

FÍSICA 1

4^a Edición



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

<hr/> <hr/>		3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
<hr/> <hr/>		3-5 Multiplicación de Vectores	48
<hr/> <hr/>		3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (<i>Opcional</i>)	50
<hr/> <hr/>		Preguntas y Problemas	53
<hr/> <hr/>		<hr/> <hr/>	
CAPÍTULO 1	1	CAPÍTULO 4	
MEDICIONES		MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL	
		Y TRIDIMENSIONAL	59
<hr/> <hr/>		<hr/> <hr/>	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1	4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2	4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
1-3 Patrón de Tiempo	3	4-3 Movimiento de proyectiles	63
1-4 Patrón de Longitud	5	4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
1-5 Patrón de Masa	7	4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (<i>Opcional</i>)	69
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8	4-6 Movimiento Relativo	71
1-7 Análisis Dimensional	10	Preguntas y Problemas	74
Preguntas y Problemas	11	<hr/> <hr/>	
<hr/> <hr/>		<hr/> <hr/>	
CAPÍTULO 2	17	CAPÍTULO 5	
MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL		FUERZA Y LAS LEYES	
		DE NEWTON	87
<hr/> <hr/>		<hr/> <hr/>	
2-1 Cinemática de la Partícula	17	5-1 Mecánica Clásica	87
2-2 Descripciones del Movimiento	17	5-2 Primera Ley de Newton	88
2-3 Velocidad Promedio	20	5-3 Fuerza	90
2-4 Velocidad Instantánea	21	5-4 Masa	90
2-5 Movimiento Acelerado	23	5-5 Segunda Ley de Newton	92
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25	5-6 Tercera Ley de Newton	94
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28	5-7 Unidades de Fuerza	96
2-8 Galileo y la Caída Libre (<i>Opcional</i>)	29	5-8 Peso y Masa	97
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (<i>Opcional</i>)	30	5-9 Medición de Fuerzas	99
Preguntas y Problemas	31	5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
<hr/> <hr/>		5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
CAPÍTULO 3	41	Preguntas y Problemas	106
VECTORES		<hr/> <hr/>	
<hr/> <hr/>		<hr/> <hr/>	
3-1 Vectores y Escalares	41		
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42		
3-3 Componentes de Vectores	43		

**CAPÍTULO 6
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117**

6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos (<i>Opcional</i>)	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas (<i>Opcional</i>)	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton (<i>Opcional</i>)	135
Preguntas y Problemas	137

**CAPÍTULO 7
TRABAJO Y ENERGÍA 149**

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional (<i>Opcional</i>)	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia (<i>Opcional</i>)	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades (<i>Opcional</i>)	162
Preguntas y Problemas	163

**CAPÍTULO 8
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171**

8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales (<i>Opcional</i>)	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas	183

8-7 Masa y Energía (<i>Opcional</i>)	187
8-8 Cuantización de la Energía (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	189 190

**CAPÍTULO 9
SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203**

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas (<i>Opcional</i>)	217
9-8 Sistemas de Masa Variable (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	220 224

**CAPÍTULO 10
COLISIONES 233**

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea (<i>Opcional</i>)	248
Preguntas y Problemas	250

**CAPÍTULO 11
CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261**

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial (<i>Opcional</i>)	269
Preguntas y Problemas	271

**CAPÍTULO 12
DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277**

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

CAPÍTULO 13
ÍMPETU ANGULAR **305**

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (<i>Opcional</i>)	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

CAPÍTULO 14
EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS **331**

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

CAPÍTULO 15
OSCILACIONES **353**

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado (<i>Opcional</i>)	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia (<i>Opcional</i>)	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	371 373

CAPÍTULO 16
GRAVITACIÓN **383**

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria G	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia (<i>Opcional</i>)	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial (<i>Opcional</i>)	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	404 408

CAPÍTULO 17
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS **419**

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	431 433

CAPÍTULO 18
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS **441**

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo (<i>Opcional</i>)	450

18-6 Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico (<i>Opcional</i>)	453
Preguntas y Problemas	456

CAPÍTULO 19
MOVIMIENTO ONDULATORIO **465**

19-1 Ondas Mecánicas	465
19-2 Tipos de Ondas	466
19-3 Ondas Viajeras	467
19-4 Velocidad de Onda	471
19-5 La Ecuación de la Onda (<i>Opcional</i>)	471
19-6 Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7 El Principio de Superposición	476
19-8 Interferencia de Ondas	478
19-9 Ondas Estacionarias	482
19-10 Resonancia	485
Preguntas y Problemas	487

CAPÍTULO 20
ONDAS SONORAS **495**

20-1 La Velocidad del Sonido	495
20-2 Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3 Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4 Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5 Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6 Pulsaciones	506
20-7 El Efecto Doppler	508
Preguntas y Problemas	511

CAPÍTULO 21
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD **519**

21-1 Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2 Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3 Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4 La Transformación de Lorentz	526
21-5 Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6 La Transformación de las Velocidades	529
21-7 Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8 Ímpetu Relativista	535
21-9 Energía Relativista	537
21-10 La Lógica la Relatividad Especial	540
Preguntas y Problemas	541

CAPÍTULO 22
TEMPERATURA **547**

22-1 Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2 Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3 Medición de la Temperatura	549
22-4 La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5 Dilatación Térmica	554
Preguntas y Problemas	558

CAPÍTULO 23
LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL **565**

23-1 Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2 El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3 Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4 Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5 Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6 La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7 Fuerzas Intermoleculares (<i>Opcional</i>)	578
23-8 La Ecuación de Estado de van der Waals (<i>Opcional</i>)	579
Preguntas y Problemas	581

CAPÍTULO 24
MECÁNICA ESTADÍSTICA **587**

24-1 Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2 Recorrido libre medio	589
24-3 La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4 La Distribución de las Energías	597
24-5 Movimiento Browniano	599
24-6 Distribuciones Estadísticas Cuánticas (<i>Opcional</i>)	600
Preguntas y Problemas	603

CAPÍTULO 25
EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA **607**

25-1 El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2 Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3 Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4 Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

CAPÍTULO 26
ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY
DE LA TERMODINÁMICA **635**

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

APÉNDICES

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

CAPÍTULO 13

ÍMPETU ANGULAR

En el capítulo 12 hemos estudiado la dinámica del movimiento de rotación de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo en un marco de referencia inercial. Hemos visto que la relación escalar $\Sigma \tau = I\alpha$, en la que sólo se consideraban las componentes de la torca externa a lo largo del eje de rotación, era suficiente para resolver los problemas dinámicos en este caso especial.

En este capítulo continuamos este análisis y lo extendemos a situaciones en las que el eje de rotación puede no estar fijo en un marco de referencia inercial. Para resolver estos problemas dinámicos desarrollamos y empleamos una relación vectorial para el movimiento de rotación, que es análoga a la forma vectorial de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$. Presentamos también el ímpetu angular y demostramos su importancia como una propiedad dinámica de las rotaciones.

Finalmente, demostramos que, en sistemas en los que no actúa una torca externa neta, puede aplicarse la importante ley de la conservación del ímpetu angular.

