dt^2. Nuestra meta es hallar una función $x(t)$ que satisfaga a esta relación. Comenzaremos por reescribir la ecuación 4 como sigue:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{k}{m}\right)x. \tag{5}$$

La ecuación 5 requiere que $x(t)$ sea una función cuya segunda derivada sea la negativa de la función misma, excepto por un factor constante k/m. Sabemos del cálculo que las funciones seno y coseno tienen esta propiedad. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega \text{ sen } \omega t$$

y

$$\frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = \frac{d}{dt}(-\omega \operatorname{sen}\omega t) = -\omega^2\cos\omega t.$$

La segunda derivada de un coseno (o de un seno) nos da de nuevo la función original multiplicada por un factor negativo $-\omega^2$. Esta propiedad no sufre alteración si multiplicamos a la función coseno por cualquier constante. Elegimos que la constante sea x_m, de modo que el valor máximo de x (la amplitud del movimiento) será x_m.

Escribimos una solución tentativa de la ecuación 5 como:

$$x = x_m\cos(\omega t + \phi). \tag{6}$$

Aquí, puesto que

$$\begin{aligned} x_m\cos(\omega t+\phi) &= x_m\cos\phi\cos\omega t - x_m\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\omega t \\ &= a\cos\omega t + b\operatorname{sen}\omega t, \end{aligned}$$

permitiéndonos la constante ϕ cualquier combinación de soluciones seno y coseno.

Con las constantes (todavía) desconocidas x_m, ω, y ϕ, hemos escrito una solución de la ecuación 5 en la forma más general posible. Para determinar estas constantes de modo que la ecuación 6 sea realmente la solución de la ecuación 5, diferenciamos a la ecuación 6 dos veces con respecto al tiempo. Tenemos que

$$\frac{dx}{dt} = -\omega x_m\operatorname{sen}(\omega t+\phi)$$

y

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_m\cos(\omega t+\phi).$$

Poniendo esto en la ecuación 5, obtenemos

$$-\omega^2 x_m\cos(\omega t+\phi) = -\frac{k}{m}x_m\cos(\omega t+\phi).$$

Por lo tanto, si elegimos a la constante ω de modo que

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \tag{7}$$

entonces la ecuación 6 es, de hecho, una solución de la ecuación del movimiento de un oscilador armónico simple.

Las constantes x_m y ϕ están todavía indeterminadas y, por lo tanto, son aún completamente arbitrarias. Esto significa que *cualquier* elección de x_m y de ϕ satisfarán a la ecuación 5, de modo que es posible una gran variedad de movimientos del oscilador (todos los cuales tienen la misma ω). Más adelante veremos que x_m y ϕ se determinan para un movimiento armónico en particular por la forma en que se inicie el movimiento.

Veamos el significado físico de la constante ω. Si incrementamos el tiempo t en la ecuación 6 en $2\pi/\omega$, la función resulta

$$\begin{aligned} x &= x_m\cos[\omega(t+2\pi/\omega)+\phi] \\ &= x_m\cos(\omega t + 2\pi + \phi) \\ &= x_m\cos(\omega t+\phi). \end{aligned}$$

Es decir, la función simplemente se vuelve a repetir después de un tiempo $2\pi/\omega$. Por lo tanto, $2\pi/\omega$ es el periodo del movimiento T. Puesto que $\omega^2 = k/m$, tenemos

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{8}$$

De aquí que todos los movimientos dados por la ecuación 5 tengan el mismo periodo de oscilación, el cual se determina solamente por la masa m de la partícula oscilatoria y la constante de fuerza k del resorte. La frecuencia ν del oscilador es el número de vibraciones completas por unidad de tiempo y está dada por

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{9}$$

De aquí que

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{10}$$

La cantidad ω se denomina *frecuencia angular*; difiere de la frecuencia ν en un factor 2π. Tiene la dimensión del recíproco del tiempo (lo mismo que la velocidad angular), y su unidad es el radián/segundo. En la sección 15-6 ofreceremos un significado geométrico de esta frecuencia angular.

La constante x_m tiene un significado físico sencillo. La función coseno toma valores desde -1 hasta $+1$. El desplazamiento x desde la posición de equilibrio central $x = 0$ tiene por lo tanto un valor máximo de x_m; véase la ecuación 6. Llamamos a x_m la *amplitud* del movimiento. Como x_m no está determinada por la ecuación 4, son posibles movimientos de varias amplitudes, pero todos tienen la misma frecuencia y periodo. *La frecuencia de un movimiento armónico simple es independiente de la amplitud del movimiento.*

La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama *fase* del movimiento y llamamos a la constante ϕ *constante de fase*. Dos movimientos pueden tener la misma amplitud y frecuencia pero diferir en fase. Si $\phi = -\pi/2 = -90°$, por ejemplo,

$$\begin{aligned} x = x_m\cos(\omega t+\phi) &= x_m\cos(\omega t - 90°) \\ &= x_m\operatorname{sen}\omega t \end{aligned}$$

de modo que el desplazamiento es cero en el tiempo $t = 0$. Por otra parte, si $\phi = 0$, el desplazamiento $x = x_m\cos\omega t$ tiene su valor máximo $x = x_m$ en el tiempo $t = 0$. Otros desplazamientos iniciales corresponden a otras constantes de fase. Véase el problema muestra 3 para un ejemplo del método para hallar a x_m y ϕ a partir del desplazamiento y velocidad iniciales.

La amplitud x_m y la constante de fase ϕ de la oscilación se determinan por la posición y la velocidad iniciales de

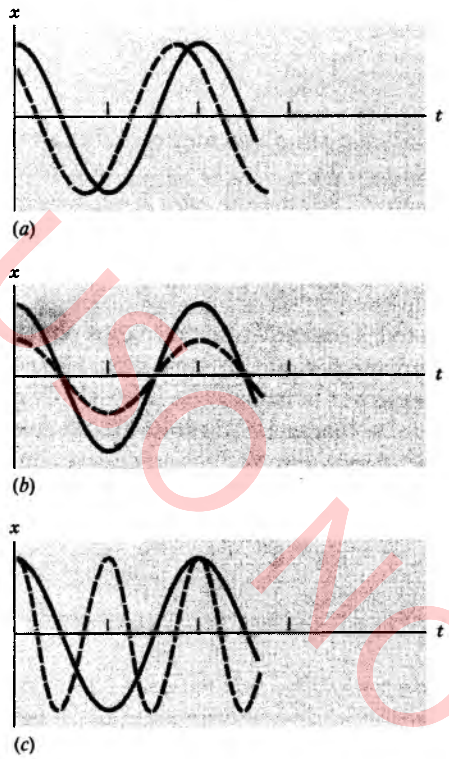

Figura 6 (*a*) Comparación de los movimientos de dos osciladores armónicos simples de la misma amplitud y frecuencia pero con constantes de fase que difieren en 45°. Si el movimiento está representado por la ecuación 6, entonces la curva de línea continua tiene $\phi = 0°$ y la curva punteada tiene $\phi = 45°$. (*b*) Dos movimientos armónicos simples con la misma constante de fase y frecuencia pero que difieren en amplitud por un factor de 2. (*c*) Dos movimientos armónicos simples con la misma amplitud y constante de fase (0°) pero que difieren en frecuencia por un factor de 2. La curva de línea continua tiene el doble del *periodo*, y por lo tanto la mitad de la *frecuencia*, de la curva punteada.

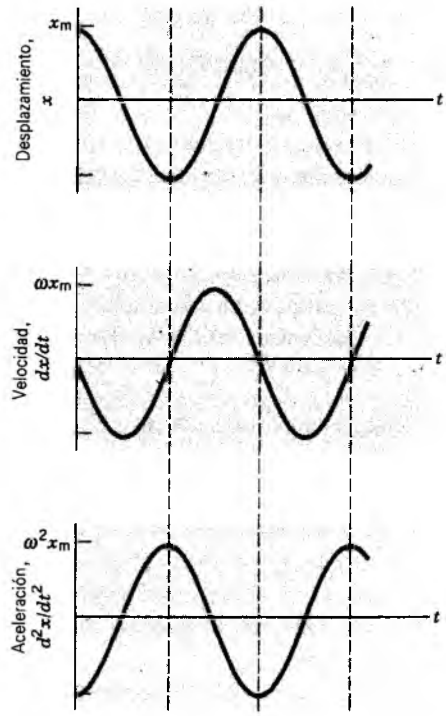

Figura 7 El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración de un oscilador armónico simple, según las ecuaciones 11.

la partícula. Estas dos condiciones iniciales determinan a x_m y ϕ exactamente (excepto que ϕ puede ser aumentada o disminuida en un múltiplo cualquiera de 2π sin que cambie el movimiento). Sin embargo, una vez que haya comenzado el movimiento, la partícula continuará oscilando con una amplitud y constante de fase constantes a una frecuencia fija, a no ser que otras fuerzas alteren el sistema.

En la figura 6 trazamos el desplazamiento x contra el tiempo t de varios movimientos armónicos simples descritos por la ecuación 6. Se hacen tres comparaciones; en la figura 6*a*, las dos curvas tienen la misma amplitud y frecuencia pero difieren en fase en $\phi = \pi/4$, o 45°. En la figura 6*b*, las dos curvas tienen la misma frecuencia y constante de fase pero difieren en amplitud por un factor de $\frac{1}{2}$, o en periodo por un factor de 2. Conviene estudiar estas curvas cuidadosamente para familiarizarse con la terminología empleada en el movimiento armónico simple.

Otra característica distintiva del movimiento armónico simple es la relación entre el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración de una partícula oscilatoria. Comparemos estas cantidades. En la figura 7 trazamos separadamente el desplazamiento x contra el tiempo t, la velocidad $v = dx/dt$ contra el tiempo t, y la aceleración $a = dv/dt = d^2x/dt^2$ contra el tiempo t. Las ecuaciones de estas curvas son

$$\begin{aligned} x &= x_m \cos(\omega t + \phi), \\ v &= \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \operatorname{sen}(\omega t + \phi), \\ a &= \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{11}$$

Para el caso graficado hemos tomado $\phi = 0$. Se omiten las unidades y la escala del desplazamiento, la velocidad, y la aceleración para mayor simplificación de la comparación. El desplazamiento, la velocidad, y la aceleración oscilan todas armónicamente. Nótese que el desplazamiento máximo (amplitud) es x_m, la velocidad máxima (amplitud de velocidad) es ωx_m, y la aceleración máxima (amplitud de aceleración) es $\omega^2 x_m$.

Cuando el desplazamiento es un máximo en cualquier dirección, la velocidad es cero porque ésta debe ahora cambiar su dirección. La aceleración en este instante, así como la fuerza de restitución, tiene una magnitud máxima pero está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento. Cuando el desplazamiento es cero, la velocidad de la partícula es máxima y la aceleración es cero, correspondiendo a una fuerza de restitución nula. La velocidad aumenta cuando la partícula se mueve hacia la posición de equilibrio y luego disminuye cuando se mueve hacia la posición de desplazamiento máximo. Compárese la figura 7 con la figura 2, y obsérvense sus similitudes y diferencias.

Problema muestra 1 Cierto resorte cuelga verticalmente. Cuando se suspende de él un cuerpo de masa M = 1.65 kg, su longitud aumenta en 7.33 cm. El resorte se monta luego horizontalmente, y se une a él un bloque de masa m = 2.43 kg. El bloque tiene la libertad de deslizarse a lo largo de una superficie horizontal sin fricción, como en la figura 5. (*a*) ¿Cuál es la constante k de la fuerza del resorte? (*b*) ¿Qué fuerza horizontal se requiere para estirar al resorte una distancia de 11.6 cm? (*c*) Cuando el bloque se desplaza a una distancia de 11.6 cm y luego se suelta, ¿con qué periodo oscilará?

Solución (*a*) La constante de fuerza k se determina a partir de la fuerza Mg necesaria para estirar el resorte en la distancia medida de 7.33 cm. Cuando el cuerpo suspendido está en equilibrio, la fuerza del resorte kx equilibra al peso Mg:

$$kx = Mg$$

$$k = Mg/x = (1.65\text{ kg})(9.80\text{ m/s}^2)/(0.0733\text{ m}) = 221\text{ N/m}.$$

(*b*) La magnitud de la fuerza necesaria para estirar el resorte en 11.6 cm se determina a partir de la ley de Hooke (Ec. 2) utilizando la constante de fuerza k que obtuvimos en la parte (*a*):

$$F = kx = (221\text{ N/m})(0.116\text{ m}) = 25.6\text{ N}.$$

(*c*) El periodo es independiente de la amplitud y depende solamente de los valores de la masa del bloque y de la fuerza constante. Según la ecuación 8,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2.43\text{ kg}}{221\text{ N/m}}} = 0.6589\text{ s} = 659\text{ ms}.$$

(Mostramos el valor de T con cuatro cifras significativas, más de las justificadas por los datos de entrada, porque necesitaremos este resultado en la solución del problema muestra 3. Para evitar errores de redondeo en etapas intermedias, es una práctica normal considerar un exceso de cifras significativas de esta manera. El resultado final, por supuesto, debe ser redondeado apropiadamente.)

15-4 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

En el movimiento armónico, incluyendo el movimiento armónico simple, en el cual no actúan fuerzas disipativas, la energía mecánica total E (= $K + U$) se conserva (permanece constante). Ahora podemos estudiar esto con más detalle en el caso especial del movimiento armónico simple, para el cual el desplazamiento está dado por

$$x = x_m \cos(\omega t + \phi).$$

La energía potencial U en cualquier instante está dada por

$$U = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi). \tag{12}$$

La energía potencial oscila entonces con el tiempo y tiene un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, la energía potencial varía entre cero y este valor máximo, como lo muestran las curvas de las figura 8*a* y 8*b*.

La energía cinética K en cualquier instante es $\frac{1}{2}mv^2$. Usando la ecuación 11 para $v(t)$ y la ecuación 7 para ω^2, obtenemos

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi). \end{aligned} \tag{13}$$

La energía cinética, al igual que la energía potencial, oscila con el tiempo y tiene un valor máximo de $\frac{1}{2}kx_m^2$. Durante el movimiento, la energía cinética varía entre cero y este valor máximo, como lo muestran las curvas en las figuras 8*a* y 8*b*. Nótese que las energías cinética y potencial varían con el doble de la frecuencia (mitad del periodo) del desplazamiento y de la velocidad. ¿Puede usted explicar esto?

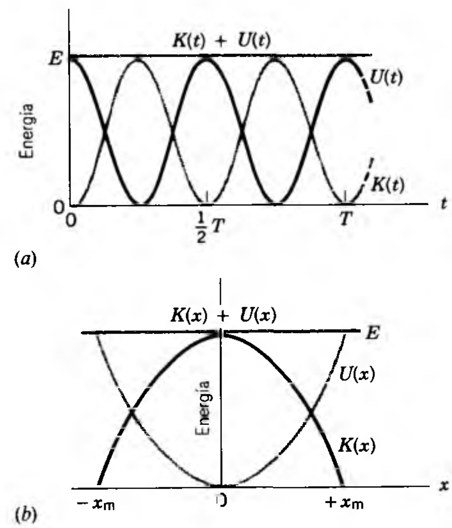

Figura 8 La energía potencial U, la energía cinética K, y la energía mecánica total E de una partícula que efectúa un movimiento armónico simple se muestran en función de (*a*) el tiempo y (*b*) el desplazamiento. Nótese que en (*a*) las energías potencial y cinética pueden alcanzar cada una sus máximos dos veces durante cada periodo del movimiento. Véase también la figura 6 del capítulo 8.

La energía mecánica total es la suma de la energía cinética y de la energía potencial. Usando las ecuaciones 12 y 13, obtenemos

$$E = K + U = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \operatorname{sen}^2(\omega t + \phi) + \tfrac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$
$$= \tfrac{1}{2}kx_m^2 \,. \qquad (14)$$

Vemos que la energía mecánica total es constante, como lo esperábamos, y tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En el desplazamiento máximo la energía cinética es cero, pero la energía potencial tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En la posición de equilibrio la energía potencial es cero, pero la energía cinética tiene el valor $\frac{1}{2}kx_m^2$. En otras posiciones las energías potencial y cinética contribuyen cada una con términos cuya suma es siempre $\frac{1}{2}kx_m^2$. Esta energía total constante E se muestra en las figuras 8*a* y 8*b*. La energía total de una partícula que efectúa un movimiento armónico simple es proporcional al cuadrado de la amplitud del movimiento. Puede demostrarse (véase el problema 38) que la energía cinética promedio del movimiento durante un periodo es exactamente igual a la energía potencial promedio y que cada una de estas cantidades promedio es la mitad de la energía total, o sea $\frac{1}{4}kx_m^2$.

La ecuación 14 puede escribirse en forma bastante general como:

$$K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}kx_m^2 \,. \qquad (15)$$

A partir de esta relación obtenemos $v^2 = (k/m)(x_m^2 - x^2)$, o sea

$$v = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)}\,. \qquad (16)$$

Esta relación muestra claramente que la velocidad es un máximo en la posición de equilibrio ($x = 0$) y es cero en los desplazamientos extremos ($x = \pm x_m$). De hecho, podemos partir de la conservación de la energía, ecuación 15 (en la cual $\frac{1}{2}kx_m^2 = E$), y por integración de la ecuación 16 obtener el desplazamiento en función del tiempo. El resultado es idéntico al de la ecuación 6, la cual deducimos de la ecuación del movimiento, ecuación 4. (Véase el problema 32.)

Problema muestra 2 La combinación bloque-resorte del problema muestra 1 se estira en dirección positiva x una distancia de 11.6 cm del equilibrio y luego se suelta. (*a*) ¿Cuál es la energía total almacenada en el sistema? (*b*) ¿Cuál es la velocidad máxima del bloque? (*c*) ¿Cuál es la aceleración máxima? (*d*) Si el bloque se suelta en t = 0, ¿cuáles son su posición, su velocidad, y su aceleración en t = 0.215 s?

Solución (*a*) La amplitud del movimiento está dada por x_m = 0.116 m. La energía total está dada por la ecuación 14:

$$E = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}(221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m})^2 = 1.49 \text{ J}.$$

(*b*) La energía cinética máxima es numéricamente igual a la energía total; cuando U = 0, $K = K_{max} = E$. La velocidad máxima es, entonces,

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2K_{máx}}{m}} = \sqrt{\frac{2(1.49 \text{ J})}{2.43 \text{ kg}}} = 1.11 \text{ m/s}.$$

(*c*) La aceleración máxima ocurre precisamente en el instante en que el bloque se suelta, cuando la fuerza es máxima:

$$a_{máx} = \frac{F_{máx}}{m} = \frac{kx_m}{m} = \frac{(221 \text{ N/m})(0.116 \text{ m})}{2.43 \text{ kg}} = 10.6 \text{ m/s}^2.$$

(*d*) A partir del periodo obtenido en el problema muestra 1, podemos hallar la frecuencia angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.6589 \text{ s}} = 9.536 \text{ radianes/s}\,.$$

Puesto que el bloque tiene su desplazamiento máximo de x_m = 0.116 m en t = 0, su movimiento puede describirse por una función coseno:

$$x(t) = x_m \cos \omega t,$$

un resultado que se deduce haciendo ϕ = 0 en la ecuación 6. En t = 0.215 s, hallamos

$$x = (0.116 \text{ m}) \cos (9.536 \text{ radians/s})(0.215 \text{ s}) = -0.0535 \text{ m}.$$

Nótese que el ángulo ωt, cuyo coseno debemos hallar, se expresa en radianes. La velocidad está dada por la ecuación 11, la cual, con ϕ = 0, resulta $v(t) = -\omega x_m \operatorname{sen} \omega t$. En 0.215 s, obtenemos

$$v = -(9.536 \text{ radianes/s})(0.116 \text{ m}) \operatorname{sen} (9.536 \text{ radianes/s})(0.215 \text{ s})$$
$$= -0.981 \text{ m/s}.$$

Para hallar la aceleración, usamos de nuevo la ecuación 11 y notamos que, para toda t, $a = -\omega^2 x$:

$$a = -(9.536 \text{ radianes/s})^2 (-0.0535 \text{ m}) = +4.87 \text{ m/s}^2.$$

Examinemos nuestros resultados para ver si son razonables. El tiempo t = 0.215 s está entre $T/4$ = 0.165 s y $T/2$ = 0.330 s. Si el bloque inicia su movimiento en x = +0.116 m, entonces en $T/4$ pasará a través de la posición de equilibrio, y ciertamente es razonable que en t = 0.215 s esté en una posición coordenada x negativa, como ya lo habíamos hallado. Puesto que en ese momento se está moviendo hacia $x = -x_m$, su velocidad debe ser negativa, lo cual coincide con lo que hemos obtenido. Sin embargo, ya pasó a través del punto de velocidad más negativa, y se va haciendo más lento al aproximarse a $x = -x_m$; por lo tanto, la aceleración debe ser positiva. Podemos comprobar el valor de la aceleración a partir de $a = kx/m$. Podemos también comprobar el la relación entre v y x usando la ecuación 16.

Problema muestra 3 El bloque del sistema bloque-resorte del problema muestra 1 es desplazado de la posición de equilibrio por una fuerza externa en dirección x positiva. En t = 0, cuando el desplazamiento del bloque es x = +0.0624 m y su velocidad es v = +0.847 m/s, la fuerza externa se quita y el bloque comienza a oscilar. Escriba una ecuación para $x(t)$ durante la oscilación.

Solución Puesto que tenemos la misma masa (2.43 kg) y la misma fuerza constante (221 N/m), la frecuencia angular es todavía 9.536 radianes/s, como lo obtuvimos en el problema muestra 2. La ecuación más general para $x(t)$ está dada por la ecuación 6,

$$x(t) = x_m \cos (\omega t + \phi),$$

y debemos obtener a x_m y a ϕ para completar la solución. Para hallar a x_m, calculemos la energía total, la cual en $t = 0$ tiene términos tanto de cinética como de potencial:

$$\begin{aligned} E &= K + U = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(2.43\ \text{kg})(0.847\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}(221\ \text{N/m})(0.0624\ \text{m})^2 \\ &= 0.872\ \text{J} + 0.430\ \text{J} = 1.302\ \text{J}. \end{aligned}$$

Haciendo esto igual a $(\frac{1}{2})kx_m^2$, como lo requiere la ecuación 15, tenemos

$$x_m = \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2(1.302\ \text{J})}{221\ \text{N/m}}} = 0.1085\ \text{m}.$$

Para hallar la constante de fase, usamos la información dada para $t = 0$:

$$x(0) = x_m \cos\phi$$

$$\cos\phi = \frac{x(0)}{x_m} = \frac{+0.0624\ \text{m}}{0.1085\ \text{m}} = +0.5751.$$

En el intervalo de 0 a 2π, existen dos valores de ϕ cuyo coseno es +0.5751; los valores posibles son $\phi = 54.9°$ o $\phi = 305.1°$. Cualquiera de ellos satisfará la condición de que $x(0)$ tenga el valor apropiado, pero sólo uno dará la velocidad inicial correcta:

$$\begin{aligned} v(0) &= -\omega x_m \operatorname{sen}\phi = -(9.536\ \text{rad/s})(0.1085\ \text{m}) \operatorname{sen}\phi \\ &= -(1.035\ \text{m/s}) \operatorname{sen}\phi \\ &= -0.847\ \text{m/s para } \phi = 54.9° \\ &= +0.847\ \text{m/s para } \phi = 305.1°. \end{aligned}$$

Obviamente el segundo valor es el correcto, y por lo tanto hacemos que $\phi = 305.1° = 5.33$ radianes. Ahora podemos escribir

$$x(t) = 0.109 \cos(9.54t + 5.33),$$

donde x está en metros y t en segundos.

Véase el problema 31 para una derivación de las relaciones generales que permiten calcular x_m y ϕ a partir de $x(0)$ y $v(0)$.

15-5 APLICACIONES DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Aquí consideraremos unos cuantos sistemas físicos que se mueven con un movimiento armónico simple. A través del texto se hallarán otros.*

El oscilador de torsión

La figura 9 muestra un disco suspendido de un alambre o flecha unido al centro de masa del disco. El alambre está perfectamente fijo a un soporte sólido o abrazadera y al disco. Con el disco en equilibrio, trazamos una línea radial desde su centro a un punto P en su borde, como se muestra. Si hacemos que el disco gire en un plano horizontal de modo que la línea de referencia OP se mueva a la posición OQ, el alambre se retorcerá. El alambre retorcido ejercerá una torca de restitución sobre el disco que tiende a regresar a la línea de referencia a su posición de equilibrio. Para retorcimientos pequeños se halla que la torca de restitución es proporcional al desplazamiento angular (ley de Hooke), de modo que

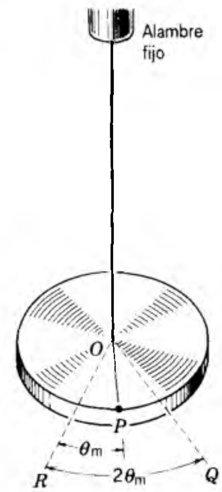

Figura 9 Oscilador de torsión. La línea que va de O a P oscila entre OQ y OR, barriendo un ángulo $2\theta_m$, donde θ_m es la amplitud angular del movimiento.

$$\tau = -\kappa\theta. \tag{17}$$

Aquí κ (la letra griega kappa) es una constante que depende de las propiedades del alambre y se denomina *constante de torsión*. El signo menos muestra que la torca está dirigida en sentido opuesto al desplazamiento angular θ. La ecuación 17 es la condición del *movimiento armónico simple angular*.

La ecuación del movimiento para este sistema se basa en la forma angular de la segunda ley de Newton,

$$\tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}, \tag{18}$$

de modo que, usando la ecuación 17, obtenemos

$$-\kappa\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

o sea

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left(\frac{\kappa}{I}\right)\theta. \tag{19}$$

Nótese el parecido entre la ecuación 19 para el movimiento armónico simple angular y la ecuación 5 para el movimiento armónico simple lineal. De hecho, las ecuaciones

* Para un estudio completo de 16 sistemas físicos que exhiben un movimiento armónico simple véase "A Repertoire of S.H.M.", por Eli Maor, *The Physics Teacher*, octubre de 1972, pág. 377.

son matemáticamente idénticas. Al igual que en el capítulo 11, podemos simplemente sustituir al desplazamiento lineal x, por el desplazamiento angular θ a la masa m, por la inercia de rotación I y a la constante de fuerza κ por la constante de torsión k. Mediante estas sustituciones, hallamos que la solución de la ecuación 19 es una oscilación armónica simple en la coordenada angular θ; es decir,

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \phi). \qquad (20)$$

Aquí θ_m es el desplazamiento angular máximo, esto es, la amplitud de la oscilación angular. Nótese que ω significa aquí la frecuencia angular, no la velocidad angular. En la ecuación 20, $\omega \neq d\theta/dt$

En la figura 9 el disco oscila con respecto a la posición de equilibrio $\theta = 0$, siendo el intervalo angular total $2\theta_m$ (desde OQ hasta OR). Por analogía con la ecuación 8, el periodo de la oscilación es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}. \qquad (21)$$

Si κ es conocida y T se mide, puede determinarse la inercia de rotación I con respecto al eje de rotación de cualquier cuerpo rígido oscilatorio. Si I es conocida y T se mide, puede determinarse la constante de torsión κ de cualquier muestra de alambre.

Un oscilador de torsión como el de la figura 9 se denomina también *péndulo de torsión*. La balanza de Cavendish, usada para medir la constante G de la fuerza gravitatoria (véase el capítulo 16), es un péndulo de torsión. Al igual que el péndulo simple (que trataremos a continuación) el péndulo de torsión se usa a menudo para medir el tiempo, siendo el volante de un reloj mecánico un ejemplo común, donde la torca de restitución es proporcionada por un resorte espiral.

El péndulo simple

Un péndulo simple es un cuerpo idealizado que de una partícula suspendida de un cordón ligero inextensible. Cuando se le lleva a un lado de su posición de equilibrio y se le suelta, el péndulo oscila en un plano vertical bajo la influencia de la gravedad. El movimiento es periódico y oscilatorio. Deseamos determinar el periodo del movimiento.

La figura 10 muestra un péndulo de longitud L y masa m de la partícula. En el instante mostrado, el cordón forma un ángulo θ con la vertical. Las fuerzas que actúan sobre m son el peso $m\mathbf{g}$ y la tensión $\mathbf{T}$ en el cordón. El movimiento tendrá lugar a lo largo de un arco de círculo de radio L, y por lo tanto elegimos a los ejes tangentes al círculo y a lo largo del radio. El peso mg se descompone en una componente radial de magnitud $mg\cos\theta$ y una componente tangencial de magnitud mg sen θ. Las componentes radiales de las fuerzas suministran la aceleración

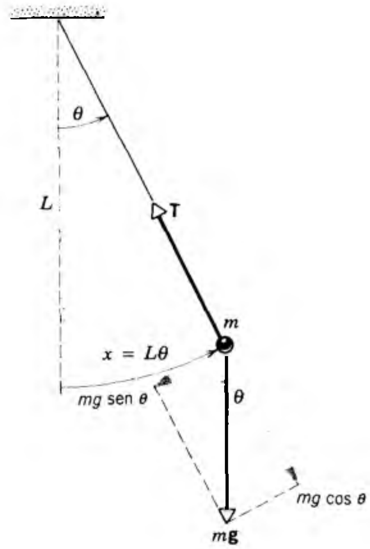

Figura 10 El péndulo simple. Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son la tensión $\mathbf{T}$ y la fuerza gravitatoria $m\mathbf{g}$, la cual se descompone en sus componentes radial y tangencial.

centrípeta necesaria para mantener a la partícula moviéndose en un arco circular. La componente tangencial es la fuerza de restitución que actúa sobre m y que tiende a regresarla a la posición de equilibrio. De aquí que la fuerza de restitución sea

$$F = -mg \text{ sen } \theta, \qquad (22)$$

indicando el signo menos que F es opuesta a la dirección de θ creciente.

Nótese que la fuerza de restitución no es proporcional al desplazamiento angular θ, sino a sen θ. Por lo tanto, el movimiento resultante no es armónico simple. Sin embargo, si el ángulo θ es pequeño, sen θ es aproximadamente igual a θ en radianes. Por ejemplo, si $\theta = 5°$ (= 0.0873 rad), entonces sen θ = 0.0872, el cual difiere de θ por sólo alrededor del 0.1%. El desplazamiento a lo largo del arco es $x = L\theta$, y para ángulos pequeños esto es casi un movimiento en línea recta. Por lo tanto, suponiendo que

$$\text{sen } \theta \approx \theta,$$

obtenemos

$$F = -mg\theta = -mg\frac{x}{L} = -\left(\frac{mg}{L}\right)x. \qquad (23)$$

Para *desplazamientos pequeños*, la fuerza de restitución es proporcional al desplazamiento y opuesta directamente. Éste es exactamente el criterio del movimiento armónico simple y, de hecho, la ecuación 23 tiene la misma forma que la ecuación 2, $F = -kx$, donde la constante mg/L representa a la constante k. (Compruebe que las dimensiones de k y de mg/L son las mismas.) El periodo de un péndulo simple cuando su amplitud es pequeña se halla entonces haciendo a $k = mg/L$ en la ecuación 8:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}}$$

o sea

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{24}$$

Nótese que el periodo es independiente de la masa de la partícula suspendida.

Cuando la amplitud de la oscilación no es pequeña, puede demostrarse* que la ecuación general del periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\operatorname{sen}^2\frac{\theta_m}{2} + \frac{1}{2^2}\frac{3^2}{4^2}\operatorname{sen}^4\frac{\theta_m}{2} + \cdots\right). \tag{25}$$

Aquí θ_m es el desplazamiento angular máximo. Obsérvese que T aumenta cuando la amplitud crece. Los términos sucesivos de la serie infinita se vuelven cada vez más y más pequeños, y el periodo puede calcularse al grado de precisión deseado tomando los suficientes términos. Cuando $\theta_m = 15°$, el periodo real difiere del dado por la ecuación 24 en menos de 0.5%.

Durante los pasados tres siglos, el péndulo ha sido nuestro marcador de tiempo más confiable, sustituido sólo en las últimas décadas por los relojes basados en oscilaciones atómicas o electrónicas. Para que un reloj de péndulo sea un marcador de tiempo preciso, la amplitud de la oscilación debe mantenerse constante a pesar de las pérdidas por fricción que afectan a todos los sistemas mecánicos. Incluso un cambio de amplitud tan pequeño como de 5° a 4° provocaría que el péndulo de un reloj se adelantara en 0.25 minutos por día, cantidad inaceptable incluso para medir el tiempo en el hogar. Para mantener la constante de amplitud en un reloj de péndulo, la energía se suministra automáticamente en pequeños incrementos mediante una pesa o un resorte con la ayuda de un mecanismo de escape que compense las pérdidas por fricción. El reloj de péndulo con escape fue inventado por Christiaan Huygens (1629-1695).

El péndulo simple proporciona también un método conveniente para medir el valor de g, la aceleración debida a la gravedad. Podemos determinar fácilmente a L y a T con una precisión de menos de 0.1% usando el equipo de laboratorio para estudiantes, y entonces la ecuación 24 nos permite determinar a g con esa misma precisión aproximadamente. Con aparatos mejores, ésta puede extenderse hasta alrededor de 0.0001%.

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 5.3.

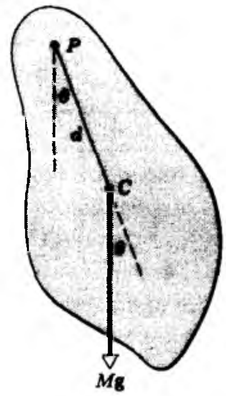

Figura 11 Un péndulo físico. El centro de masa está en C, y el pivote está en el punto P. El péndulo es desplazado un ángulo θ desde su posición de equilibrio, la cual existe cuando C cuelga directamente debajo de P. El peso Mg proporciona la torca de restitución.

El péndulo físico

Cualquier cuerpo rígido montado de manera que pueda oscilar en un plano vertical respecto a algún eje que pase por él recibe el nombre de *péndulo físico*. Ésta es una generalización del péndulo simple, en el cual un cordón sin peso sostiene a una partícula simple. En realidad, los péndulos que utilizamos en la práctica son péndulos físicos.