13-1 ÍMPETU ANGULAR DE UNA PARTÍCULA

Hemos visto que el *ímpetu lineal* es útil en los casos que interviene el movimiento de traslación de partículas aisladas o de sistemas de partículas, incluyendo a los cuerpos rígidos. Por ejemplo, el ímpetu lineal se conserva en las colisiones. Para una partícula aislada el ímpetu lineal es $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (Ec. 19 del capítulo 9); para un sistema de partículas es $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{\text{cm}}$ (Ec. 25 del capítulo 9), en donde M es la masa total del sistema y \mathbf{v}_{cm} es la velocidad del centro de masa. En el movimiento de rotación, el análogo del ímpetu lineal se llama *ímpetu angular*, que definimos a continuación para el caso especial de una partícula aislada. Posteriormente, ampliamos la definición para incluir sistemas de partículas, y demostramos que el ímpetu angular es un concepto tan útil en el movimiento de rotación como lo es el ímpetu lineal en el movimiento de traslación.

Consideremos una partícula de masa m e ímpetu lineal \mathbf{p} en una posición \mathbf{r} respecto al origen O de un marco de referencia inercial; para mayor conveniencia (véase la Fig. 1) hemos elegido que el plano xy sea el plano definido

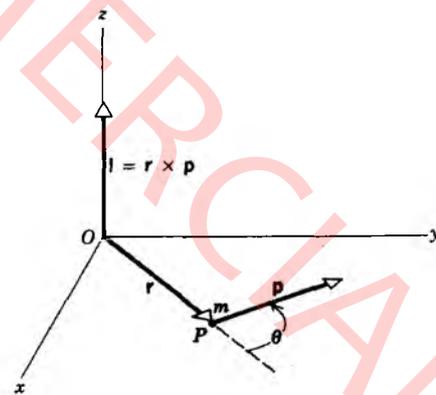


Figura 1 Una partícula de masa m , localizada en el punto P por el vector de posición \mathbf{r} , tiene un ímpetu lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. (Para mayor simplificación se supone que tanto \mathbf{r} como \mathbf{p} están en el plano xy .) Respecto al origen O , la partícula tiene un ímpetu angular de $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, paralelo al eje z en este caso.

por los vectores \mathbf{p} y \mathbf{r} . Definimos que el *ímpetu angular* \mathbf{l} de la partícula *respecto al origen* O sea

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (1)$$

Nótese que debemos especificar el origen O con objeto de definir al vector de posición \mathbf{r} en la definición del impetu angular.

El impetu angular es un vector. Su magnitud está dada por

$$l = rp \text{ sen } \theta. \quad (2)$$

donde θ es el ángulo más pequeño entre \mathbf{r} y \mathbf{p} y su dirección es normal al plano formado por \mathbf{r} y \mathbf{p} . El sentido está dado por la regla de la mano derecha: hágase girar a \mathbf{r} sobre \mathbf{p} , en el ángulo más pequeño entre ellos, con los dedos de la mano derecha doblados; el pulgar derecho extendido apunta entonces en la dirección de l (paralela al eje z en la Fig. 1).

También podemos escribir la magnitud de l ya sea como

$$l = (r \text{ sen } \theta) p = pr_{\perp}, \quad (3a)$$

o como

$$l = r(p \text{ sen } \theta) = rp_{\perp}, \quad (3b)$$

donde $r_{\perp} (= r \text{ sen } \theta)$ es la componente de \mathbf{r} en ángulo recto con la línea de acción de \mathbf{p} , y $p_{\perp} (= p \text{ sen } \theta)$ es la componente de \mathbf{p} en ángulo recto con \mathbf{r} . La ecuación 3b muestra que sólo la componente de \mathbf{p} perpendicular a \mathbf{r} contribuye al impetu angular. Cuando el ángulo θ entre \mathbf{r} y \mathbf{p} es 0° ó 180° , no existe una componente perpendicular ($p_{\perp} = p \text{ sen } \theta = 0$); entonces la línea de acción de \mathbf{p} pasa por el origen, y r_{\perp} es también cero. En este caso ambas ecuaciones 3a y 3b muestran que el impetu angular l es cero.

Derivaremos ahora una relación importante entre la torca y el impetu angular para una sola partícula. Primero diferenciamos a la ecuación 1 y obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{p}). \quad (4)$$

La derivada de un producto vectorial se considera de la misma manera que la derivada de un producto ordinario, excepto que no debemos cambiar el orden de los términos. Tenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Pero $d\mathbf{r}/dt$ es la velocidad instantánea \mathbf{v} de la partícula, y \mathbf{p} es igual a $m\mathbf{v}$. Haciendo estas sustituciones en el primer producto de la derecha, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (5)$$

Ahora $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, porque el producto vectorial de dos vectores paralelos es cero. Reemplazando a $d\mathbf{p}/dt$ en el

segundo producto por la fuerza neta $\Sigma \mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula, tenemos

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F}.$$

El lado derecho de esta ecuación es precisamente la torca neta $\Sigma \boldsymbol{\tau}$. Por lo tanto, obtenemos

$$\Sigma \boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}, \quad (6)$$

que afirma que la torca neta que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de impetu angular. En esta ecuación, tanto la torca $\boldsymbol{\tau}$ como el impetu angular \mathbf{l} deben definirse con respecto al mismo origen. La ecuación 6 es el análogo de rotación de la ecuación 20 del capítulo 9, $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$, que establece que la fuerza neta que actúa sobre una partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de su impetu lineal.

La ecuación 6, como todas las ecuaciones vectoriales, es equivalente a tres ecuaciones escalares, a saber,

$$\Sigma \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \Sigma \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \Sigma \tau_z = \frac{dl_z}{dt}. \quad (7)$$

Por lo tanto, la componente x de la torca externa neta está dada por el cambio con el tiempo de la componente x del impetu angular. Se obtienen resultados similares para las direcciones y y z .

Problema muestra 1 Una partícula de masa m se libera desde el reposo en el punto P de la figura 2, cayendo paralela al eje y (vertical). (a) Halle la torca que actúa sobre m en cualquier tiempo t , con respecto al origen O . (b) Halle el impetu angular de m en cualquier tiempo t , con respecto a este mismo origen. (c) Demuestre que la relación $\Sigma \boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ (Ec. 6) da un resultado correcto cuando se aplica a este conocido problema.

Solución (a) La torca está dada por $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y su magnitud es

$$\tau = rF \text{ sen } \theta.$$

En este ejemplo $r \text{ sen } \theta = b$ y $F = mg$, de modo que

$$\tau = mgb = \text{una constante.}$$

Nótese que la torca es simplemente el producto de la fuerza mg por el brazo de momento b . La regla de la mano derecha muestra que $\boldsymbol{\tau}$ está dirigida perpendicularmente en la figura.

(b) El impetu angular está dado por la ecuación 1, $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$. Su magnitud es, de la ecuación 2,

$$l = rp \text{ sen } \theta.$$

En este ejemplo $r \text{ sen } \theta = b$ y $p = mv = m(gt)$, de modo que

$$l = mgbt.$$

La regla de la mano derecha muestra que \mathbf{l} está dirigido perpendicularmente en la figura, lo que significa que \mathbf{l} y $\boldsymbol{\tau}$ son vectores

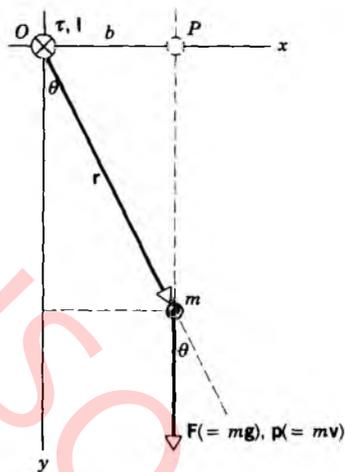


Figura 2 Problema muestra 1. Una partícula de masa m cae verticalmente desde el punto P . La torca τ y el ímpetu angular l con respecto al origen O están dirigidos perpendicularmente en la figura, como se indica con el símbolo \otimes en el punto O .

paralelos. El vector l cambia con el tiempo de magnitud solamente, su dirección permanece siempre la misma en este caso.

(c) Escribiendo la ecuación 6 en términos de magnitudes, tenemos

$$\tau = \frac{dl}{dt}.$$

Sustituyendo la expresión para τ y l de (a) y (b) tenemos que

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb,$$

la cual es una identidad. Entonces la relación $\tau = dl/dt$ rinde resultados correctos en este caso. En efecto, si cancelamos a la constante b de los primeros dos términos de arriba y sustituimos a gt por la cantidad equivalente v , tenemos

$$mg = \frac{d}{dt}(mv).$$

Puesto que $mg = F$ y $mv = p$, éste es el conocido resultado $F = dp/dt$. Entonces, como lo hemos indicado anteriormente, las relaciones como $\tau = dl/dt$, aunque a menudo se usan en forma generalizada, no son postulados básicos nuevos de la mecánica clásica sino más bien la reformulación de las leyes de Newton en el caso del movimiento de rotación.

Nótese que los valores de τ y de l dependen de nuestra elección del origen, esto es, de b . En particular, si $b = 0$, entonces $r = 0$ y $l = 0$.

13-2 SISTEMAS DE PARTÍCULAS

Hasta aquí hemos estudiado solamente partículas aisladas. Para calcular el ímpetu angular total L de un sistema de partículas con respecto a un punto dado, debemos sumar vectorialmente los ímpetus angulares de todas las partículas individuales en torno a este punto. Para un sistema que contenga N partículas, tenemos, entonces,

$$L = l_1 + l_2 + \cdots + l_N = \sum_{n=1}^N l_n$$

donde la suma (vectorial) se ha tomado sobre todas las partículas del sistema.

A medida que el tiempo pasa, el ímpetu angular total L del sistema con respecto a un punto de referencia fijo (el cual elegimos, como en nuestra definición básica de l en la ecuación 1, que sea el origen de un marco de referencia inercial) puede cambiar. Esto es,

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dl_1}{dt} + \frac{dl_2}{dt} + \cdots = \sum_{n=1}^N \frac{dl_n}{dt}.$$

Para cada partícula, $dl_n/dt = \tau_n$, y haciendo esta sustitución tenemos que

$$\frac{dL}{dt} = \sum \tau_n.$$

Es decir, la razón de cambio con respecto al tiempo del ímpetu angular total de un sistema de partículas, es igual a la torca neta que actúa sobre el sistema.

Entre las torcas que actúen sobre el sistema estarán (1) las torcas ejercidas sobre las partículas del sistema por fuerzas internas entre las partículas y (2) las torcas ejercidas sobre las partículas del sistema por fuerzas externas. Si la tercera ley de Newton se cumple en su llamada forma fuerte, esto es, si las fuerzas entre dos partículas cualesquiera no sólo son iguales y opuestas sino que también están dirigidas a lo largo de la línea que une a las dos partículas, entonces la torca interna total es cero porque la torca resultante de cada par de fuerzas acción-reacción internas es cero.

De aquí que la primera fuente, la torca a partir de las fuerzas internas, no contribuya al cambio en L . Sólo permanece la segunda fuente (la torca a partir de las fuerzas externas), y podemos escribir

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}, \quad (8)$$

donde $\sum \tau_{\text{ext}}$ es la suma de las torcas externas que actúan sobre el sistema. Así, decimos que la torca externa neta que actúa sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio en el tiempo del ímpetu angular total del sistema. La torca y el ímpetu angular deben calcularse con respecto al mismo origen de un marco de referencia inercial. En situaciones en las que no es probable que surja una confusión, evitamos el subíndice de τ_{ext} para mayor conveniencia.

La ecuación 8 es la generalización de la ecuación 6 a muchas partículas. Se cumple tanto si las partículas que forman el sistema están en movimiento unas respecto a las otras o si tienen relaciones espaciales fijas, como en un cuerpo rígido.

La ecuación 8 es la analogía de rotación de la ecuación 27 del capítulo 9, $\Sigma F_{\text{ext}} = dP/dt$, que nos dice que para un

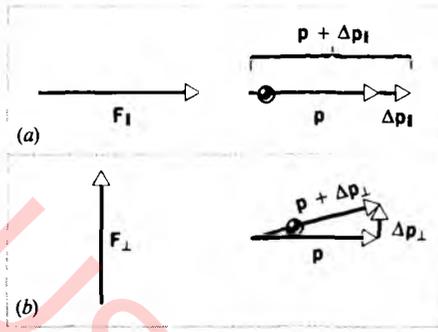


Figura 3 (a) Cuando una componente de una fuerza F_{\parallel} actúa paralelamente al ímpetu lineal p de una partícula, el ímpetu lineal cambia en Δp_{\parallel} , el cual es paralelo a p . (b) Cuando una componente de una fuerza F_{\perp} actúa perpendicularmente al ímpetu lineal p de una partícula, el ímpetu lineal cambia en Δp_{\perp} , el cual es perpendicular a p . La partícula se mueve ahora en la dirección de la suma vectorial $p + \Delta p_{\perp}$.

sistema de partículas (cuerpo rígido o no) la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es igual a la razón de cambio en el tiempo de su ímpetu lineal total.

Extendamos más allá la analogía entre el modo en que una fuerza cambia el ímpetu lineal y el modo en que una torca cambia el ímpetu angular. Supongamos que una fuerza F actúa sobre una partícula que se mueve con ímpetu lineal p . Podemos resolver a F en dos componentes, como se muestra en la figura 3: una componente (F_{\parallel}) es paralela a la dirección (instantánea) de p y otra (F_{\perp}) es perpendicular a p . En un intervalo de tiempo pequeño Δt , la fuerza produce un cambio en el ímpetu Δp , determinado de acuerdo con $F = \Delta p / \Delta t$. Así, Δp es paralelo a F . La componente F_{\parallel} da un cambio en el ímpetu Δp_{\parallel} paralelo a p , que se suma a p y cambia su magnitud pero no su dirección (véase la Fig. 3a). La componente perpendicular F_{\perp} , por otra parte, proporciona un incremento Δp_{\perp} que cambia la dirección de p pero, cuando Δp_{\perp} es pequeño comparado con p , deja a la magnitud de p sin alteración (véase la Fig. 3b). Un ejemplo de lo último es una partícula que se mueve en círculo a velocidad constante sujeta solamente a una fuerza centrípeta, la cual es siempre perpendicular a la velocidad tangencial.