En la figura 11 un cuerpo de forma irregular está pivotado en torno a un eje horizontal sin fricción que pasa por P y desplazado de la posición de equilibrio en un ángulo θ. La posición de equilibrio es aquella en la que el centro de masa C del cuerpo está verticalmente debajo de P. La distancia desde el pivote al centro de masa es d, la inercia de rotación del cuerpo en torno a un eje que pase por el pivote es I, y la masa del cuerpo es M. La torca de restitución para un desplazamiento angular θ es

$$\tau = -Mgd\operatorname{sen}\theta \tag{26}$$

y se debe a la componente tangencial del peso. Puesto que τ es proporcional a sen θ, y no a θ, la condición para el movimiento armónico simple angular no se cumple aquí, en lo general. Sin embargo, para desplazamientos angulares pequeños, la relación sen $\theta \approx \theta$ es, como antes, una aproximación excelente, de modo que para amplitudes pequeñas,

$$\tau = -Mgd\theta. \tag{27}$$

Esta expresión tiene la forma de la ecuación 17, y el periodo se deduce directamente de la ecuación 21 con la sustitución $\kappa = Mgd$, lo cual da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}. \tag{28}$$

De la ecuación 28 puede despejarse la inercia de rotación I, dando

$$I = \frac{T^2 Mgd}{4\pi^2}\,. \tag{29}$$

Las cantidades a la derecha son todas medibles directamente. De aquí que la inercia de rotación en torno a un eje de rotación (que no pase por el centro de masa) de un cuerpo de cualquier forma puede determinarse suspendiendo al cuerpo de ese eje como un péndulo físico.

El péndulo físico incluye al péndulo simple como un caso especial. Al situar al pivote lejos del objeto, usando un cordón sin peso de longitud L, tendríamos $I = ML^2$ y $d = L$, de modo que

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{ML^2}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\,,$$

que es el periodo de un péndulo simple.

Si la masa de un péndulo físico estuviese concentrada a una distancia L del pivote escogida apropiadamente, el péndulo simple resultante tendría el mismo periodo que el péndulo físico original si

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}}$$

o sea

$$L = \frac{I}{Md}\,. \tag{30}$$

De aquí que, en lo que concierne a su periodo de oscilación, puede considerarse que la masa de un péndulo físico está concentrada en un punto O cuya distancia al pivote es $L = I/Md$. Este punto se llama *centro de oscilación* del péndulo físico. Obsérvese que, en cualquier cuerpo dado, depende de la ubicación del pivote. Además, si pivotamos al péndulo físico original en torno al punto O, tendrá el mismo periodo que si lo pivotamos en torno al punto P.

Problema muestra 4 Una barra uniforme de masa M = 0.112 kg y longitud L = 0.096 m está suspendida de un alambre que pasa por su centro y es perpendicular a su longitud. El alambre se retuerce y la barra se pone en oscilación. Se halla que el periodo es de 2.14 s. Cuando se suspende a un cuerpo plano en forma de triángulo equilátero de manera similar a través de su centro de masa, se halla que el periodo es de 5.83 s. Halle la inercia rotatoria del triángulo respecto a este eje.

Solución La inercia rotatoria de una barra, girada respecto a un eje central perpendicular a su longitud, es $ML^2/12$. De aquí que

$$I_{\text{varilla}} = \frac{(0.112\ \text{kg})(0.096\ \text{m})^2}{12} = 8.60 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2.$$

Según la ecuación 21,

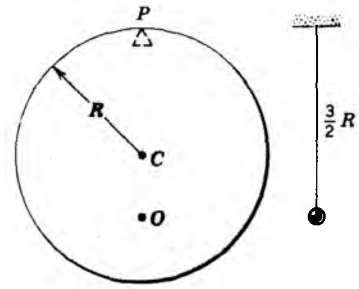

Figura 12 Problema muestra 5. Un disco pivotado en su borde oscila como un péndulo físico. A la derecha se muestra un péndulo simple con el mismo periodo. El punto O es el centro de oscilación.

$$\frac{T_{\text{varilla}}}{T_{\text{triángulo}}} = \left(\frac{I_{\text{varilla}}}{I_{\text{triángulo}}}\right)^{1/2} \quad \text{o} \quad I_{\text{triángulo}} = T_{\text{varilla}}\left(\frac{T_{\text{triángulo}}}{T_{\text{varilla}}}\right)^2,$$

de modo que

$$\begin{aligned} I_{\text{triángulo}} &= (8.60 \times 10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\left(\frac{5.83\ \text{s}}{2.14\ \text{s}}\right)^2 \\ &= 6.38 \times 10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2. \end{aligned}$$

¿Afecta en estos casos la amplitud de cualquier oscilación al periodo?

Problema muestra 5 Un disco uniforme es pivotado en su borde (Fig. 12). Halle su periodo para oscilaciones pequeñas y la longitud del péndulo simple equivalente.

Solución La inercia rotatoria de un disco respecto a un eje que pase por su centro es $\frac{1}{2}MR^2$, donde R es el radio y M es la masa del disco. La inercia rotatoria respecto al pivote en el borde es, usando el teorema de los ejes paralelos,

$$I = \tfrac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \tfrac{3}{2}MR^2.$$

El periodo de este péndulo físico, obtenido a partir de la ecuación 28 con $d = R$, es entonces

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{MR^2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}\,,$$

independiente de la masa del disco.

El péndulo simple que tiene el mismo periodo tiene una longitud

$$L = \frac{I}{MR} = \tfrac{3}{2}R$$

o $\frac{3}{4}$ del diámetro del disco. El centro de oscilación del disco pivotado en P está por lo tanto en O, a una distancia $\frac{3}{2}R$ abajo del punto de soporte. ¿Se requiere del péndulo físico equivalente alguna masa en particular?

Si pivotamos al disco en un punto a medio camino entre el borde y el centro, como en O, hallamos que $I = \frac{1}{2}MR^2 + M(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{3}{4}MR^2$ y $d = \frac{1}{2}R$. El periodo T es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{3}{4}MR^2}{Mg(R/2)}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R}{g}}$$

igual que antes. Esto ilustra la igualdad de los periodos del péndulo físico cuando está pivotado respecto a O y a P.

Si el disco fuera pivotado en el centro, ¿cuál sería su periodo de oscilación?

Problema muestra 6 El centro de oscilación de un péndulo físico tiene otra propiedad interesante. Si una fuerza impulsiva (supuesta horizontal y en el plano de la oscilación) actúa en el centro de oscilación, no se siente ninguna reacción en el punto de soporte. Demuestre esto para una fuerza impulsiva $\mathbf{F}$ que actúe hacia la izquierda en el punto O de la figura 12. Suponga que el péndulo está inicialmente en reposo.

Solución Este es un caso de traslación y rotación combinadas respecto al centro de masa (véase la sección 12-6). El efecto de traslación, al actuar aisladamente, ocasiona que P (junto con todo el disco) en la figura 12 se mueva a la izquierda con una aceleración

$$a_{\text{izq}} = F/M.$$

El efecto rotatorio, al actuar aisladamente, produciría una aceleración angular en sentido horario respecto a C de

$$\begin{aligned}\alpha &= \tau/I \\ &= (F)(\tfrac{1}{2}R)/(\tfrac{1}{2}MR^2) \\ &= F/MR.\end{aligned}$$

Debido a esta aceleración angular, P se movería hacia la derecha con una aceleración

$$\begin{aligned}a_{\text{der}} &= \alpha R \\ &= (F/MR)(R) = F/M.\end{aligned}$$

Entonces $a_{\text{izq}} = a_{\text{der}}$ y no existe movimiento en el punto P.

Cuando se considera desde este punto de vista el centro de oscilación suele llamarse *centro de percusión*. Los jugadores de béisbol saben que, a no ser que el bate encuentre a la bola justamente en el punto correcto (el centro de percusión), el impacto repercutirá en sus manos. La "repercusión" tiene una dirección diferente que depende de si la bola golpea en un lado o en otro de este punto. El "punto amable" de una raqueta de tenis tiene una explicación similar; al golpear la bola en el "punto amable" se *elimina cualquier fuerza de reacción sobre* la mano.*

Problema muestra 7 El periodo de un disco de 10.2 cm de radio que efectúa una pequeña oscilación respecto a un pivote en su borde es de 0.784 s. Halle el valor de g, la aceleración debida a la gravedad en ese lugar.

Solución Partiendo del problema muestra 5, tenemos

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}},$$

y resolviendo para g, obtenemos que

$$g = \frac{6\pi^2 R}{T^2}.$$

* Véase "Physics of the Tennis Racket II: The Sweet Spot", por H. Brody, *American Journal of Physics*, septiembre de 1981, pág. 816.

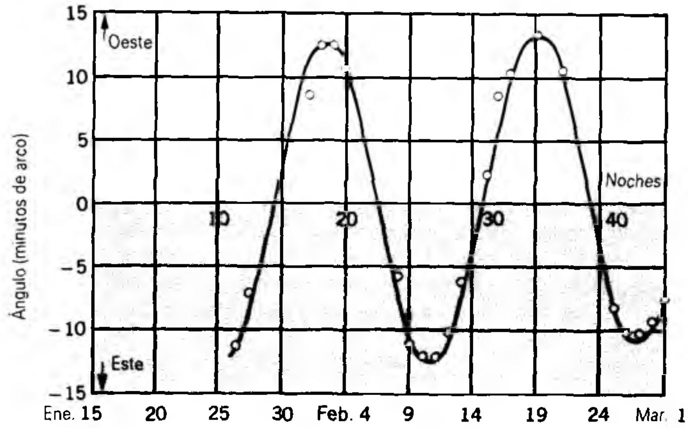

Figura 13 La posición angular en función del tiempo de Calixto, la luna de Júpiter, medida en la Tierra. Los círculos corresponden a las medidas que realizó Galileo en 1610. La curvatura es un óptimo ajuste y sugiere un movimiento armónico simple. Cerca de 400 años después de Galileo, los movimientos de las lunas de Júpiter siguen deleitando a los astrónomos aficionados. Cada mes la revista *Sky and Telescope* publica una carta mostrando sus movimientos en términos de coordenadas angulares que varían sinusoidalmente en forma semejante a esta figura.

Con $T = 0.784$ s y $R = 0.102$ m, hallamos

$$g = \frac{6\pi^2(0.102 \text{ m})}{(0.784 \text{ s})^2} = 9.82 \text{ m/s}^2.$$

15-6 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE Y MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En 1610, Galileo empleó su telescopio recién construido para observar las lunas de Júpiter. Mientras observaba una noche tras otra, medía la posición de cada luna respecto al planeta. Observó que las lunas viajaban de una parte a otra con un movimiento que nosotros llamaríamos armónico simple. La figura 13 muestra los datos originales de Galileo, trazados en forma de gráfica para mostrar el desplazamiento lateral de una luna (Calisto) en función del tiempo. Es evidente la dependencia sinusoidal característica del movimiento armónico simple.

En realidad, Calisto no oscila de un lado a otro; se mueve en órbita casi circular en torno al planeta, y lo que Galileo observó era un movimiento circular uniforme en un plano visto por su borde. Puesto que esto corresponde exactamente a la relación desplazamiento contra tiempo del movimiento armónico simple, podemos concluir que:

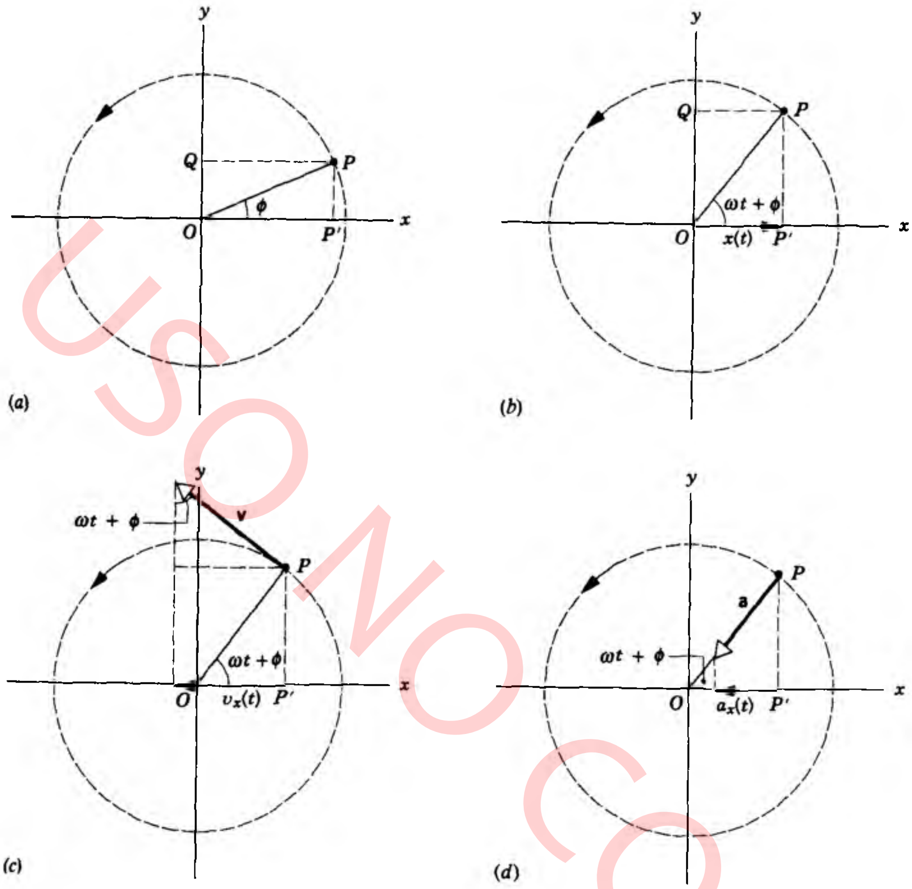

Figura 14 (*a*) Un punto P se mueve a velocidad constante en un círculo de radio R. La línea de referencia forma un ángulo ϕ con el eje x en $t = 0$. La proyección P' sobre el eje x ejecuta un movimiento armónico simple. (*b*) Después de un tiempo t, el punto P ha girado en un ángulo adicional ωt. (c) La velocidad de P y de su componente x, que representa a la velocidad de P' en un movimiento armónico simple. (*d*) La aceleración de P y de su componente x.

El movimiento armónico simple se define como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro del círculo.

Examinemos con mayor detalle la base matemática de esta conclusión. La figura 14 muestra a una partícula P en movimiento circular uniforme; su velocidad angular es ω y el radio del círculo es R. En el tiempo 0 (Fig. 14*a*) el radio OP forma un ángulo ϕ con el eje x. En un tiempo t más tarde (Fig. 14*b*) el radio OP forma un ángulo $\omega t + \phi$ con el eje x, y la proyección de OP a lo largo del eje x (o, lo que es equivalente, la componente x del radiovector que corresponde a OP) es

$$x(t) = R \cos (\omega t + \phi). \tag{31}$$

Esta expresión es, por supuesto, idéntica a la ecuación 6 para el desplazamiento del oscilador armónico simple, correspondiendo x_m a R. Si hacemos que P' represente a la proyección de P sobre el eje x, entonces P' ejecuta un movimiento armónico simple a lo largo del eje x.

En el movimiento circular uniforme, la magnitud de la velocidad tangencial constante es ωR. La figura 14*c* muestra al vector que representa a la velocidad instantánea **v** en el tiempo t. La componente x de **v**, la cual da la velocidad de P' a lo largo de la dirección x, es

$$v_x(t) = -\omega R \text{ sen } (\omega t + \phi). \tag{32}$$

En el movimiento circular, la aceleración centrípeta es $\omega^2 R$, y como se muestra en la figura 14*d*, la componente x de la aceleración de P es

$$a_x(t) = -\omega^2 R \cos (\omega t + \phi). \tag{33}$$

Las ecuaciones 32 y 33 son idénticas a las ecuaciones 11 para el movimiento armónico simple, donde una vez más x_m es reemplazada por R. Así pues, el desplazamiento, la velocidad, y la aceleración son idénticos en el movimiento armónico simple y en la proyección del movimiento circular.

Invirtiendo el argumento anterior, podemos establecer que la ecuación 31 para el desplazamiento de un oscilador armónico simple es suficiente para describir a la componente x de un vector cuya punta trace una trayectoria circular con velocidad constante. Si podemos también describir a la componente y, entonces tendremos una descripción completa del vector. Las figuras 14*a* y 14*b* muestran a la proyección y OQ en los tiempos 0 y t. La componente y puede expresarse por

$$y(t) = R \text{ sen } (\omega t + \phi). \tag{34}$$

Nótese que la proyección del movimiento circular uniforme a lo largo de la dirección y da también el movimiento

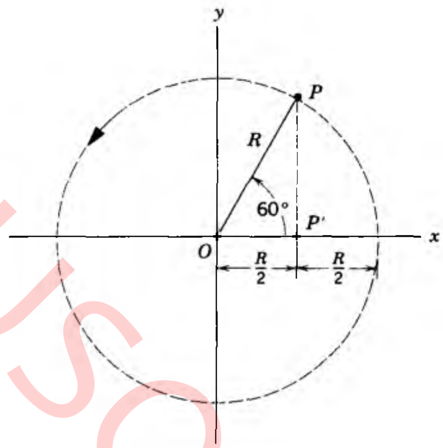

Figura 15 Problema muestra 8. El radio OP se mueve desde $\phi = 0$ en $t = 0$ hasta $\omega t = 60°$ en el tiempo t. La proyección P' se mueve, correspondientemente, desde $x = R$ hasta $x = R/2$.

armónico simple, como lo haría la proyección a lo largo de *cualquier* dirección. Nótese también que, en todo tiempo t, $x^2 + y^2 = R^2$ como lo esperamos para el movimiento circular. A usted le será posible obtener expresiones para la componente y de la velocidad y de la aceleración y demostrar que, como cabía suponer, $v_x^2 + v_y^2 = (\omega^2 R)^2$ y $a_x^2 + a_y^2 = (\omega^2 R)^2$.