El mismo análisis rige para la acción de una torca, como se muestra en la figura 4. En este caso, $\tau = \Delta L / \Delta t$, y ΔL debe ser paralelo a τ . Una vez más resolvemos a τ en dos componentes, τ_{\parallel} paralelo a L y τ_{\perp} perpendicular a L . La componente de τ paralela a L cambia de magnitud al ímpetu angular, pero no de dirección (Fig. 4a). La componente de τ perpendicular a L da un incremento ΔL_{\perp} perpendicular a L , que cambia la dirección de L pero no su magnitud (Fig. 4b). Esta última condición es responsable del movimiento de los trompos y de los giroscopios, como veremos en la sección 13-5. Al comparar las figuras

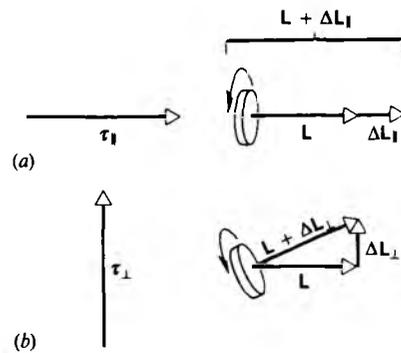


Figura 4 (a) Cuando la componente τ_{\parallel} de una torca actúa paralelamente al ímpetu angular L de un sistema, el ímpetu angular cambia en ΔL_{\parallel} , el cual es paralelo a L . (b) Cuando una componente τ_{\perp} de una torca actúa perpendicularmente al ímpetu angular L de un sistema, el ímpetu angular cambia en ΔL_{\perp} , el cual es perpendicular a L . El eje de rotación apunta ahora en la dirección que corresponde a la suma vectorial $L + \Delta L_{\perp}$.

3 y 4 podemos ver las semejanzas entre la dinámica de rotación y la dinámica de traslación.

Una comparación adicional entre los fenómenos lineal y de rotación es que *no se efectúa ningún trabajo* si (1) la fuerza actúa en ángulo recto con el ímpetu lineal (Fig. 3b), o (2) la torca actúa en ángulo recto con el ímpetu angular (Fig. 4b). En cada caso, el agente externo no provoca un cambio en la energía cinética, y el movimiento continúa con la misma velocidad lineal o de rotación.

En la figura 5 se muestra un ejemplo de la aplicación de la ecuación 8 a la dinámica de la rotación. En la figura 5a, un extremo del eje de una rueda de bicicleta que está girando descansa libremente sobre un poste, y el otro extremo está detenido por la mano de un estudiante. El estudiante empuja tangencialmente a la rueda en la llanta, con objeto de hacer que gire más rápidamente. Considerada con respecto al centro de la rueda, la torca ejercida por el estudiante es paralela al ímpetu angular de la rueda, apuntando ambos vectores (τ y L) hacia el estudiante. El resultado de esta torca es un aumento en el ímpetu angular de la rueda. En la figura 5b, el estudiante ha soltado un soporte del eje. Consideremos ahora las torcas respecto al punto de soporte que permanece. Existen dos fuerzas que actúan, una fuerza normal al punto de soporte, que no produce ninguna torca respecto a ese punto, y el peso de la rueda que actúa hacia abajo en el centro de masa. La torca respecto al punto O debido al peso es perpendicular a L , y su efecto es, por lo tanto, un cambio en la dirección de L , como en la figura 4b. Sin embargo, puesto que la dirección de L es también la dirección del eje,* el efecto

* Esto se cumple sólo si el eje de rotación es también un eje de simetría del cuerpo; véase la sección 13-3.

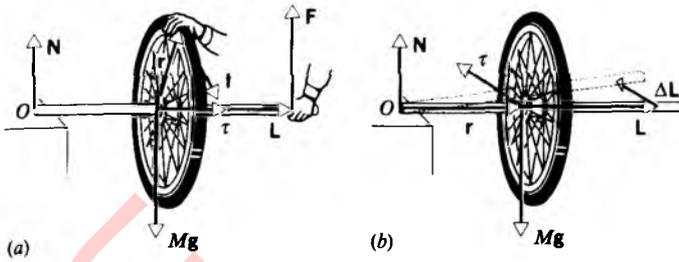


Figura 5 (a) Una fuerza tangencial f en la llanta de la rueda proporciona una torca τ (respecto al centro de la rueda) a lo largo del eje de rotación, aumentando la magnitud de la velocidad angular de la rueda pero dejando a su dirección sin alterar. (b) Cuando el extremo del eje se libera, la torca de la gravitación respecto al punto O apunta hacia el papel, esto es, perpendicularmente al eje de rotación, como en la figura 4b. Esta torca cambia la dirección del eje de rotación, y el eje de la rueda se mueve en el plano horizontal hacia la posición mostrada por la línea punteada.

de la fuerza de la gravedad (hacia abajo) es girar al eje hacia un lado. La rueda pivotará lateralmente respecto al punto de soporte. ¡Ensáyelo! (Si usted no tiene a la mano una rueda de bicicleta montada libremente, un giroscopio de juguete funciona de la misma manera.)

Como la hemos derivado, la ecuación 8 se cumple cuando τ y L se miden con respecto al origen de un marco de referencia inercial. Bien podríamos preguntarnos si se cumple todavía cuando medimos a estos dos vectores con respecto a un punto arbitrario (digamos, una partícula determinada) del sistema en movimiento. En general, tal punto se movería de manera complicada si el cuerpo o sistema de partículas se trasladara, se volteara y cambiara su configuración, y la ecuación 8 no se aplicaría a tal punto de referencia. Sin embargo, si se elige que el punto de referencia sea el centro de masa del sistema, aun cuando este punto pudiera estar acelerando en nuestro marco de referencia inercial, entonces la ecuación 8 sí se cumple. (Véase el problema 8.) Ésta es otra notable propiedad del centro de masa. Entonces podemos separar el movimiento general de un sistema de partículas en el movimiento de traslación de su centro de masa (Ec. 27 del capítulo 9) y un movimiento de rotación en torno a su centro de masa (Ec. 8).

13-3 ÍMPETU ANGULAR Y VELOCIDAD ANGULAR

Para presentar casos en los que sea absolutamente necesario considerar la naturaleza vectorial de la velocidad angular, de la torca, y del ímpetu angular, consideraremos primero un ejemplo sencillo del giro de una partícula que

ilustra un caso en que la velocidad angular y el ímpetu angular no son paralelos.

La figura 6a muestra una partícula aislada de masa m unida a un flecha rígida, sin masa por un brazo rígido, sin masa, de longitud r' perpendicular a la flecha. La partícula se mueve en un círculo de radio r' , y suponemos que lo hace con una velocidad constante v . Imaginemos que este experimento tiene lugar en una región de gravedad despreciable, de modo que no necesitemos considerar la fuerza de la gravedad que actúa sobre la partícula. La única fuerza que actúa sobre la partícula es la fuerza centrípeta ejercida por el brazo que une a la partícula con la flecha.

La flecha se halla confinada al eje z por dos chumaceras delgadas ideales (sin fricción). Hagamos que la chumacera inferior defina al origen O de nuestro sistema de coordenadas. La chumacera superior, como veremos, es necesaria para impedir que la flecha se tambalee con respecto al eje z , lo cual sucede cuando la velocidad angular no es paralela al ímpetu angular.

La velocidad angular ω de la partícula apunta hacia arriba a lo largo del eje z (o, de manera equivalente, paralelo a él) el eje z , como se muestra en la figura 6b. Esto es consistente con la relación vectorial $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ (Ec. 16 del capítulo 11). No importa dónde se elija el origen a lo largo del eje z , el vector de la velocidad angular será paralelo al eje. Su magnitud es, de manera similar, independiente de la ubicación del origen, siendo (a partir del producto cruz) $v/(r \text{ sen } \theta) = v/r'$.

El ímpetu angular \mathbf{l} de la partícula con respecto al origen O del marco de referencia está dado por la ecuación 1, o sea,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p},$$

donde \mathbf{r} y $\mathbf{p} (= m\mathbf{v})$ se muestran en la figura 6b. El vector \mathbf{l} es perpendicular al plano formado por \mathbf{r} y \mathbf{p} , lo que significa que \mathbf{l} no es paralelo a ω . Nótese (y véase la Fig. 6c) que \mathbf{l} tiene una componente (vector) l_z que es paralela a ω , pero tiene otra componente (vector) \mathbf{l}_\perp que es perpendicular a ω . Éste es un caso en que nuestra analogía entre el movimiento lineal y circular no es válida: \mathbf{p} es siempre paralelo a \mathbf{v} , pero \mathbf{l} no siempre es paralelo a ω . Si elegimos que nuestro origen esté en el plano de la partícula que describe el círculo, entonces \mathbf{l} es paralelo a ω ; de otro modo, no lo será.

Consideremos ahora la relación entre l_z y ω para la partícula que está girando. De la figura 6c, en la que hemos trasladado a \mathbf{l} al centro del círculo, obtenemos

$$l_z = l \text{ sen } \theta = r(mv) \text{ sen } \theta = r(mr'\omega) \text{ sen } \theta,$$

usando $v = r'\omega$. Sustituyendo por r' (el radio del círculo en el que se mueve la partícula) al producto $r \text{ sen } \theta$ nos da

$$l_z = mr'^2\omega. \quad (9)$$

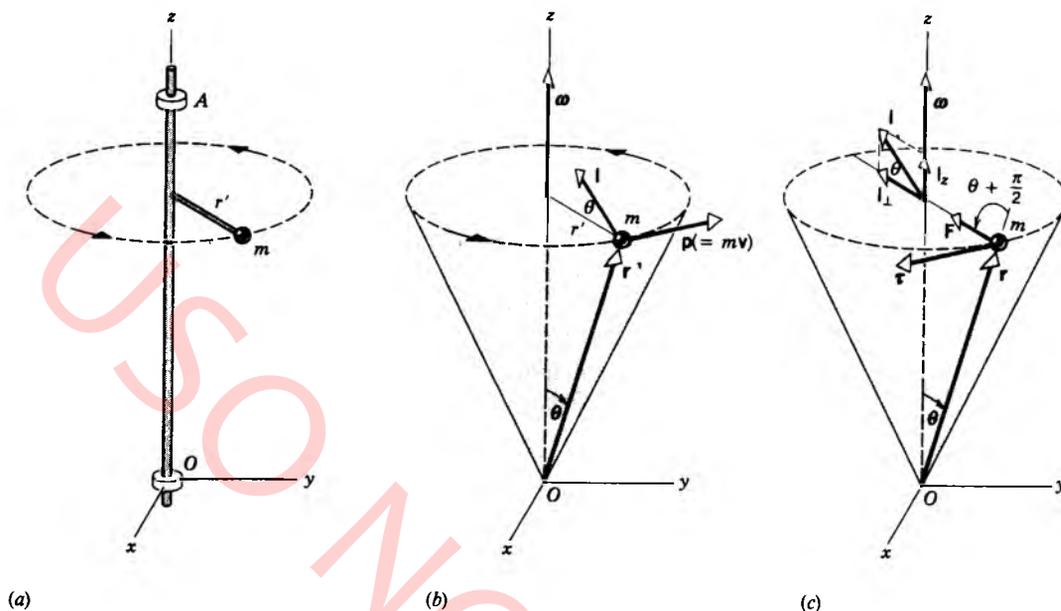


Figura 6 (a) Una partícula de masa m está unida por medio de un brazo de longitud r' a una flecha fijada por dos chumaceras (en O y A) para girar en torno al eje z . (b) La partícula gira a velocidad tangencial v en un círculo de radio r' alrededor del eje z (se omiten las barras y las chumaceras para simplificar la ilustración). Se muestra el ímpetu angular $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ con respecto al origen O . (c) Para que la partícula se mueva en círculo, deberá haber una fuerza centrípeta \mathbf{F} que actúe como se muestra, dando por resultado una torca $\boldsymbol{\tau}$ respecto a O . Por conveniencia, el vector \mathbf{l} del momento angular y sus componentes a lo largo y perpendiculares a z se muestran en el centro del círculo.

Ahora mr'^2 es la inercia de rotación I de la partícula con respecto al eje z . Entonces

$$l_z = I\omega. \quad (10)$$

Nótese que la relación vectorial $\mathbf{l} = I\boldsymbol{\omega}$ (que es análoga a la relación lineal $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$) *no* es correcta en este caso, porque \mathbf{l} y $\boldsymbol{\omega}$ no apuntan en la misma dirección.

¿En qué circunstancias apuntarán en la misma dirección el ímpetu y la velocidad angular? Para ilustrarlo, añadiremos otra partícula de la misma masa m al sistema, como se muestra en la figura 7, por medio de otro brazo unido a la flecha central de la figura 6a en el mismo sitio que el primer brazo pero apuntando en la dirección opuesta. La componente l_{\perp} debida a esta segunda partícula será igual y opuesta a la de la primera partícula, y los dos vectores l_{\perp} sumarán cero. Sin embargo, los dos vectores l_z apuntan en la misma dirección y se suman. Entonces, en este sistema de dos partículas el ímpetu angular total \mathbf{L} es paralelo a $\boldsymbol{\omega}$.