Al usar la indentidad trigonométrica sen $\theta = \cos(\theta - \pi/2)$ podemos reescribir la ecuación 34 como:

$$y(t) = R\cos(\omega t + \phi - \pi/2). \tag{35}$$

Entonces el movimiento circular puede considerarse como la combinación de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto, con amplitudes y frecuencias idénticas pero difiriendo en fase en 90°. En la sección próxima veremos cómo pueden analizarse otros movimientos más complicados como combinaciones de movimientos armónicos simples con amplitudes, frecuencias, y fases apropiadamente escogidas.

Problema muestra 8 Consideremos a un cuerpo que efectúa un movimiento armónico simple. La ecuación de ese movimiento es

$$x = 0.35\cos(8.3t),$$

donde x está en metros y t en segundos. Este movimiento puede representarse también como la proyección de un movimiento circular uniforme a lo largo de un diámetro horizontal. (*a*) Dé las propiedades del movimiento circular uniforme correspondiente. (*b*) A partir del movimiento del punto de referencia determine el tiempo requerido para que el cuerpo esté a la mitad del camino hacia el centro de movimiento a partir de su posición inicial.

Solución (*a*) La componente x del movimiento circular está dada por

$$x = R\cos(\omega t + \phi).$$

Por lo tanto, el círculo de referencia debe tener un radio $R = 0.35$ m, la fase inicial o constante de fase debe ser $\phi = 0$, y la velocidad angular debe ser $\omega = 8.3$ rad/s, con objeto de obtener la ecuación $x = 0.35\cos(8.3t)$ para la proyección horizontal.

(*b*) Cuando el cuerpo se mueve a la mitad del camino, el punto de referencia se mueve en un ángulo de $\omega t = \pi/3 = 60°$ (Fig. 15). La velocidad angular es constante e igual a 8.3 rad/s de modo que el tiempo requerido para que se mueva a 60° es

$$t = \frac{60°}{\omega} = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{8.3 \text{ rad/s}} = 0.13 \text{ s}.$$

El tiempo puede calcularse también a partir de la ecuación del movimiento. Con

$$x = 0.35\cos(8.3t) \quad \text{y} \quad x = \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}(0.35),$$

obtenemos

$$\tfrac{1}{2} = \cos(8.3t) \quad \text{o} \quad 8.3t = \cos^{-1}(\tfrac{1}{2}) = \pi/3 \text{ rad}.$$

Por lo tanto

$$t = \frac{\pi/3 \text{ rad}}{8.3 \text{ rad/s}} = 0.13 \text{ s}.$$

15-7 COMBINACIONES DE MOVIMIENTOS ARMÓNICOS

A menudo se combinan dos movimiento armónicos simples en ángulo recto. El movimiento resultante es la suma de dos oscilaciones independientes. Consideremos primero el caso en que las frecuencias de las vibraciones sean las mismas, de modo que

$$x = x_m\cos(\omega t + \phi_x) \quad \text{y} \quad y = y_m\cos(\omega t + \phi_y). \tag{36}$$

Los movimientos x y y pueden tener amplitudes diferentes y constantes de fase diferentes.

Si las constantes de fase son las mismas, el movimiento resultante es una línea recta. Esto puede demostrarse analíticamente al considerar la razón entre las expresiones para x y y en la ecuación 36 cuando $\phi_x = \phi_y$, lo cual da

$$y = (y_m/x_m)x.$$

Ésta es la ecuación de una línea recta, cuya pendiente es y_m/x_m. En las figuras 16*a* y 16*b* se muestra el movimiento resultante en los dos casos, $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$. En estos casos ambos desplazamientos x y y alcanzan un máximo en el mismo tiempo y alcanzan un mínimo en el mismo tiempo. Están *en fase*. El punto P, cuyas coordenadas x y y están dadas por las ecuaciones 36, se mueve de un lado a otro a lo largo de la línea según varíe t.

Si las constantes de fase son diferentes, el movimiento resultante no será una línea recta. Por ejemplo, si las

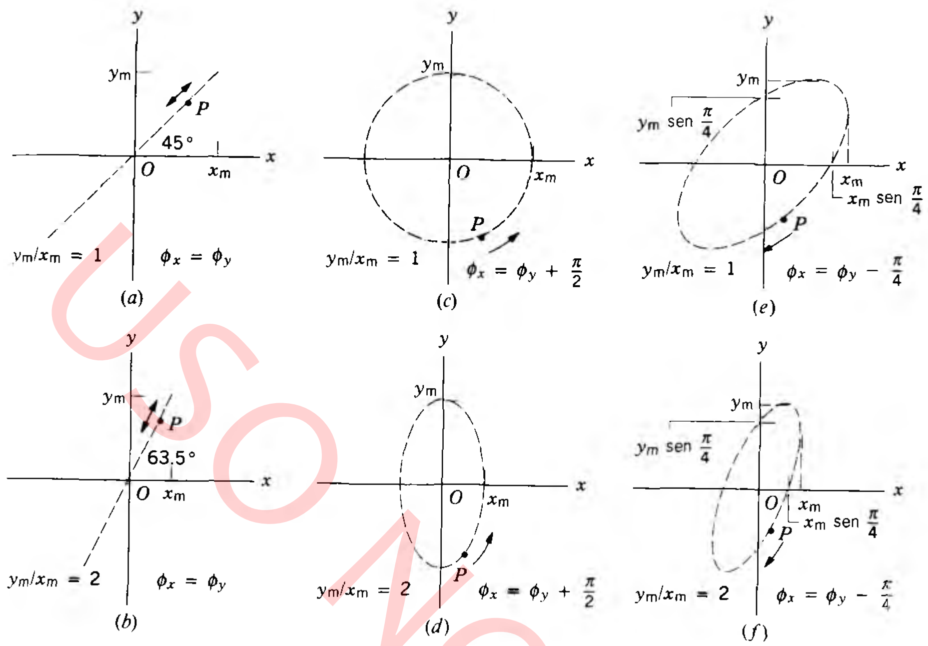

Figura 16 Combinaciones de movimientos armónicos simples a lo largo de dos direcciones perpendiculares. Cada figura muestra el movimiento del punto *P* cuando las amplitudes y las fases de los movimientos guardan las relaciones indicadas. Los movimientos *x* y *y* tienen frecuencias iguales.

constantes de fase difieren en $\pi/2$, el desplazamiento *x* máximo sucede cuando el desplazamiento y sea cero y *viceversa*. Cuando las amplitudes son iguales el movimiento resultante es circular; cuando las amplitudes son desiguales, el movimiento resultante es elíptico. En las figuras 16*c* y 16*d* se muestran dos casos, $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$, siendo $\phi_x = \phi_y + \pi/2$. Los casos $y_m/x_m = 1$ y $y_m/x_m = 2$, siendo $\phi_x = \phi_y - \pi/4$ se muestran en las figuras 16*e* y 16*f*.

Todas las combinaciones posibles de dos movimientos armónicos simples en ángulo recto que tengan la misma frecuencia corresponden a trayectorias elípticas, siendo el círculo y la línea recta casos especiales de una elipse. Esto puede demostrarse analíticamente al combinar las ecuaciones 36 y eliminar al tiempo *t*; usted puede demostrar que la ecuación resultante es la de una elipse. La forma de la elipse depende solamente de la razón entre las amplitudes, y_m/x_m, y de la diferencia de fase entre las dos oscilaciones, $\phi_x - \phi_y$. El movimiento real puede ser bien en sentido horario o bien en sentido antihorario, dependiendo de qué componente se adelante en fase.

Si dos oscilaciones de *frecuencias diferentes* se combinan en ángulo recto, el movimiento resultante es más complicado. El movimiento no es ni siquiera periódico a no ser que las dos frecuencias componentes ω_x y ω_y sean la razón de dos enteros (véase el problema 61). El análisis matemático de tales movimientos suele ser difícil, pero los patrones pueden exponerse gráficamente en la pantalla de un osciloscopio, en la que un haz de electrones puede ser desviado simultáneamente en las direcciones vertical y horizontal por señales electrónicas sinusoidales cuyas frecuencias, amplitudes, y fase relativa pueden variar. La figura 17 es un ejemplo de los patrones complejos y bellos que resultan.

En esta sección hemos considerado solamente combinaciones de movimientos armónicos simples en diferentes direcciones (en ángulo recto entre sí). Las combinaciones de movimientos armónicos simples en la *misma dirección*, con la misma frecuencia pero con amplitudes y fases diferentes, son de interés especial en el estudio de la difracción y la interferencia de la luz, el sonido, y la radiación electromagnética, todo lo cual se estudiará más adelante en el texto. También pueden ser combinadas oscilaciones de frecuencias diferentes en la misma dirección. El tratamiento de este movimiento es particularmente importante en el caso de las vibraciones sonoras que se estudiarán en el capítulo 20.

15-8 MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO *(Opcional)*

Hasta este momento hemos supuesto que no actúan fuerzas de fricción sobre el oscilador. Si esta hipótesis se mantuviese estrictamente, un péndulo o una masa unida a un resorte oscilarían de manera indefinida. En realidad, la amplitud de la oscilación disminuye en forma gradual hasta cero como resultado de la fricción. Se dice que el movimiento está *amortiguado* por la fricción y se le llama *movimiento armónico amortiguado*. A menudo la fricción surge de la resistencia del aire o de fuerzas internas. En la mayoría de los casos de interés la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad del cuerpo pero directamente opuesta a él. En la figura 18 se muestra un ejemplo de un oscilador amortiguado.

La fuerza neta sobre el cuerpo oscilatorio es la suma de la fuerza de restitución $-kx$ y la fuerza de amortiguamiento, la cual suponemos tiene la forma de $-bv$ como en el caso de la fuerza de arranque que se consideró en la sección 6-7. Aquí *b* es una constante positiva, que depende de las propiedades del fluido, como la densidad, y de la forma y dimensiones del objeto

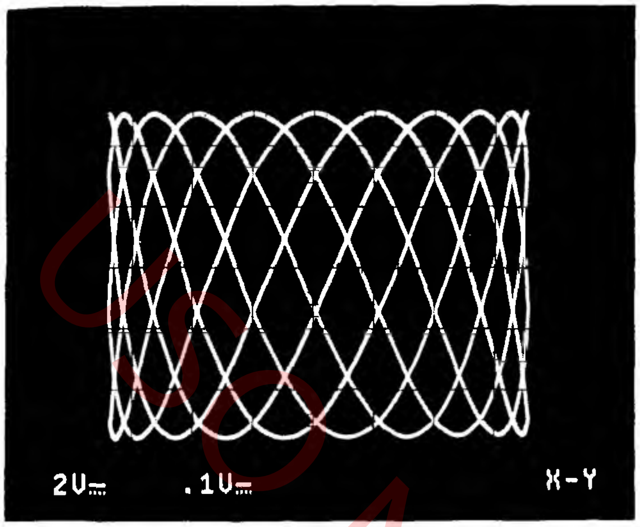

Figura 17 Una figura Lissajous, producida en la pantalla de un osciloscopio cuando las desviaciones horizontal y vertical son señales sinusoidales cuyas frecuencias tienen razones enteras. En el caso que se muestra, la razón de las frecuencias es de 1/20.

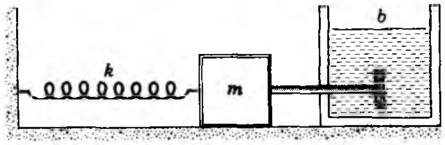

Figura 18 Representación de un oscilador armónico amortiguado. Consideramos que el cuerpo oscilatorio (de masa m) está unido a una tablilla sin masa sumergida en un fluido, donde experimenta una fuerza de amortiguamiento viscoso $-bv$. No consideramos, en cambio, la fricción por deslizamiento en la superficie horizontal.

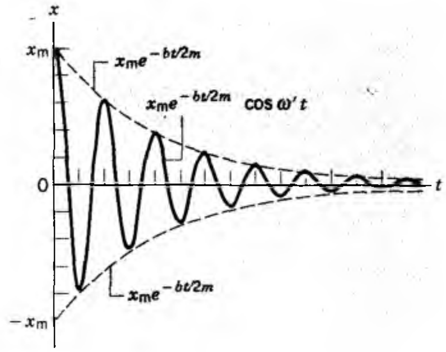

Figura 19 Movimiento armónico amortiguado. El desplazamiento x se grafica contra el tiempo t considerando que la constante de fase ϕ sea 0. El movimiento es oscilatorio, pero la amplitud disminuye exponencialmente con el tiempo.

sumergido. Partiendo de la segunda ley de Newton en la forma $\Sigma F = ma$, obtenemos

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{37}$$

Una solución de esta ecuación (ofrecida aquí sin prueba; véase el problema 63 para su verificación)* es

$$x = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi), \tag{38}$$

donde

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} \tag{39}$$

Esta forma de solución de la ecuación 37 es válida para constantes b de amortiguamiento que sean lo suficientemente pequeñas de modo que la cantidad en el radical de la ecuación 39 sea positiva. En la figura 19 se traza el desplazamiento x en función del tiempo t en este caso.

Existen dos características notables de esta solución. Primeramente, la frecuencia es más pequeña (y el periodo más largo) cuando está presente la fricción. La fricción retarda al movimiento, como cabe esperar. Si no hubiese fricción presente, b sería igual a cero y ω' sería igual a $\sqrt{k/m}$, que es la frecuencia angular ω de un movimiento no amortiguado. Cuando la fricción está presente, ω' es ligeramente menor que ω, como lo muestra la ecuación 39. En el caso mostrado en la figura 19, que representa un fuerte amortiguamiento en el que la amplitud disminuye según un factor de 10 en 5 ciclos, ω' difiere de ω en 0.3% solamente.

En segundo lugar, la amplitud del movimiento, representada en la ecuación 38 por el factor $x_m e^{-bt/2m}$ y en la figura 19 por las curvas de puntos, disminuye exponencialmente hasta cero. El intervalo de tiempo τ durante el cual la amplitud cae a $1/e$ de su valor inicial se llama *vida media* de la oscilación. El factor exponencial en la ecuación 38 tendrá el valor e^{-1} cuando $t = \tau = 2m/b$. Una vez más, si no hubiese fricción presente, b sería igual a cero y la amplitud tendría el valor constante x_m al pasar el tiempo; la vida media sería infinita.

Las ecuaciones 38 y 39 sólo son válidas para $b \leq 2\sqrt{km}$. Si b tiene su mayor valor posible en este intervalo ($b = 2\sqrt{km}$), entonces $\omega' = 0$, y el desplazamiento tiende a cero exponencialmente sin oscilación. La vida media τ tiene su valor más pequeño, el cual puede demostrarse que es igual a ω^{-1}, o sea, el inverso de la frecuencia angular de la oscilación no amortiguada. Esta condición, llamada *amortiguamiento crítico*, es a menudo la meta de los ingenieros mecánicos al diseñar un sistema en el que las oscilaciones desaparezcan en el menor tiempo posible.

En el movimiento armónico amortiguado la energía del oscilador se disipa gradualmente debido a la fricción y cae a cero con el tiempo. En el caso de un amortiguamiento pequeño, cuando la ecuación 38 es válida, podemos aproximar el valor instantáneo de la energía mediante la ecuación 14, reemplazan-

* Para un estudio más completo de la derivación e interpretación de las ecuaciones del oscilador amortiguado, véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 2.9.

do la amplitud x_m (constante) por el valor instantáneo de la amplitud, $x_m e^{-bt/2m}$. Entonces

$$E(t) = \tfrac{1}{2}k(x_m e^{-bt/2m})^2$$
$$= \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}. \qquad (40)$$

Problema muestra 9 En un oscilador amortiguado, como el de la figura 18, sea m = 250 g, k = 85 N/m, y b = 0.070 kg/s. ¿En cuántos periodos de oscilación sería la energía mecánica del oscilador igual a la mitad de su valor inicial?

Solución Para un amortiguamiento pequeño, $\omega' \approx \omega$ y el periodo es

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.25 \text{ kg}}{85 \text{ N/m}}} = 0.34 \text{ s}.$$

En t = 0, la energía mecánica inicial es $\frac{1}{2}kx_m^2$. De la ecuación 40, la energía tendrá la mitad de este valor en un tiempo t determinado a partir de

$$\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}kx_m^2) = \tfrac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}.$$

Despejando a t, obtenemos

$$t = \frac{m \ln 2}{b} = \frac{(0.25 \text{ kg})(\ln 2)}{0.070 \text{ kg/s}} = 2.5 \text{ s}.$$

El tiempo t es alrededor de $7.5T$; entonces se requieren alrededor de 7.5 ciclos de oscilación para que la energía mecánica adquiera la mitad de su valor inicial.

La energía total debe conservarse, por supuesto. ¿A dónde va esta energía? ■

15-9 OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA *(Opcional)*

Hasta ahora hemos discutido solamente las oscilaciones naturales de un cuerpo, es decir, las oscilaciones que ocurren, por ejemplo, cuando el cuerpo es desplazado y luego liberado. Para una masa unida a un resorte la frecuencia *natural* es

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

en ausencia de fricción y

$$\omega' = 2\pi\nu' = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

en presencia de una pequeña fuerza de fricción bv.