Podemos ahora extender nuestro sistema a un cuerpo rígido, formado de muchas partículas. Si el cuerpo es simétrico respecto al eje de rotación, con lo cual queremos decir que para cada elemento de masa del cuerpo deberá haber un elemento de masa idéntico diametralmen-

te opuesto al primer elemento y a la misma distancia del eje de rotación, entonces el cuerpo puede ser visto como constituido por grupos de pares de partículas de la misma clase que hemos estado estudiando. Puesto que \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos para todos estos pares, serán también paralelos para cuerpos rígidos que posean esta clase de simetría, que recibe el nombre de *simetría axial*.

Para tales cuerpos rígidos simétricos \mathbf{L} y $\boldsymbol{\omega}$ son paralelos y pueden ser escritos en forma vectorial

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}. \quad (11)$$

Sin embargo, no olvidemos que si \mathbf{L} representa al ímpetu angular *total*, entonces la ecuación 11 *se aplica únicamente* a cuerpos que sean simétricos con respecto al eje de rotación. Si \mathbf{L} representa a la componente del vector del ímpetu angular a lo largo del eje de rotación (esto es, a L_z), entonces la ecuación 11 se cumple para *cualquier* cuerpo rígido, simétrico o no, que gire con respecto a un eje fijo.

En cuerpos simétricos (tales como el sistema de dos partículas de la figura 7), puede ser retirada la chumacera superior de la figura 6a, y la flecha permanecerá paralela al eje z . Podemos verificar esto observando lo fácil que es hacer girar sobre un eje a un objeto simétrico tal como un trompo o una pequeña rueda abrasiva mantenidos sola-

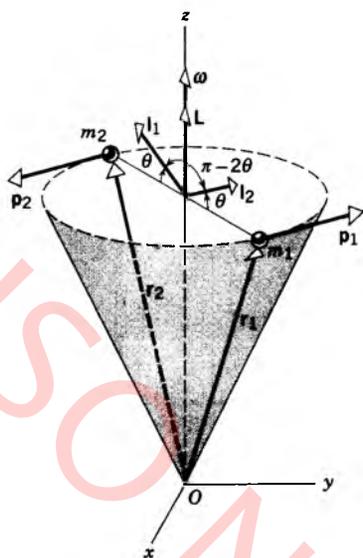


Figura 7 Dos partículas de masa m girando como en la figura 6, pero en los extremos opuestos de un diámetro. El momento angular total L de las dos partículas es, en este caso, paralelo a la velocidad angular ω .

mente entre el pulgar y el índice de una mano. Cualquier pequeña asimetría del objeto requiere un segundo apoyo que mantenga a la flecha en una dirección fija; la chumacera debe ejercer una torca sobre la flecha, la cual se bambolea al girar el objeto, como veremos al final de esta sección. Esto es particularmente serio para objetos que giran a altas velocidades, tales como los rotores de turbina. Aunque diseñados para ser simétricos, tales rotores, debido a pequeños errores de colocación de los álabes, por ejemplo, pueden ser ligeramente asimétricos. Pueden recuperarse a la simetría por la adición o eliminación de metal en los lugares apropiados; esto se lleva a cabo haciendo girar a la rueda en un aparato especial de modo que el tambaleo pueda ser medido cuantitativamente, a la vez que calculada y automáticamente indicada la medida correctiva necesaria. De manera parecida, en los rines de las llantas de los automóviles se colocan pesas de plomo en puntos estratégicos para reducir el bamboleo a altas velocidades. Para “balancear” una rueda de automóvil, el mecánico busca precisamente que los vectores del ímpetu angular y de la velocidad angular de la rueda sean paralelos, reduciendo así el esfuerzo sobre los baleros de las ruedas.

Problema muestra 2 ¿Cuál es mayor, el ímpetu angular de la Tierra asociado con su rotación sobre su eje o el ímpetu angular de la Tierra asociado con su movimiento orbital alrededor del Sol?

Solución Para la rotación sobre su eje, tratamos a la Tierra como una esfera uniforme ($I = \frac{2}{5} MR_E^2$). La velocidad angular es

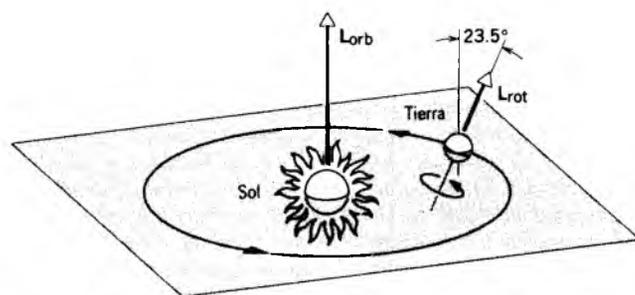


Figura 8 Problema muestra 2. La Tierra gira en una órbita (supuesta circular) alrededor del Sol, y también gira alrededor de su eje. Los dos vectores del ímpetu angular no son paralelos, porque el eje de rotación de la Tierra está inclinado en un ángulo de 23.5° con respecto a la normal al plano de la órbita. Las longitudes de los vectores no están trazadas a escala; L_{orb} deberá ser más grande que L_{rot} por un factor de 4×10^6 , aproximadamente.

$\omega = 2\pi/T$, donde T es el periodo de rotación ($24 \text{ h} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$). El ímpetu angular de rotación es, entonces,

$$\begin{aligned} L_{rot} &= I\omega = \frac{2}{5} MR_E^2 \frac{2\pi}{T} \\ &= \frac{2}{5} (5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{8.64 \times 10^4 \text{ s}} \\ &= 7.05 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

Para calcular el ímpetu angular orbital, necesitamos la inercia de rotación de la Tierra en torno a un eje que pase por el Sol. Para esto podemos tratar a la Tierra como una “partícula”, con un ímpetu angular $L = R_{orb} p$, en donde R_{orb} es el radio de la órbita y p es el momento lineal de la Tierra. La velocidad angular está nuevamente dada por $\omega = 2\pi/T$, en donde T es ahora el periodo orbital ($1 \text{ y} = 3.16 \times 10^7 \text{ s}$). El ímpetu angular orbital es

$$\begin{aligned} L_{orb} &= R_{orb} p = R_{orb} Mv = R_{orb} M(\omega R_{orb}) = MR_{orb}^2 \frac{2\pi}{T} \\ &= (5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(1.50 \times 10^{11} \text{ m})^2 \frac{2\pi}{3.16 \times 10^7 \text{ s}} \\ &= 2.67 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}. \end{aligned}$$

El ímpetu angular orbital es, entonces, mucho más grande que el ímpetu angular de rotación.

El vector del ímpetu angular orbital apunta en ángulo recto al plano de la órbita de la Tierra (figura 8), mientras que el ímpetu angular de rotación está inclinado a un ángulo de 23.5° con respecto a la normal al plano. Despreciando la lenta precesión del eje de rotación, los dos vectores permanecen constantes tanto en magnitud como en dirección al moverse la Tierra en su órbita.

Problema muestra 3 En el problema muestra 5 del capítulo 12 halle la aceleración del bloque al caer por aplicación directa de la ecuación 8 ($\tau = dL/dt$).