Sin embargo, surge una situación diferente cuando el cuerpo se halla sometido a una fuerza externa sinusoidal. Como ejemplos, un puente vibra bajo la influencia de una marcha de soldados; el cárter de un motor vibra por los impulsos periódicos de una irregularidad en la flecha, y nuestro tímpanos vibran cuando se exponen a la fuerza periódica de una onda sonora. Las oscilaciones resultantes se llaman oscilaciones *forzadas*. Estas oscilaciones forzadas tienen la frecuencia de la fuerza externa y no la frecuencia natural del cuerpo. Sin embargo, la respuesta del cuerpo depende de la relación entre las frecuencias forzada y natural. Una sucesión de pequeños impulsos aplicados con la frecuencia apropiada pueden producir una oscilación de gran amplitud. Un niño subido en un columpio aprende a balancearse a intervalos de tiempo apropiados para hacer que el columpio se mueva con una gran amplitud. El problema de las oscilaciones forzadas es muy general. Su solución es útil en sistemas acústicos, en circuitos de corriente alterna, y en la física atómica, así como también en la mecánica.

La ecuación del movimiento de un oscilador forzado se deduce de la segunda ley del movimiento. Además de la fuerza de restitución $-kx$ y de la fuerza de amortiguamiento $-bv$, tenemos también la fuerza externa oscilante aplicada. Para simplificar, hagamos que esta fuerza externa esté dada por F_m cos $\omega''t$. Aquí F_m es el valor máximo de la fuerza externa y $\omega''(= 2\pi\nu'')$ es su frecuencia angular. Podemos imaginar a tal fuerza aplicada directamente a la masa oscilatoria de la figura 18, por ejemplo, reemplazando el muro fijo de la izquierda con un apoyo móvil unido a la flecha de un motor. El motor mueve el apoyo con la frecuencia angular ω''.

Partiendo de la segunda ley de Newton, obtenemos

$$-kx - b\frac{dx}{dt} + F_m \cos \omega''t = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

o sea

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_m \cos \omega''t. \qquad (41)$$

La solución a esta ecuación (que damos sin demostración)* es

$$x = \frac{F_m}{G} \operatorname{sen}(\omega''t - \phi), \qquad (42)$$

donde

$$G = \sqrt{m^2(\omega''^2 - \omega^2)^2 + b^2\omega''^2}, \qquad (43)$$

y

$$\phi = \cos^{-1}\frac{b\omega''}{G}. \qquad (44)$$

Consideremos al movimiento resultante de manera cualitativa.

Nótese (Ec. 42) que el sistema vibra con la frecuencia angular ω''de la fuerza motriz, en lugar de vibrar con su frecuencia natural ω, y que la amplitud del movimiento es constante. Hay amortiguamiento, el cual causaría normalmente una disminución en la amplitud, pero la fuente de la fuerza motriz proporciona la energía necesaria para mantener constante la amplitud. En efecto, el oscilador transporta energía de la fuente motriz al medio de amortiguamiento, donde la energía se disipa.

El caso más sencillo es aquel en el cual no existe amortiguamiento, lo que significa que b = 0 en la ecuación 43. El factor G, que tiene el valor $|m(\omega''^2 - \omega^2)|$ para b = 0, es grande cuando la frecuencia angular ω'' de la fuerza motriz es muy diferente de la frecuencia angular natural no amortiguada ω del sistema. Esto significa que la amplitud del movimiento resultante, F_m/G, es pequeña. Al aproximarse la frecuencia motriz a la frecuencia natural, es decir, cuando $\omega'' \rightarrow \omega$, vemos que $G \rightarrow 0$ y la amplitud $F_m/G \rightarrow \infty$. En realidad, siempre hay algún amortiguamiento de modo que la amplitud de la oscilación, aunque pudiera llegar a ser grande, permanece finita en la práctica.

* Véase K. R. Symon, *Mechanics*, 3a. edición (Addison-Wesley, 1971), sección 2.10. La ecuación 42 es una solución de estado estacionario que se presenta después de que ha transcurrido algún tiempo. Cuando el movimiento comienza, es una superposición de esta solución y de los términos transitorios de vida corta que decaen rápidamente. Examinamos el movimiento después de que estos términos se vuelven despreciables.

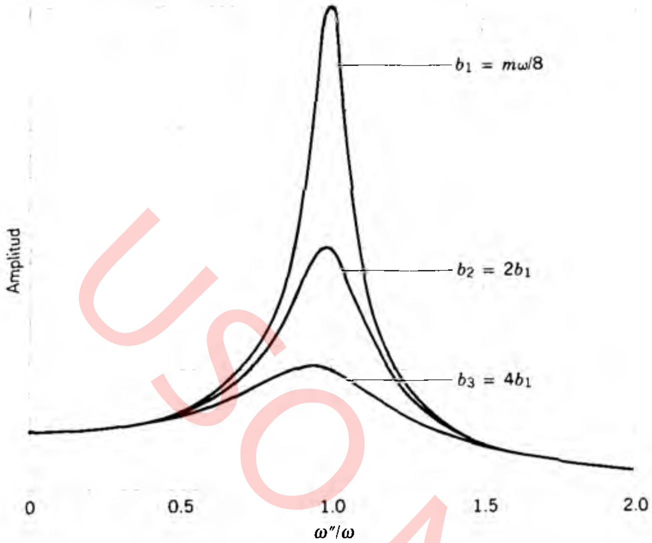

Figura 20 La amplitud F_m/G de un oscilador forzado cuando varía la frecuencia angular ω'' de la fuerza motriz. Las tres curvas corresponden a niveles de amortiguamiento diferentes, correspondiendo al amortiguamiento más pequeño la curva de resonancia de mayor pico.

En osciladores amortiguados (para los cuales $b \neq 0$ en la ecuación 43), existe un valor característico de la frecuencia motriz ω'' para el cual la amplitud de oscilación es un máximo. Esta condición se llama *resonancia* y el valor de ω'' en el que ocurre la resonancia se llama *frecuencia angular resonante*. (La resonancia, que aquí se define como la que ocurre a la frecuencia a la cual las oscilaciones forzadas tienen su amplitud máxima, puede definirse de otras formas como, por ejemplo, la frecuencia a la cual se transfiere la máxima potencia de la unidad motriz al sistema oscilatorio o a la cual la velocidad de la masa oscilatoria es máxima. Las definiciones no son equivalentes; estudiaremos este tema más a fondo cuando tratemos con oscilaciones eléctricas forzadas; véase el problema 68.) Cuanto más pequeño sea el amortiguamiento en un sistema, más cercana se halla la frecuencia angular resonante a la frecuencia angular natural no amortiguada ω. A menudo, el amortiguamiento es lo suficientemente pequeño como para que la frecuencia angular resonante pueda considerarse como igual a la frecuencia angular natural no amortiguada ω con un error pequeño.

En la figura 20 hemos trazado tres curvas que dan la amplitud de las vibraciones forzadas en función de la razón de la frecuencia motriz ω'' a la frecuencia angular natural no amortiguada ω. Cada una de las curvas corresponde a un valor diferente de la constante de amortiguamiento b. Cuando el amortiguamiento es pequeño, la curva de resonancia es aguda y la amplitud alcanza un máximo cuando $\omega'' = \omega$. Al aumentar el amortiguamiento, la curva de resonancia se vuelve más pequeña y más ancha, y la resonancia se desplaza ligeramente de $\omega'' = \omega$.

Todas las estructuras mecánicas, como edificios, puentes, y aeroplanos, tienen una o más frecuencias resonantes naturales. Puede resultar desastroso someter una estructura a una fuerza impulsora externa a una de esas frecuencias. La imagen de la soprano que puede quebrar con su voz una copa de vino es un ejemplo del resultado.

Otro ejemplo de resonancia ocurrió en el puente sobre el estrecho de Tacoma en el estado de Washington (EUA) en 1940. El viento que soplaba en el estrecho de Tacoma se dividió en torbellinos, suministrando así golpes de viento que sacudieron al puente con una frecuencia que igualó a una de sus frecuencias de vibración naturales. El resultado fue un suave movimiento de balanceo vertical, parecido a una montaña rusa, que le valió al puente el sobrenombre de "Galloping Gertie" (Gertrudis galopante). Unos cinco meses después de haberse inaugurado el puente, el suave balanceo oscilatorio se convirtió en violentas oscilaciones torsionantes, que no tardaron en provocar el colapso del puente (Fig. 21). Estas oscilaciones no fueron consecuencia de la resonancia sino de los efectos no lineales debidos a ráfagas de viento particularmente fuertes. Estos efectos complejos no pueden ser analizados en función del oscilador lineal forzado que hemos estudiado aquí. ■

15-10 OSCILACIONES DE DOS CUERPOS *(Opcional)*

A nivel microscópico (moléculas, átomos, núcleos), existen muchos ejemplos de oscilaciones que, de manera aproximada, son armónicas simples. Un ejemplo es la molécula diatómica, en la cual dos átomos están unidos entre sí con una fuerza de la forma ilustrada en la figura 3. Cerca de la posición de equilibrio, la energía potencial puede ser aproximada por una parábola de la forma $U(x) = \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$, y si se la desplaza a una pequeña distancia de x_{eq}, la molécula oscilará respecto a la posición de equilibrio. Para nuestros propósitos, podemos imaginar que la molécula está representada por dos partículas de masas m_1 y m_2 unidas por un resorte de constante de fuerza k, como se muestra en la figura 22. En esta sección examinaremos el movimiento de este sistema.

Una manera de describir el movimiento del sistema es en función de los movimientos separados de las dos partículas, que se localizan en relación al origen O por las dos coordenadas x_1 y x_2, como se muestra en la figura 22a. Como veremos enseguí-

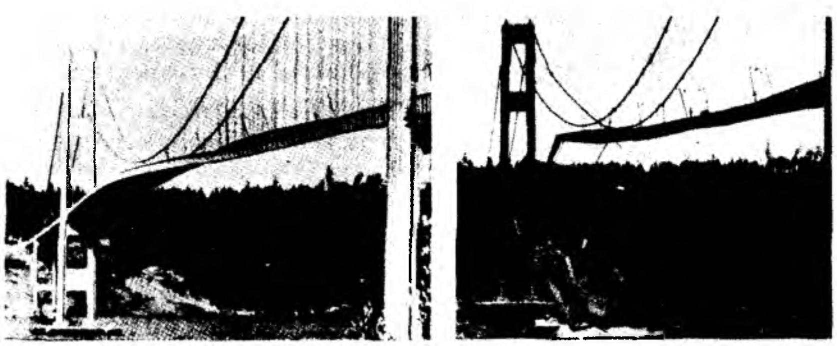

Figura 21 El puente del estrecho de Tacoma en Puget Sound, Washington (EU). Terminado y abierto al tránsito en julio de 1940, de inmediato mostró oscilaciones de balanceo suaves debidas a la resonancia. Más tarde, el puente desarrolló violentas oscilaciones torsionantes que pueden apreciarse en la figura de la izquierda. Finalmente el claro principal se rompió, haciendo que la losa del puente se cayera al agua, como se muestra en la figura de la derecha.

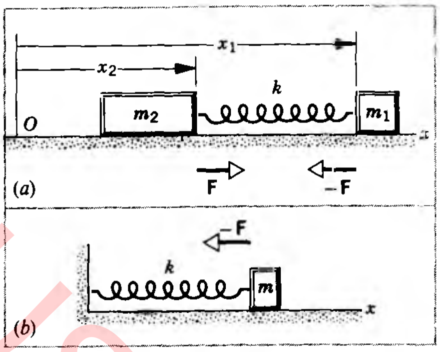

Figura 22 (*a*) Dos cuerpos oscilatorios de masas m_1 y m_2 unidos por un resorte. (*b*) El movimiento relativo puede ser representado por la oscilación de un solo cuerpo que tenga la masa reducida m.

da, esto conduce a una descripción diferente y a menudo más útil, que está dada en función de la separación y de la velocidad *relativas* de las dos partículas. En efecto, reemplacemos a las dos coordenadas x_1 y x_2 por dos coordenadas diferentes: la separación relativa $x_1 - x_2$ y la localización x_{cm} del centro de masa. En ausencia de fuerzas externas, el centro de masa se mueve a velocidad constante, y su movimiento no es de interés real para el estudio de la oscilación del sistema, de modo que podemos analizar al sistema en función de la coordenada relativa únicamente.

La separación relativa $x_1 - x_2$ da la longitud del resorte en cualquier momento. Supongamos que su longitud sin estirar sea L; entonces $x = (x_1 - x_2) - L$ es el cambio de longitud del resorte, y $F = kx$ es la magnitud de la fuerza ejercida sobre *cada partícula* por el resorte. Como se muestra en la figura 22*a*, si el resorte ejerce una fuerza $-\mathbf{F}$ sobre m_1, entonces ejerce una fuerza $+\mathbf{F}$ sobre m_2.

Apliquemos la segunda ley de Newton separadamente a las dos partículas, considerando los componentes de la fuerza a lo largo del eje x:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx,$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = +kx.$$

Ahora, multiplicamos la primera de estas ecuaciones por m_2 y la segunda por m_1, y luego las restamos. El resultado es

$$m_1 m_2 \frac{d^2x_1}{dt^2} - m_1 m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2 kx - m_1 kx,$$

la cual podemos escribir así:

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) = -kx. \tag{45}$$

La cantidad $m_1m_2/(m_1 + m_2)$ tiene la dimensión de una masa y se conoce como *masa reducida* m:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{46}$$

Ya que la longitud de relajamiento L del resorte es una constante, las derivadas de $(x_1 - x_2)$ son las mismas que las derivadas de x:

$$\frac{d}{dt}(x_1 - x_2) = \frac{d}{dt}(x + L) = \frac{dx}{dt},$$

y así la ecuación 45 se convierte en

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Ésta es idéntica en forma a la ecuación 4 para la masa oscilatoria aislada, demostrando entonces que, desde el punto de vista de las oscilaciones, el sistema de la figura 22*a* puede ser reemplazado por una sola partícula, como se representa en la figura 22*b*, con una masa igual a la masa reducida del sistema. En particular, la frecuencia de oscilación del sistema de la figura 22 está dada por la ecuación 9, usando la masa reducida.

Si deseamos examinar el movimiento detallado del sistema, podemos escribir simplemente la solución para $x(t)$, $v(t)$, y $a(t)$, dada por las ecuaciones 11, teniendo en cuenta que x representa la coordenada relativa de las dos partículas y, por lo tanto, v y a representan su velocidad *relativa* $v_1 - v_2$ y su aceleración *relativa* $a_1 - a_2$, respectivamente.

Nótese que la masa reducida m es siempre más pequeña que cualquiera de las otras masas. Si una de las masas es mucho más pequeña que la otra, entonces m es aproximadamente igual a la masa más pequeña. Si las masas son iguales, entonces m es igual a la mitad del tamaño de cualquiera de las masas.

Problema muestra 10 El cloro natural consta de dos isótopos: ^{35}Cl, con 76% de abundancia relativa y masa atómica de

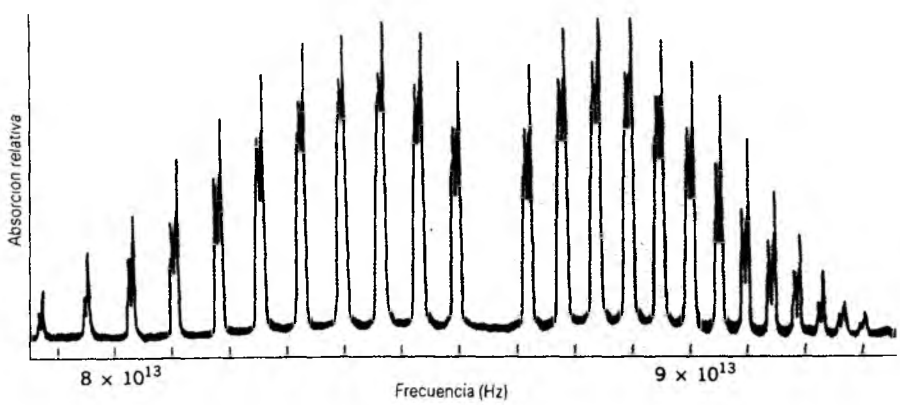

Figura 23 El espectro de absorción de la radiación infrarroja por el HCl molecular. Cada pico corresponde a un cambio en el movimiento vibratorio de las moléculas. Los pares de picos con espaciamiento pequeño se deben a los dos isótopos del Cl.

34.968853 u, y ^{37}Cl, con 24% de abundancia relativa y masa atómica de 36.965903 u. (*a*) ¿Cuál es la masa reducida de una molécula de HCl cuando contiene ^{35}Cl y cuando contiene ^{37}Cl? (*b*) La frecuencia vibratoria de una molécula de HCl es 8.5×10^{13} Hz. Suponiendo que el HCl se comporta como un oscilador simple de dos cuerpos, halle la constante k de la fuerza efectiva.

Solución (*a*) La masa reducida del H^{35}Cl se obtiene a partir de la ecuación 46, usando la masa H de 1.007825 u:

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1.007825 \text{ u})(34.968853 \text{ u})}{1.007825 \text{ u} + 34.968853 \text{ u}} = 0.979593 \text{ u}.$$

Para el H^{37}Cl tenemos similarmente

$$m = \frac{(1.007825 \text{ u})(36.965903 \text{ u})}{1.007825 \text{ u} + 36.965903 \text{ u}} = 0.981077 \text{ u}.$$

(*b*) Resolviendo la ecuación 9 para la constante de fuerza, obtenemos

$$k = 4\pi^2\nu^2 m = 4\pi^2(8.5 \times 10^{13} \text{ Hz})^2(0.98 \text{ u})(1.66 \times 10^{-27} \text{ kg/u})$$
$$= 464 \text{ N/m}.$$

Esto es del mismo orden de magnitud que la constante de fuerza de resortes ordinarios (por ejemplo, véase el problema muestra 1). ¿Puede usted explicar cómo puede ser la constante de fuerza de una molécula la misma que la de un resorte?