Solución Sobre el sistema que se muestra en la figura 9, que consiste del disco de masa M y el bloque de masa m , actúan dos

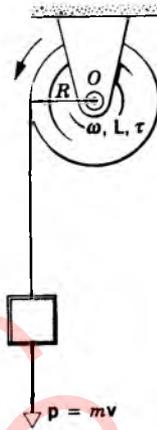


Figura 9 Problema muestra 3. La velocidad angular, el ímpetu angular, y la torca neta apuntan todos hacia afuera de la página, como lo indica el símbolo \odot en O.

fuerzas externas, la atracción de la gravedad (hacia abajo) mg que actúa sobre m y la fuerza (hacia arriba) ejercida por las chumaceras de la flecha del disco, a la cual consideramos como el origen. (La tensión en el cordón es una fuerza interna y no actúa desde el exterior sobre el sistema disco + bloque.) Solamente la primera de estas fuerzas externas ejerce una torca con respecto al origen, y su magnitud es $(mg)R$.

El ímpetu angular del sistema respecto al origen O en cualquier instante es

$$L = I\omega + (mv)R,$$

en donde $I\omega$ es el ímpetu angular del disco (simétrico) y $(mv)R$ es el ímpetu angular (= ímpetu lineal \times brazo del momento) del cuerpo que cae con respecto al origen. Estas dos contribuciones a L apuntan ambas en la misma dirección, es decir, perpendicularmente hacia afuera del plano de la figura 9.

Aplicando $\tau = dL/dt$ (en forma escalar) nos da

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt}(I\omega + mvR) \\ &= I\left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR\left(\frac{dv}{dt}\right) \\ &= I\alpha + mRa. \end{aligned}$$

Puesto que $a = \alpha R$ e $I = \frac{1}{2}MR^2$, esto se reduce a

$$mgR = (\frac{1}{2}MR^2)(a/R) + mRa$$

o sea

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}.$$

Este resultado es idéntico al resultado del problema muestra 5 del capítulo 12.

La torca sobre una partícula que se mueve en una trayectoria circular (Opcional)

El quizás inesperado resultado de que l y ω no sean paralelos en el caso simple mostrado en la figura 6 puede causar cierta preocupación. Sin embargo, este resultado es consistente con la

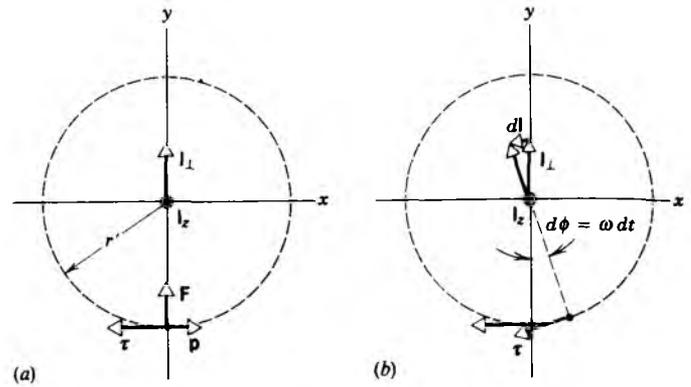


Figura 10 (a) Una vista bidimensional del plano de la partícula de la figura 6, que está girando. La componente z del ímpetu angular apunta hacia afuera del papel. (b) Cuando la partícula gira a través de un ángulo $d\phi$, la componente l_{\perp} del vector en el plano cambia en dl . Nótese que dl es paralelo a τ .

relación general $\tau = dl/dt$ para la torca que actúa sobre una partícula aislada. El vector l está cambiando con el tiempo al moverse la partícula; el cambio es totalmente en dirección y no en magnitud. Al girar la partícula, l_z permanece constante tanto en magnitud como en dirección, pero l_{\perp} cambia su dirección. Este cambio de l_{\perp} debe surgir de la aplicación de una torca. ¿Cuál es la fuente de esta torca?

Para que la partícula se mueva en círculo deberá actuar una fuerza centrípeta, como en la figura 6c, proporcionada por el brazo de soporte que une a la partícula con la flecha. (Hemos despreciado otras fuerzas externas, como la gravedad.) La única torca con respecto a O es proporcionada por F y está dada por

$$\tau = r \times F.$$

La torca τ es tangente al círculo (perpendicular al plano formado por r y F) y tiene la dirección mostrada en la figura 6c, como puede usted verificarlo por la regla de la mano derecha.

Demostremos que esta torca satisface la forma de la rotación de la segunda ley de Newton, $\tau = dl/dt$. La figura 10a muestra una vista bidimensional de la partícula al girar, viendo hacia abajo a lo largo del eje z sobre el plano xy . Al moverse la partícula en un pequeño ángulo $d\phi = \omega dt$ (Fig. 10b), el vector l_{\perp} cambia en el pequeño incremento dl . Usted puede ver en la figura 10b que dl será siempre paralelo a τ , y así las direcciones de dl y de τ son consistentes con $\tau = dl/dt$. Podemos también demostrar que las magnitudes concuerdan. La torca con respecto a O es, refiriéndonos de nuevo a la figura 6c,

$$\tau = rF \sin(\frac{1}{2}\pi + \theta) = rF \cos \theta.$$

En este caso, F es la fuerza centrípeta y tiene una magnitud $F = mv^2/r' = m\omega^2 r'$, donde r' es el radio de la trayectoria circular ($r' = r \sin \theta$). Entonces

$$\tau = m\omega^2 r'^2 \sin \theta \cos \theta. \tag{12}$$

De la figura 10b, $dl = l_{\perp} d\theta = l_{\perp} \omega dt$, donde obtenemos que

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp}.$$

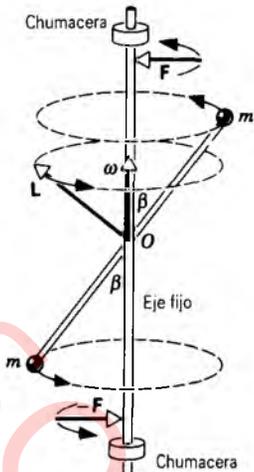


Figura 11 Un sistema de dos partículas girando, similar a la figura 7, pero con el eje de rotación formando un ángulo β con la barra de unión. El vector L del ímpetu angular gira con el sistema, como también las fuerzas F y $-F$ ejercidas por las chumaceras.

Con $l = mvr$, entonces $l_{\perp} = mvr \cos \theta$. La velocidad tangencial v es $\omega r' = \omega r \sin \theta$, de modo que

$$l_{\perp} = m\omega r^2 \sin \theta \cos \theta$$

y

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp} = m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (13)$$

Comparando las ecuaciones 12 y 13, vemos que $\tau = dl/dt$, como se esperaba.