Las moléculas pueden absorber o emitir radiación electromagnética y cambiar su estado de movimiento vibratorio en el proceso. De hecho, la observación de la radiación que es absorbida o emitida es una de las maneras que tenemos de aprender acerca de la estructura de las moléculas. La figura 23 muestra un ejemplo del espectro de absorción infrarroja del HCl. Cada pico corresponde a un cambio en el estado vibratorio del HCl cuando absorbe radiación a esa frecuencia. Las dos componentes en cada pico se deben a los dos isótopos del Cl; sus masas diferentes resultan en masas reducidas ligeramente diferentes para las moléculas del H^{35}Cl y del H^{37}Cl, como lo hemos hallado en la parte (*a*), y por lo tanto en frecuencias vibratorias ligeramente diferentes. ■

PREGUNTAS

1. Dé algunos ejemplos de movimientos que sean aproximadamente armónicos simples ¿Por qué son raros los movimientos que sean armónicos simples exactamente?
2. El resorte de una puerta mosquitera típica está esforzado a la tensión en su estado normal; esto es, las vueltas adyacentes se adhieren entre sí y ofrecen resistencia a ser separadas. ¿Obedece tal resorte a la ley de Hooke?
3. ¿Es obedecida la ley de Hooke, siquiera aproximadamente, por la plataforma de salto en una alberca? ¿Y por un trampolín? ¿Y por un resorte enrollado hecho de alambre de plomo?
4. ¿Qué le pasaría al movimiento de un sistema oscilatorio si cambiara el signo del término de la fuerza, $-kx$ en la ecuación 2?
5. Un resorte tiene una constante de fuerza k, y de él está suspendido un objeto de masa m. El resorte se corta a la mitad y el mismo objeto se suspende de una de las mitades. ¿Cómo se relacionan las frecuencias de oscilación antes y después de haber cortado el resorte?
6. Un resorte no estirado tiene una constante de fuerza k. Es estirado por una pesa colgada de él hasta una longitud de equilibrio dentro del límite elástico. ¿Tiene el resorte la misma constante de fuerza k para desplazamientos a partir de esta nueva posición de equilibrio?
7. Supongamos que tenemos un bloque de masa desconocida y un resorte de constante de fuerza también desconocida. Muestre cómo podemos predecir el periodo de oscilación de este sistema bloque-resorte simplemente midiendo la extensión del resorte producida al unir el bloque a él.
8. Todo resorte real tiene masa. Si esta masa es tenida en cuenta, explique cualitativamente cómo afectará esto al periodo de oscilación de un sistema resorte-bloque.
9. ¿Puede existir un oscilador que, aun para pequeñas amplitudes, no sea armónico simple? Es decir, ¿podemos tener una fuerza de restitución no lineal en un oscilador incluso a amplitudes arbitrariamente pequeñas?
10. ¿Cómo resultan afectadas cada una de las siguientes propiedades de un oscilador armónico simple al duplicar la amplitud: el periodo, la constante de fuerza, la energía mecánica total, la velocidad máxima y la aceleración máxima?
11. ¿Qué cambios haría usted en un oscilador armónico para duplicar la velocidad máxima del objeto oscilatorio?
12. Una persona está de pie sobre una báscula de baño, la cual descansa sobre una plataforma suspendida de un resorte grande. Todo el sistema ejecuta un movimiento armónico simple en dirección vertical. Describa la variación en la lectura de la báscula durante un periodo de movimiento.
13. ¿Podríamos construir alguna vez un péndulo simple verdadero? Explique la respuesta.
14. ¿Podrían basarse los patrones de masa, longitud, y tiempo en las propiedades de un péndulo? Explique.
15. Considerando los aspectos elástico e inercial implicados, explique el hecho de que, mientras que un objeto de masa m oscile verticalmente en un resorte, el periodo depende de m pero es independiente de g, siendo lo inverso verdadero para un péndulo simple.
16. Prediga, por medio de argumentos cualitativos si un péndulo oscilatorio de gran amplitud tendrá un periodo más largo o más corto que el periodo de las oscilaciones de amplitud pequeña. (Considere casos extremos.)
17. A medida que la amplitud θ_m de la ecuación 25 se aproxima a 180°, ¿a qué valor cabe esperar que se aproxime el periodo? Explique en términos físicos.

18. ¿Qué le sucede a la frecuencia de un columpio cuando sus oscilaciones pasan de grandes amplitudes a pequeñas?

19. ¿Cómo resulta afectado el periodo de un péndulo cuando su punto de suspensión (*a*) se mueve horizontalmente en el plano de la oscilación con una aceleración a; (*b*) se mueve verticalmente hacia arriba con una aceleración a; (*c*) se mueve verticalmente hacia abajo con una aceleración $a < g$; y con una aceleración $a > g$? ¿Cuál caso, si lo hay, se aplica a un péndulo montado en una carreta que rueda hacia abajo de un plano inclinado?

20. ¿Por qué se excluyó a un eje que pasara por el centro de masa al usar la ecuación 29 para determinar I? ¿Se aplica esta ecuación a esta clase de eje? ¿Cómo puede determinarse I para este eje usando los métodos del péndulo físico?

21. Una esfera hueca se llena de agua a través de un pequeño orificio. Se cuelga de un cordón largo y, cuando el agua va saliendo por el orificio en el fondo, hallamos que el periodo de oscilación primero aumenta y luego disminuye. Explique.

22. (*a*) El efecto de la masa, m, de la cuerda atada al disco, de masa M, de un péndulo, es aumentar el periodo sobre el de un péndulo simple en el cual $m = 0$. Explique esto (*b*) Aunque el efecto de la masa de la cuerda del péndulo es aumentar su periodo, una cuerda de longitud L, que oscila sin tener nada en el extremo ($M = 0$) tiene un periodo menor que el de un péndulo simple de longitud L. Explique esto.

23. ¿Habría en la Luna un cambio en la frecuencia de oscilación de un péndulo de torsión si fuera éste trasladado allí? ¿De un péndulo simple? ¿De un oscilador resorte-bloque? ¿De un péndulo físico?

24. ¿Cómo puede usarse un péndulo para trazar una curva sinusoidal?

25. ¿Qué componentes de movimientos armónicos simples produciría la figura de un 8 como movimiento resultante?

26. ¿Existe alguna conexión entre la relación F contra x a nivel molecular y la relación macroscópica entre F y x en un resorte? Explique la respuesta.

27. (*a*) ¿En qué circunstancias sería igual la masa reducida de un sistema de dos cuerpos a la masa de uno de los cuerpos? Explique. (*b*) ¿Cuál es la masa reducida si los cuerpos tienen igual masa? (*c*) ¿Dan los casos (*a*) y (*b*) los valores extremos de la masa reducida?

28. ¿Por qué se monta sobre resortes la tina de una máquina lavadora?

29. ¿Por qué se emplean a menudo los aparatos amortiguadores en maquinaria? Dé un ejemplo.

30. Dé algunos ejemplos de fenómenos comunes en los que la resonancia juegue un papel importante.

31. La marea lunar es mucho más importante que la marea solar. Sin embargo, ocurre lo contrario con las mareas en la atmósfera de la Tierra. Explique esto, usando ideas de resonancia, dado el hecho de que la atmósfera tiene un periodo de oscilación natural de casi 12 horas.

32. En la figura 20, ¿a qué valor se aproxima la amplitud de las oscilaciones forzadas cuando la frecuencia impulsora ω'' se aproxima a (*a*) cero y (*b*) al infinito?

33. Los edificios de diferentes alturas sufren diferentes daños durante un terremoto. Explique por qué.

34. Un cantante, al sostener una nota de la frecuencia adecuada, puede quebrar un vaso si el cristal de éste es de alta calidad, lo cual no sucede si el cristal del vaso es de baja calidad. Explique por qué.

PROBLEMAS

Sección 15-3 Movimiento armónico simple

1. Un bloque de 3.94 kg estira a un resorte de 15.7 cm desde su posición no estirada. El bloque se retira y en su lugar se cuelga un objeto de 0.520 kg. Halle el periodo de su oscilación.

2. Un oscilador consta de un bloque de 512 g de masa unido a un resorte. Cuando es puesto en oscilación con una amplitud de 34.7 cm, se observa que repite su movimiento cada 0.484 s. Halle (*a*) el periodo, (*b*) la frecuencia, (*c*) la frecuencia angular, (*d*) la constante de fuerza, (*e*) la velocidad máxima, y (*f*) la fuerza máxima ejercida sobre el bloque.

3. Las frecuencias de vibración de los átomos de los sólidos a temperaturas normales son del orden de 10.0 THz. Imagínese que los átomos estuviesen unidos entre sí por "resortes". Supóngase que un átomo de plata aislado vibre con esta frecuencia y que los demás átomos estén en reposo. Calcúlese la constante de fuerza efectiva. Un mol de plata tiene una masa de 108 g y contiene 6.02×10^{23} átomos.

4. Un altoparlante produce un sonido musical por medio de la oscilación de un diafragma. Si la amplitud de la oscilación está limitada a 1.20×10^{-3} mm, ¿qué frecuencias darán por resultado que la aceleración del diafragma exceda de g?

5. Un objeto de 5.22 kg está unido a la parte inferior de un resorte vertical y es puesto a vibrar. La velocidad máxima del objeto es de 15.3 cm/s y el periodo es de 645 ms. Halle (*a*) la constante de fuerza del resorte, (*b*) la amplitud del movimiento, y (*c*) la frecuencia de oscilación.

6. En una rasuradora eléctrica, la hoja se mueve de un lado a otro sobre una distancia de 2.00 mm. El movimiento es armónico simple, con una frecuencia de 120 Hz. Halle (*a*) la amplitud, (*b*) la velocidad máxima de la hoja, y (*c*) la aceleración máxima de la hoja.

7. Puede considerarse que un automóvil está montado sobre cuatro resortes en lo que respecta a oscilaciones verticales.

Los resortes de cierto automóvil de 1460 kg de masa están ajustados de modo que las vibraciones tengan una frecuencia de 2.95 Hz. (*a*) Halle la constante de fuerza de cada uno de los cuatro resortes (supuestos idénticos). (*b*) ¿Cuál será la frecuencia de vibración si viajan en el automóvil cinco personas con una masa promedio de 73.2 kg cada una?

8. Un cuerpo oscila con movimiento armónico simple de acuerdo con la ecuación

$$x = (6.12\text{ m})\cos[(8.38\text{ rad/s})t + 1.92\text{ rad}].$$

Halle (*a*) el desplazamiento, (*b*) la velocidad, y (*c*) la aceleración en el tiempo t = 1.90 s. Halle también (*d*) la frecuencia y (*e*) el periodo del movimiento.

9. La carátula de un dinamómetro que lee desde 0 hasta 50.0 lb tiene 4.00 in de longitud. Se encuentra que un paquete suspendido del dinamómetro oscila verticalmente con una frecuencia de 2.00 Hz. ¿Cuánto pesa el paquete?

10. El émbolo en el cilindro de una locomotora tiene una carrera de 76.5 cm. ¿Cuál es la velocidad máxima del émbolo si las ruedas impulsoras dan 193 rev/m y el émbolo se mueve con un movimiento armónico simple?

11. La figura 24 muestra a un astronauta en un aparato de medición de la masa de un cuerpo (BMMD, *Body Mass Measurement Device*). Diseñado para usarse en vehículos espaciales en órbita, su objeto es permitir que los astronautas midan su masa en las condiciones de ingravidez en órbita alrededor de la Tierra. El aparato es una silla montada sobre resortes; el astronauta mide su periodo de oscilación en la silla; la masa se deduce de la fórmula para el periodo de un sistema oscilatorio bloque-resorte. (*a*) Si M es la masa del astronauta y m la masa efectiva de esa parte del aparato que también oscila, demuestre que

$$M = (k/4\pi^2)T^2 - m,$$

donde T es el periodo de oscilación y k es la constante de fuerza. (*b*) La constante de fuerza es k = 605.6 N/m para el aparato en la Misión Skylab 2; el periodo de oscilación de la silla vacía es de 0.90149 s. Calcule la masa efectiva de la silla. (*c*) Con el astronauta en la silla, el periodo de oscilación resulta ser de 2.08832 s. Calcule la masa del astronauta.

12. Un objeto de 2.14 kg cuelga de un resorte. Un cuerpo de 325 g colgado abajo del objeto estira adicionalmente al resorte 1.80 cm. El cuerpo de 325 g es retirado y el objeto entra en oscilación. Halle el periodo del movimiento.

13. En cierto puerto marítimo, las mareas causan que la superficie del mar se eleve y descienda en movimiento armónico simple, con un periodo de 12.5 h. ¿Cuánto tiempo le toma al agua descender desde su altura máxima hasta la mitad de su altura máxima con respecto a su nivel promedio (de equilibrio)?

14. Dos bloques (m = 1.22 kg y M = 8.73 kg) y un resorte (k = 344 N/m) están dispuestos sobre una superficie horizontal, sin fricción, como se muestra en la figura 25. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es de 0.42. Halle la amplitud máxima posible del movimiento armónico simple sin que ocurra un deslizamiento entre los bloques.

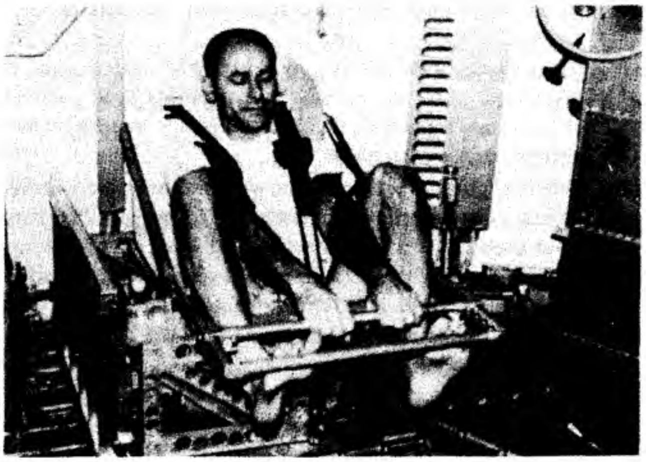

Figura 24 Problema 11.

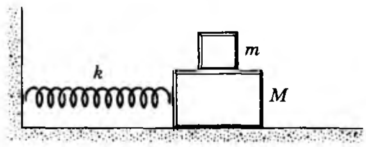

Figura 25 Problema 14

15. Un bloque está sobre una superficie horizontal (una mesa vibratoria) que se mueve horizontalmente con un movimiento armónico simple de 2.35 Hz de frecuencia. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0.630. ¿A qué amplitud puede llegar sin que el bloque resbale a lo largo de la superficie?

16. Un bloque está sobre un émbolo que se mueve verticalmente con movimiento armónico simple. (*a*) ¿A qué amplitud del movimiento se separarán el bloque y el émbolo si el periodo del movimiento del émbolo es de 1.18 s? (*b*) Si el émbolo tiene una amplitud de 5.12 cm en su movimiento, halle la frecuencia máxima a la cual estarán en contacto el bloque y el émbolo continuamente.

17. La fuerza de interacción entre dos átomos de ciertas moléculas diatómicas puede representarse por $F = -a/r^2 + b/r^3$, donde a y b son constantes positivas y r es la distancia de separación entre los átomos. Haga una gráfica de F contra r. Luego (*a*) demuestre que la separación en el equilibrio es b/a; (*b*) demuestre que, para pequeñas oscilaciones respecto a esta separación de equilibrio, la constante de fuerza es a^4/b^3; (*c*) halle el periodo de este movimiento.

18. Un oscilador consta de un bloque unido a un resorte (k = 456 N/m). En cierto tiempo t, la posición (medida desde la posición de equilibrio), la velocidad, y la aceleración del bloque son x = 0.112 m, v = −13.6 m/s, a = −123 m/s². Calcule (*a*) la frecuencia, (*b*) la masa del bloque, y (*c*) la amplitud de la oscilación.

19. Dos partículas oscilan en movimiento armónico simple a lo largo de un segmento de línea recta común de longitud

L. Cada partícula tiene un periodo de 1.50 s pero difieren en fase en 30.0°. (*a*) ¿Qué separación hay entre ellas (en términos de L) 0.500 s después de que la partícula que va atrás deja un extremo de la trayectoria? (*b*) ¿Se mueven en la misma dirección, una hacia la otra, o una alejándose entre sí en ese momento?

20. Dos partículas efectúan un movimiento armónico simple de la misma amplitud y frecuencia a lo largo de la misma línea recta. Se cruzan entre sí cuando van en direcciones opuestas cada vez que su desplazamiento es la mitad de su amplitud. Halle la diferencia de fase entre ellas.

21. Dos resortes están unidos a un bloque de masa m que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción, como se muestra en la figura 26. Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}\,,$$

donde ν_1 y ν_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si se uniera solamente al resorte 1 o al resorte 2. (La analogía eléctrica de este sistema es una combinación en serie de dos capacitores.)

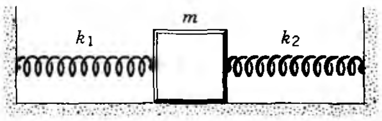

Figura 26 Problema 21.

22. Dos resortes unidos entre sí se enlazan al bloque de masa m como se muestra en la figura 27. Las superficies carecen de fricción. Si los resortes, por separado, tienen constantes de fuerza k_1 y k_2, demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}}\,,$$

donde ν_1 y ν_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte 1 o al resorte 2. (La analogía eléctrica de este sistema es una combinación en paralelo de dos capacitores.)

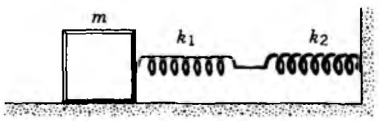

Figura 27 Problema 22.

23. Tres vagones de mineral de 10,000 kg se mantienen en reposo en una pendiente de 26.0° sobre los rieles de una mina usando un cable paralelo a la pendiente (Fig. 28). Se observa que el cable se estira 14.2 cm justo antes de que se rompa el acoplamiento, desenganchando a uno de los vagones. Halle (*a*) la frecuencia de las oscilaciones resultantes de los dos vagones restantes y (*b*) la amplitud de la oscilación.

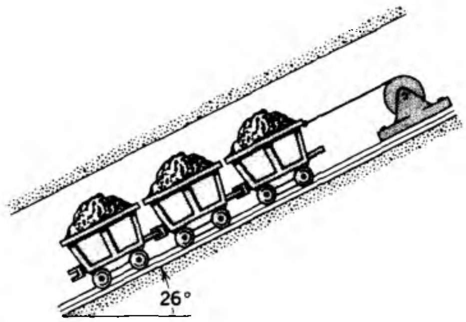

Figura 28 Problema 23.

24. Un resorte sin masa de 3.60 N/cm de constante de fuerza es cortado en dos mitades. (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza de cada mitad? (*b*) Las dos mitades, suspendidas por separado, soportan un bloque de masa M (véase la Fig. 29). El sistema vibra con una frecuencia de 2.87 Hz. Halle el valor de la masa M.

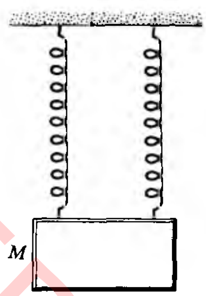

Figura 29 Problema 24.

25. Si la masa de un resorte m_s no es despreciable, pero es pequeña comparada con la masa m del objeto suspendido de él, el periodo del movimiento es $T = 2\pi\sqrt{(m + m_s/3)/k}$. Derive este resultado. (*Sugerencia*: La condición $m_s \ll m$ equivale a la hipótesis de que el resorte se estira proporcionalmente a lo largo de su longitud.) (Véase H. L. Armstrong, *American Journal of Physics*, Vol 37, pág. 447, 1969, para una solución completa del caso general.)

Sección 15-4 Consideraciones energéticas en el movimiento armónico simple

26. Un sistema oscilatorio bloque-resorte tiene una energía mecánica de 1.18 J, una amplitud de 9.84 cm, y una velocidad máxima de 1.22 m/s. Halle (*a*) la constante de fuerza del resorte, (*b*) la masa del bloque, y (*c*) la frecuencia de oscilación.

27. Una gran resortera (hipotética) se estira 1.53 m para lanzar un proyectil de 130 g con una velocidad suficiente para que escape de la Tierra (11.2 km/s). (*a*) ¿Cuál es la constante de fuerza del aparato, si toda la energía potencial se convierte en energía cinética? (*b*) Supóngase que una persona promedio puede ejercer una fuerza de 220 N. ¿Cuántas personas se necesitan para estirar la resortera?

28. (*a*) Cuando el desplazamiento es la mitad de la amplitud x_m, ¿qué fracción de la energía total es cinética y qué fracción es potencial en el movimiento armónico simple? (*b*) ¿A qué desplazamiento es la energía mitad cinética y mitad potencial?

29. Una partícula de 12.3 kg se halla en movimiento armónico simple con una amplitud de 1.86 mm. La aceleración máxima de la partícula es de 7.93 km/s^2. (*a*) Halle el periodo del movimiento. (*b*) ¿Cuál es la velocidad máxima de la partícula? (*c*) Calcule la energía mecánica total de este oscilador armónico simple.

30. Un objeto de 5.13 kg se mueve sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de un resorte de constante de fuerza 9.88 N/cm. El objeto es desplazado 53.5 cm y se le da una velocidad inicial de 11.2 m/s hacia la posición de equilibrio. Halle (*a*) la frecuencia del movimiento, (*b*) la energía potencial inicial del sistema, (*c*) La energía cinética inicial, y (*d*) la amplitud del movimiento.

31. Demuestre que las relaciones generales entre los dos valores iniciales de posición $x(0)$ y de velocidad $v(0)$, y la amplitud x_m y el ángulo fase ϕ de la ecuación 6 son

$$x_m = \sqrt{[x(0)]^2 + [v(0)/\omega]^2}, \qquad \tan\phi = -v(0)/\omega x(0).$$

32. Resuelva la ecuación 16, que expresa la conservación de la energía, para dt e integre el resultado. Supóngase que $x = x_m$ en $t = 0$, y demuestre que se obtiene la ecuación 6 (con $\phi = 0$) o sea, el desplazamiento en función del tiempo.

33. Un objeto de 1.26 kg de masa unido a un resorte de 5.38 N/cm de constante de fuerza se pone en oscilación estirando el resorte 26.3 cm y dando al objeto una velocidad de 3.72 m/s hacia la posición de equilibrio del resorte. Usando los resultados obtenidos en el problema 31, calcule (*a*) la amplitud y (*b*) el ángulo fase del movimiento armónico simple resultante.

34. Un bloque de masa M, en reposo sobre una mesa horizontal sin fricción, está unido a un soporte rígido por medio de un resorte de constante de fuerza k. Una bala de masa m y velocidad v golpea al bloque como se muestra en la figura 30. La bala se queda empotrada en el bloque. Determine la amplitud del movimiento armónico simple resultante en términos de m, M, v y k.

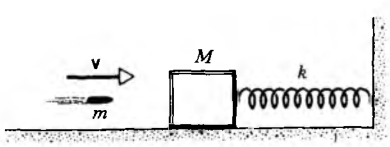

Figura 30 Problema 34.

35. Considérese un resorte sin masa de constante de fuerza k en un campo gravitatorio uniforme y unamos a él un objeto de masa m. (*a*) Demuestre que si $x = 0$ marca la posición relajada del resorte, la posición de equilibrio estático está dada por $x = mg/k$ (véase la Fig. 31). Demuestre que la ecuación de movimiento del sistema masa-resorte es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = mg$$

y que la solución para el desplazamiento en función del tiempo es $x = x_m \cos(\omega t + \phi) + mg/k$, donde $\omega = \sqrt{k/m}$ como anteriormente. (c) Demuestre, por lo tanto, que el sistema tiene las mismas ω, v, a, ν y T en un campo gravitatorio uniforme y en ausencia de tal campo, con el único cambio de que la posición de equilibrio se ha desplazado en mg/k. (*d*) Considere ahora la energía del sistema, $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mg(h - x) =$ constante, y demuestre que la diferenciación respecto al tiempo conduce a la ecuación de movimiento de la parte (*b*). (*e*) Demuestre que cuando el objeto cae desde $x = 0$ a la posición de equilibrio estático, $x = mg/k$, la pérdida de energía potencial gravitatoria va una mitad a una ganancia en energía potencial elástica y la otra mitad a una ganancia en energía cinética. (*f*) Por último, considérese al sistema en movimiento respecto a la posición de equilibrio estático. Calcule por separado el cambio de la energía potencial gravitatoria y de la energía potencial elástica cuando el objeto se mueve *hacia arriba* con un desplazamiento x_m, y cuando el objeto se mueva *hacia abajo* con un desplazamiento x_m. Demuestre que el cambio *total* en la energía potencial es el mismo en cada caso, es decir, $\frac{1}{2}kx_m^2$. A la vista de los resultados (*c*) y (*f*), podemos simplemente despreciar el campo gravitatorio uniforme en el análisis haciendo el cambio de la posición de referencia de $x = 0$ a $x_0 = x - mg/k = 0$. La curva de la nueva energía potencial $[U(x_0) = \frac{1}{2}kx_0^2 + \text{constante}]$ tiene la misma forma parabólica que la curva de la energía potencial en ausencia de campo gravitatorio $[U(x) = \frac{1}{2}kx^2]$.

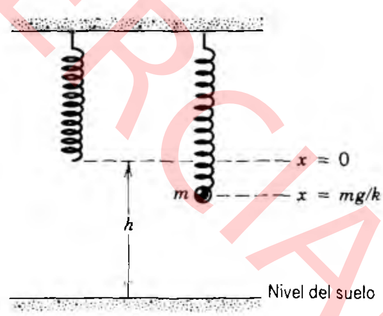

Figura 31 Problema 35.

36. Un bloque de 4.00 kg está suspendido de un resorte con una constante de fuerza de 5.00 N/cm. Una bala de 50.0 g se dispara hacia el bloque desde abajo a una velocidad de 150 m/s y llega al reposo dentro del bloque. (*a*) Halle la amplitud del movimiento armónico simple resultante. (*b*) ¿Qué fracción de la energía cinética original de la bala aparece como energía mecánica en el oscilador?

37. Un cilindro sólido está unido a un resorte horizontal sin masa de modo que puede *rodar sin resbalar* a lo largo de una superficie horizontal, como en la figura 32. La constante de fuerza k del resorte es de 2.94 N/cm. Si el sistema parte del reposo desde una posición en que el resorte está estirado 23.9 cm, halle (*a*) la energía cinética de traslación y (*b*) la energía cinética de rotación del cilindro al pasar por la posición de equilibrio. (*c*) Demuestre que en estas condiciones el centro de masa del cilindro efectúa un movimiento armónico simple con un periodo

$$T = 2\pi\sqrt{3M/2k},$$

donde M es la masa del cilindro.

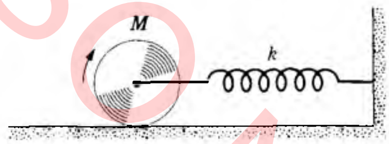

Figura 32 Problema 37.

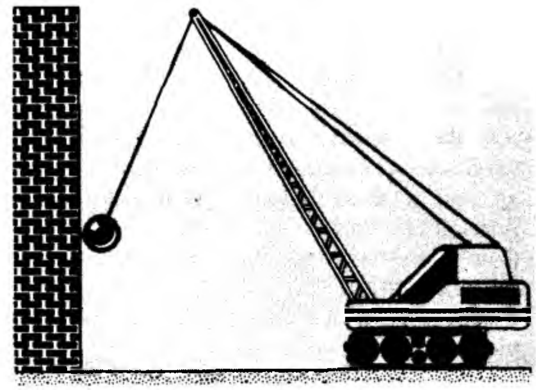

Figura 33 Problema 41.

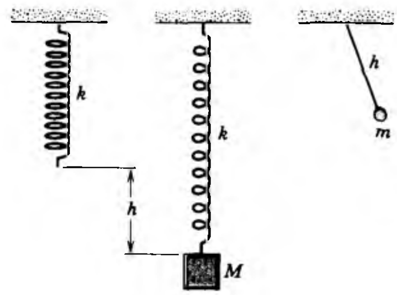

Figura 34 Problema 42.

38. (*a*) Demuestre que en el movimiento armónico simple la energía potencial promedio es igual a la energía cinética promedio cuando el promedio se toma respecto al tiempo durante un periodo del movimiento, y que cada promedio es igual a $\frac{1}{4}kx_m^2$. (*b*) Demuestre que cuando el promedio se toma respecto a la posición durante un ciclo, la energía potencial promedio es igual a $\frac{1}{6}kx_m^2$ y que la energía cinética promedio es igual a $\frac{1}{3}kx_m^2$. (*c*) Explique físicamente por qué los dos resultados de arriba (*a* y *b*) son diferentes.

Sección 15-5 Aplicaciones del movimiento armónico simple

39. Halle la longitud de un péndulo simple cuyo periodo sea 1.00 s en una localidad donde g = 9.82 m/s^2.

40. Un péndulo simple de 1.53 m de longitud efectúa 72.0 oscilaciones completas en 180 s en una cierta localidad. Halle la aceleración debida a la gravedad en este punto.

41. Una bola de demolición de 2500 kg se halla suspendida del extremo de una grúa, como se muestra en la figura 33. La longitud del cable que cuelga es de 17.3 m. Halle el periodo de balanceo, suponiendo que el sistema pueda ser tratado como un péndulo simple.

42. Existe una relación interesante entre el sistema bloque-resorte y el péndulo simple. Supongamos que usted cuelga un objeto de masa M del extremo de un resorte, y que cuando el objeto está en equilibrio el resorte es estirado una distancia h. Demuestre que la frecuencia de este sistema bloque-resorte es la misma que la de un péndulo simple de masa m y longitud h, aun cuando $m \neq M$; véase la figura 34.

43. Un aro circular de 65.3 cm de radio y 2.16 kg de masa está suspendido de un clavo horizontal. (*a*) Halle la frecuencia de oscilación para desplazamientos pequeños desde el equilibrio. (*b*) ¿Cuál es la longitud del péndulo simple equivalente?

44. Un ingeniero desea hallar la inercia rotatoria de un objeto de forma rara de 11.3 kg de masa respecto a un eje que pase por su centro de masa. El objeto está soportado con un alambre que pasa por su centro de masa y a lo largo del eje deseado. El alambre tiene una constante de torsión κ = 0.513 N · m. El ingeniero observa que este péndulo de torsión efectúa 20.0 ciclos completos en 48.7 s. ¿Qué valor se calcula para la inercia rotatoria?

45. Un péndulo físico consta de un disco sólido uniforme de masa M = 563 g y radio R = 14.4 cm soportado en un plano vertical por un pivote situado a una distancia d = 10.2 cm del centro del disco, como se muestra en la figura 35. El disco se desplaza un pequeño ángulo y luego se suelta. Halle el periodo del movimiento armónico simple resultante.

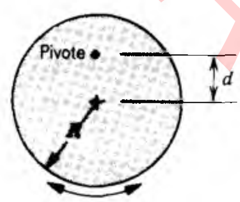

Figura 35 Problema 45.

46. Una esfera sólida de 95.2 kg con un radio de 14.8 cm está suspendida de un alambre vertical unido al techo de una sala. Se requiere una torca de 0.192 N · m para retorcer a la esfera en un ángulo de 0.850 rad. Halle el periodo de oscilación cuando la esfera se suelte desde esta posición.

47. Un péndulo físico consta de una barra de un metro pivotada en un pequeño orificio taladrado a través de la barra a una distancia x de la marca de 50.0 cm. Se observa que el periodo de oscilación es de 2.50 s. Halle la distancia x.

48. Un péndulo consta de un disco uniforme de 10.3 cm de radio y 488 g de masa unido a una barra de 52.4 cm de longitud que tiene una masa de 272 g; véase la figura 36. (*a*) Calcule la inercia rotatoria del péndulo respecto al pivote. (*b*) ¿Cuál es la distancia entre el pivote y el centro de masa del péndulo? (*c*) Calcule el periodo de oscilación para ángulos pequeños.

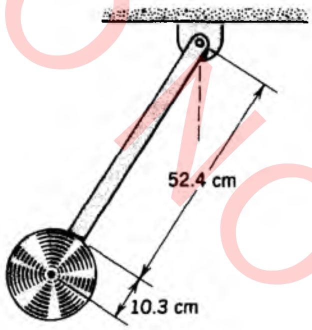

Figura 36 Problema 48.

49. Se forma un péndulo al pivotar una barra larga de longitud L y masa m en torno a un punto en la barra que está a una distancia d sobre el centro de la varilla. (*a*) Halle el periodo de pequeña amplitud de este péndulo en términos de d, L, m, y g. (*b*) Demuestre que el periodo tiene un valor mínimo cuando $d = L/\sqrt{12} = 0.289L$.

50. Una rueda puede girar en torno a su eje fijo. Se une un resorte a uno de sus rayos a una distancia r del eje, como se muestra en la figura 37. Suponiendo que la rueda sea un aro de masa M y radio R, obtenga la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones de este sistema en términos de M, R, r, y la constante de fuerza k. Discuta los casos especiales $r = R$ y $r = 0$.

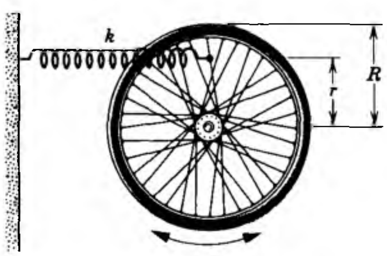

Figura 37 Problema 50.

51. Una barra de un metro se balancea de un extremo y oscila con una frecuencia ν_0. ¿Cuál sería la frecuencia, en términos de ν_0, si se cortase el tercio inferior de la barra?

52. Una partícula se suelta desde el reposo en un punto P dentro de un tazón hemisférico sin fricción de radio R. (*a*) Demuestre que cuando P está cerca del fondo del tazón la partícula experimenta un movimiento armónico simple. (*b*) Halle la longitud del péndulo simple equivalente.

53. Un péndulo físico tiene dos puntos de pivoteo posibles; uno tiene una posición fija y el otro es ajustable a lo largo de la longitud del péndulo, como se muestra en la figura 38. El periodo del péndulo cuando está suspendido del pivote fijo es T. El péndulo es luego invertido y suspendido del pivote ajustable. La posición de este pivote se mueve hasta que, por medio de pruebas sucesivas, el péndulo tenga el mismo periodo que antes, es decir, T. Demuestre que la aceleración de caída libre g está dada por

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

donde L es la distancia entre los dos puntos de pivoteo. Nótese que g puede medirse de esta manera sin que sea necesario conocer la inercia rotatoria del péndulo o cualquiera de sus demás dimensiones excepto L.

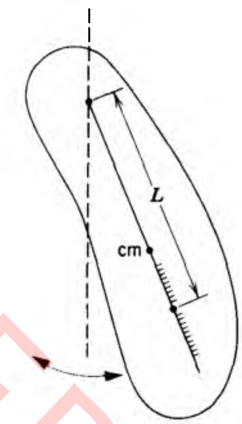

Figura 38 Problema 53.

54. Un disco de 2.50 kg y diámetro de 42.0 cm, está soportado por una barra ligera de 76.0 cm de largo, la cual está pivotada en su extremo, como se muestra en la figura 39. (*a*) Inicialmente el ligero resorte de torsión no está unido. ¿Cuál es el periodo de oscilación? (*b*) Ahora se une el resorte de torsión de modo que la barra cuelgue verticalmente en equilibrio. ¿Cuál sería la constante de torsión del resorte de modo que el nuevo periodo de oscilación sea 500 ms más corto que antes?

55. Un péndulo simple de longitud L y masa m está suspendido en un automóvil que viaja a una velocidad constante v alrededor de un círculo de radio R. Si el péndulo experimenta pequeñas oscilaciones en dirección radial respecto a su posición de equilibrio, ¿cuál será su frecuencia de oscilación?

56. La figura 40 muestra un péndulo físico construido a partir de secciones de igual longitud de un mismo tubo. El radio interior del tubo es 10.2 cm y el espesor es 6.40 mm. (*a*)

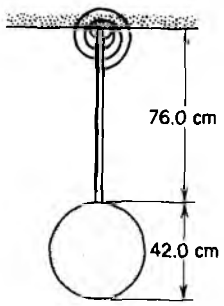

Figura 39 Problema 54.

Calcule el periodo de oscilación respecto al pivote mostrado. (*b*) Supóngase que se construye un nuevo péndulo físico al girar la sección del fondo a 90° en torno a un eje vertical que pase por su centro. Demuestre que el nuevo periodo de oscilación respecto al mismo pivote es alrededor del 2% menor que el periodo del péndulo original.

Figura 40 Problema 56.

Sección 15-7 Combinaciones de movimientos armónicos

57. Trace la trayectoria de una partícula que se mueva en el plano xy de acuerdo a $x = x_m \cos(\omega t - \pi/2)$, $y = 2x_m \cos(\omega t)$.

58. El diagrama que se muestra en la figura 41 es el resultado de combinar los dos movimientos armónicos simples $x = x_m \cos \omega_x t$ y $y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y)$. (*a*) Cuál es el valor de x_m/y_m? (*b*) ¿Cuál es el valor de ω_x/ω_y? (*c*) Cuál es el valor de ϕ_y?

59. Los electrones de un osciloscopio son desviados por dos campos eléctricos mutuamente perpendiculares de modo que en cualquier tiempo t el desplazamiento está dado por

$$x = A \cos \omega t, \qquad y = A \cos(\omega t + \phi_y).$$

Describa la trayectoria de los electrones y determine sus ecuaciones cuando (*a*) $\phi_y = 0°$, (*b*) $\phi_y = 30°$, y (*c*) $\phi_y = 90°$

60. Una partícula de masa m se mueve en un plano fijo a lo largo de la trayectoria $\mathbf{r} = \mathbf{i}A \cos \omega t + \mathbf{j}A \cos 3\,\omega t$. (*a*) Trace la trayectoria de la partícula. (*b*) Halle la fuerza que actúa sobre la partícula. Halle también (*c*) su energía potencial y (*d*) su energía total, ambas en función del tiempo. (*e*) ¿Es periódico el movimiento? De ser así, halle el periodo.

61. Cuando se combinan oscilaciones en ángulo recto, las frecuencias del movimiento de la partícula en las direcciones x y y no necesitan ser iguales, de modo que, en el caso general, las ecuaciones 36 resultan ser

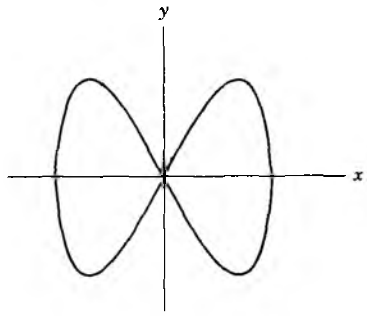

Figura 41 Problema 58

$$x = x_m \cos(\omega_x t + \phi_x) \qquad \text{y} \qquad y = y_m \cos(\omega_y t + \phi_y).$$

La trayectoria de la partícula ya no es una elipse, sino que ahora recibe el nombre de *curva Lissajous*, en memoria de Jules Antoine Lissajous quien fue el primero en demostrar estas curvas en 1857. (*a*) Si ω_x/ω_y es un número racional, de modo que las frecuencias angulares ω_x y ω_y sean "conmensurables", entonces la curva es cerrada y el movimiento se repite a sí mismo a intervalos de tiempo regulares. Suponga que $x_m = y_m$ y que $\phi_x = \phi_y$ y trace la curva Lissajous para $\omega_x/\omega_y = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, y $\frac{2}{3}$. (*b*) Sea ω_x/ω_y un número racional, por ejemplo $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ó $\frac{2}{3}$ y demuestre que la forma de la curva Lissajous depende de la diferencia de fase $\phi_x - \phi_y$. Trace curvas para $\phi_x - \phi_y = 0, \pi/4$, y $\pi/2$ rad. (*c*) Si ω_x/ω_y no es un número racional, entonces la curva es "abierta". Convénzase de que después de un tiempo prolongado la curva habrá pasado a través de cada punto que estuviera en el rectángulo limitado por $x = \pm x_m$ y $y = \pm y_m$, sin que la partícula pase nunca dos veces por un punto determinado y a la misma velocidad. Con fines de precisión, supóngase que $\phi_x = 0$ en todo momento.

Sección 15-8 Movimiento armónico amortiguado

62. En el sistema mostrado en la figura 18, el bloque tiene una masa de 1.52 kg y la constante de fuerza es de 8.13 N/m. La fuerza de fricción está dada por $-b(dx/dt)$, donde b = 227 g/s. Supóngase que el bloque se jala hacia un lado una distancia de 12.5 cm y luego se suelta. (*a*) Calcule el intervalo de tiempo necesario para que la amplitud disminuya a un tercio de su valor inicial. (*b*) Cuántas oscilaciones efectúa el bloque en este tiempo?

63. Verifique, usando derivadas, que la ecuación 38 es la solución de la ecuación 37 para el oscilador amortiguado, a condición de que la frecuencia ω' esté dada por la ecuación 39.

64. Un oscilador armónico amortiguado consta de un bloque (m = 1.91 kg), un resorte (k = 12.6 N/m), y una fuerza de amortiguamiento $F = -bv$. Inicialmente, oscila con una amplitud de 26.2 cm; a causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye a tres cuartas partes de este valor inicial después de cuatro ciclos completos. (*a*) ¿Cuál es el valor de b? (*b*) ¿Cuánta energía se ha "perdido" durante estos cuatro ciclos?

65. *Supóngase que está examinando las características de un* sistema de suspensión de un automóvil de 2000 kg. La suspensión "se comprime" 10 cm cuando se comprime sobre ella el peso de todo el automóvil. Además, la amplitud de la oscilación disminuye en 50% durante una oscilación completa. Calcule los valores de k y b para el resorte y el sistema amortiguador en cada rueda. Supóngase que cada rueda soporte 500 kg.

Sección 15-9 Oscilaciones forzadas y resonancia

66. Considérense las oscilaciones forzadas de un sistema bloque-resorte amortiguado. Demuestre que, en resonancia, (*a*) la amplitud de la oscilación es $x_m = F_m/b\omega$, y (*b*) la velocidad máxima del bloque oscilatorio es $v_{max} = F_m/b$.

67. Un automóvil de 2200 lb que transporta a cuatro personas de 180 lb viaja por una carretera de terracería "ondulada". Las ondulaciones de la carretera tienen una separación de 13 ft. Se observa que el automóvil rebota con amplitud máxima cuando su velocidad es de 10 mi/h. Ahora se detiene el automóvil y se bajan las cuatro personas ¿En cuánto se eleva la carrocería del automóvil sobre su suspensión debido a esta disminución del peso?

68. A partir de la ecuación 42 halle la velocidad $v(= dx/dt)$ en el movimiento oscilatorio forzado. Demuestre que la amplitud de la velocidad es $v_m = F_m/[(m\omega'' - k/\omega'')^2 + b^2]^{1/2}$. Las ecuaciones de la sección 15-9 son idénticas en su forma a las que representan un circuito eléctrico que contiene una resistencia R, una inductancia L, y una capacitancia C en serie con una fem alternante $V = V_m \cos \omega'' t$. De aquí que b, m, k, y F_m sean análogas a R, L, $1/C$, y V_m, respectivamente y que x y v sean análogas a la carga eléctrica q y la corriente i, respectivamente. En el caso eléctrico, se usa la amplitud de la corriente i_m, análoga a la amplitud de la velocidad v_m para describir la calidad de la resonancia.

Sección 15-10 Oscilaciones de dos cuerpos

69. Supóngase que el resorte de la figura 22*a* tiene una constante de fuerza $k = 252$ N/m. Sean $m_1 = 1.13$ kg y $m_2 = 3.24$ kg. Calcule el periodo de oscilación del sistema de dos cuerpos.

70. (*a*) Demuestre que cuando $m_2 \to \infty$ en la ecuación 46, $m \to m_1$. (*b*) Demuestre que el efecto de un muro no infinito ($m_2 < \infty$) sobre las oscilaciones de un cuerpo de masa m_1 situado en el extremo de un resorte unido a la pared es reducir el periodo, o aumentar la frecuencia de la oscilación en comparación con (*a*). (*c*) Demuestre que cuando $m_2 = m_1$ el efecto es como si el resorte se cortara a la mitad, oscilando cada cuerpo independientemente con respecto al centro de masa situado en el punto medio.

71. (*a*) Calcule la masa reducida de cada una de las siguientes moléculas diatómicas: O_2, HCl, y CO. Exprese sus respuestas en unidades atómicas de masa unificadas, siendo 1.00 u la masa de un átomo de hidrógeno. (*b*) Se sabe que una molécula de HCl vibra a una frecuencia fundamental de $\nu = 8.7 \times 10^{13}$ Hz. Halle la "constante de fuerza" efectiva k de las fuerzas de acoplamiento entre los átomos. En función de su experiencia con resortes ordinarios, ¿diría usted que este "resorte molecular" es relativamente rígido o que no lo es?

72. Demuestre que la energía cinética del oscilador de dos cuerpos de la figura 22*a* está dada por $K = \frac{1}{2}mv^2$, donde m es la masa reducida y $v\ (= v_1 - v_2)$ es la velocidad relativa. Puede servir de ayuda notar que el ímpetu lineal se conserva mientras el sistema oscila.

Proyectos para la computadora

73. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la amplitud y la fase de un movimiento armónico simple cuando se proporcionan la constante de fuerza k, la masa m, la coordenada inicial x_0, y la velocidad inicial v_0. Escriba la coordenada como $x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$ y utilice $\omega = \sqrt{k/m}$, $x_m = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}$, y $\phi = \tan^{-1}(-v_0/\omega x_0)$. Asegúrese de comprobar que el valor calculado de ϕ es correcto verificando que $\cos\phi$ tenga el mismo signo que x_0 y que sen ϕ tenga el mismo signo que v_0. Si no lo tienen, sume 180° (o π rad) al valor calculado. Sea cuidadoso y evite dividir entre cero. Si $x_0 = 0$, automáticamente ponga $\phi = +90°$ ó $-90°$ sin intentar el cálculo de $v_0/\omega x_0$. Por supuesto, el ángulo que usted elija depende del signo de v_0. Escriba el programa de modo que una vez que se haya terminado un cálculo regrese al principio y pida los datos para el siguiente problema. He aquí algunas oscilaciones a tratar. En todas sostiene una masa de 250 g y un resorte con una constante de fuerza de 200 N/m. (*a*) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = 0$. (*b*) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = 0$. (*c*) $x_0 = 0$, $v_0 = 56$ cm/s. (*d*) $x_0 = 0$, $v_0 = -56$ cm/s. (*e*) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = 56$ cm/s. (*f*) $x_0 = 2.8$ cm, $v_0 = -56$ cm/s. (*g*) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = 56$ cm/s. (*h*) $x_0 = -2.8$ cm, $v_0 = -56$ cm/s.

74. Usted puede usar una computadora para estudiar las oscilaciones amortiguadas. Considérese una masa m en el extremo de un resorte con constante de fuerza k, sujeto a una fuerza de arrastre proporcional a su velocidad. La segunda ley de Newton da $md^2x/dt^2 = -kx - bv$. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la coordenada x, la velocidad v, y la energía mecánica total E al final de cada intervalo de tiempo de duración Δt desde $t = 0$ hasta $t = t_f$. Véase la sección 6-6 y los proyectos para la computadora al final del capítulo 6. Use el programa para resolver los problemas siguientes. En cada caso tomar $m = 2.0$ kg, $k = 350$ N/m, $x_0 = 0.070$ m, $v_0 = 0$, $t_f = 1.0$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. (*a*) Considere que $b = 2.8$ kg/s y, en gráficas por separado, trace $x(t)$ y $E(t)$. Nótese la disminución en la amplitud con el transcurso del tiempo. La disminución se asocia íntimamente a una pérdida de energía por la fuerza de arrastre. Nótese que la gráfica de la energía tiene oscilaciones pequeñas y que existen regiones pequeñas donde la energía es casi constante. ¿Dónde se presentan estas regiones en el movimiento oscilatorio? Ofrezca una explicación física de su existencia. ¿Cambia la fuerza de arrastre al movimiento el periodo de la oscilación? Úsese la gráfica para calcular el tiempo entre máximos sucesivos y compare el resultado con $2\pi\sqrt{m/k}$. (*b*) Si la fuerza de arrastre se aumenta lo suficiente, no ocurren oscilaciones y se dice que el movimiento está *sobreamortiguado*. Tome $b = 110$ kg/s y use el programa para trazar a $x(t)$ y a $E(t)$.

75. Si se aplica una fuerza sinusoidal a un objeto colocado en el extremo de un resorte, la segunda ley de Newton se convierte en $md^2x/dt^2 = -kx - bv + F_m \cos \omega'' t$. Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para calcular la coordenada x, la velocidad v, y la energía mecánica total E del oscilador al final de cada intervalo de tiempo de duración Δt desde $t = 0$ hasta $t = t_f$. Véase la sección 6-6 y los proyectos de computación al final del capítulo 6. Para los siguientes problemas tome $m = 2.0$ kg, $k = 350$ N/m, $x_0 = 0.070$ m, $v_0 = 0$, $t_f = 2.0$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. (*a*) Desprecie el amortiguamiento haciendo que $b = 0$ y considere que $F_m = 18$ N y $\omega'' = 35$ rad/s. Use su programa para trazar $x(t)$ y $E(t)$ en gráficas por separado. Nótese que la fuerza aplicada causa desviaciones ligeras de la forma sinusoidal. Nótese también que la fuerza aplicada transfiere energía al oscilador durante ciertas porciones del movimiento y la quita durante otros. Como resultado, la amplitud cambia ligeramente con el tiempo. Use la gráfica para estimar la amplitud promedio. Calcule también el periodo y use su valor para calcular la frecuencia angular. ¿Está más cerca de 35 rad/s o de $\omega = \sqrt{k/m}$? (*b*) Una vez más tome $b = 0$ y considere que $F_m = 18$ N pero suponga que $\omega'' = 15$ rad/s, mucho más cerca de $\sqrt{k/m}$. Trace $x(t)$ y $E(t)$ y note el crecimiento de la amplitud y de la energía. La fuerza aplicada pone energía en el oscilador durante periodos mucho más largos que cuando absorbe energía. (*c*) Tome en cuenta ahora el amortiguamiento haciendo que $b = 15$ kg/s. Una vez más considere que $F_m = 18$ N y $\omega'' = 35$ rad/s, lejos de $\sqrt{k/m}$. Trace $x(t)$ y $E(t)$. Use su gráfica para hallar la frecuencia angular cerca de $t = 0$ y cerca de $t = 2$ s. Usted podría medir la mitad de un periodo y duplicar el resultado. Nótese que al principio el movimiento está cerca del movimiento natural, el movimiento en ausencia de una fuerza aplicada. En 1 s aproximadamente el movimiento natural se ha amortiguado de manera considerable y el movimiento subsiguiente es aquel que resulta de la aplicación de una fuerza externa a la masa. Calcule la amplitud cerca de $t = 2$ s. (*d*) Repita la parte (*c*) pero tomando $\omega'' = 15$ rad/s. Calcule la amplitud. (*e*) ¿Para cuál de las situaciones consideradas es más grande la amplitud cerca de $t = 2$ s? ¿Y la más pequeña?