Cuerpos simétricos y cuerpos asimétricos

¿En qué difiere la situación entre cuerpos simétricos y asimétricos que estén girando? Supongamos que la barra que une a las dos partículas en el cuerpo simétrico de la figura 7 estuviese inclinada en un ángulo arbitrario β con respecto a la flecha central. La figura 11 muestra a la barra de unión, que, junto con la flecha y las dos chumaceras (que se suponen sin fricción) mantiene al eje a lo largo del eje z . La flecha gira con una velocidad angular constante ω en torno a este eje, apuntando entonces el vector ω a lo largo de este eje. La experiencia nos dice que tal sistema está “desbalanceado” o “colgado hacia un lado” y que, si la barra de unión no estuviera rígidamente unida a la flecha vertical cerca de O , tendería a moverse hasta que el ángulo β se convirtiera en 90° , en cuya posición el sistema sería entonces simétrico con respecto a la flecha.

En el instante mostrado en la figura 11, la partícula superior se mueve hacia adentro de la página en ángulo recto, y la partícula inferior se mueve hacia afuera de la página en ángulo recto también. Los vectores del ímpetu lineal de las dos partículas son, por lo tanto, iguales pero opuestos, como también lo son sus vectores de posición con respecto a O . De aquí que, por aplicación de la regla de la mano derecha en $r \times p$, hallamos que l es el mismo para cada partícula y que su suma, el vector del ímpetu angular total L del sistema, está, como se muestra en la figura, formando ángulo recto con la barra de unión y está en el plano de la página. Por lo tanto, L y ω no son paralelos en ese instante. Al girar el sistema, el vector del ímpetu angular,

si bien de magnitud constante, gira alrededor del eje de rotación fijo.

La rotación de L alrededor del eje fijo de la figura 11 es perfectamente consistente con la relación fundamental $\tau = dL/dt$. La torca externa de todo el sistema proviene de las fuerzas laterales desbalanceadas ejercidas por las chumaceras sobre la flecha y transmitidas por la flecha a la barra de unión. En el instante mostrado en la figura, la partícula superior tenderá a moverse hacia afuera a la derecha. La flecha sería jalada hacia la derecha contra la chumacera superior, la que a su vez ejerce una fuerza F sobre la flecha que apunta a la izquierda. De igual manera, la partícula inferior tiende a moverse hacia afuera a la izquierda. La flecha sería jalada a la izquierda contra la chumacera inferior, la que a su vez ejerce una fuerza $-F$ sobre la flecha que apunta a la derecha. La torca τ con respecto a O que resulta de estas fuerzas apunta perpendicularmente hacia afuera de la página, formando en ángulo recto con el plano formado por L y ω , y en la dirección correcta para responder al movimiento de rotación de L . (Compárese con la Fig. 10b, en la que τ era paralelo a dL pero perpendicular a L .) Obsérvese que, a causa de que τ es perpendicular a ω , no efectúa trabajo y, por lo tanto, no cambia la energía cinética del sistema que está girando. En ausencia de fricción, el sistema giraría a perpetuidad. La fricción en las chumaceras daría lugar a una torca dirigida a lo largo de la flecha (paralela a ω), la cual efectuaría un trabajo sobre el sistema y cambiaría su energía cinética.

Las fuerzas F y $-F$ están en el plano de la figura 11 en el instante mostrado. Al girar el sistema, estas fuerzas, y por lo tanto la torca τ , giran con él, de modo que τ permanece siempre en ángulo recto al plano formado por ω y L . Las fuerzas de rotación F y $-F$ causan un bamboleo en las chumaceras superior e inferior. Las chumaceras y sus soportes deben ser lo suficientemente fuertes como para proporcionar estas fuerzas. En un cuerpo simétrico que esté girando no existe un bamboleo en las chumaceras, y la flecha gira suavemente. ■

13-4 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU ANGULAR

En la ecuación 8, hallamos que la razón de cambio en el tiempo del ímpetu angular total de un sistema de partículas respecto a un punto fijo en un marco de referencia inercial (o con respecto al centro de masa) es igual a la torca externa neta que actúa sobre el sistema, esto es,

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt}. \quad (8)$$

Si no actúa ninguna torca externa neta sobre el sistema, entonces el ímpetu angular del sistema no cambia con el tiempo:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{o bien} \quad L = \text{una constante.} \quad (14)$$

La ecuación 14 es el postulado matemático del principio de conservación del ímpetu angular.

Cuando la torca externa neta que actúa sobre un sistema sea cero, el vector del ímpetu angular total del sistema permanece constante.

Ésta es la tercera de las leyes de conservación más importantes que hemos estudiado. Junto con la conservación de la energía y el ímpetu lineal, la conservación del ímpetu angular es un resultado general válido para una amplia gama de sistemas. Es válido tanto en el límite relativista como en el límite cuántico y hasta ahora, no se ha encontrado ninguna excepción alguna.

Al igual que la conservación del ímpetu lineal en un sistema en el cual no actúe ninguna *fuera* externa neta, la conservación del ímpetu angular se aplica al ímpetu angular total de un sistema de partículas en el que no actúe ninguna *torca* externa neta. El ímpetu angular de partículas individuales de un sistema puede cambiar (del mismo modo en que puede cambiar el ímpetu lineal de cada partícula en una colisión), pero el total permanece constante.

El ímpetu angular es (como el ímpetu lineal) una cantidad *vectorial* de modo que la ecuación 14 es equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada dirección de coordenadas que pase por el punto de referencia. La conservación del ímpetu angular nos proporciona, por lo tanto, tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplique. Cualquier componente del ímpetu angular será constante si la componente correspondiente de la torca es cero; pudiera darse el caso de que sólo una de las tres componentes de la torca sea cero, lo cual significaría que sólo será constante una componente del ímpetu angular, cambiando las otras componentes como lo determinen las componentes de la torca correspondientes.

Para un sistema que consista en un cuerpo rígido que gire alrededor de un eje (digamos, el eje z) que esté fijo en un marco de referencia inercial, tenemos que

$$L_z = I\omega, \quad (15)$$

donde L_z es la componente (escalar) del ímpetu angular a lo largo del eje de rotación e I es la inercia de rotación para este mismo eje. Es posible que la inercia de rotación I de un cuerpo que gira cambie (desde i hasta f) mediante un reacomodo de sus partes. Si no actúa ninguna torca externa neta, entonces L_z debe permanecer constante y, si I cambia, debería existir un cambio compensatorio en ω desde ω_i hasta ω_f . En este caso, el principio de conservación del ímpetu angular se expresa así:

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f = \text{una constante.} \quad (16)$$

La ecuación 16 es válida no sólo para la rotación con respecto a un eje fijo sino también para la rotación alrededor de un eje que pase por el centro de masa de un sistema que se mueva, de modo que el eje permanezca siempre paralelo a sí mismo (véase la explicación al comienzo de la Sec. 12-6).

La conservación del ímpetu angular es un principio que regula una amplia variedad de procesos físicos, desde el mundo subatómico (véase la Sec. 13-6) hasta el movimiento de los acróbatas, los clavadistas, los bailarines de

ballet, la contracción de las estrellas a las que se les haya acabado el combustible, y la condensación de las galaxias. Los siguientes ejemplos muestran alguna de estas aplicaciones.

El giro de una patinadora

Una patinadora sobre hielo, al girar, pega sus brazos al cuerpo para girar más rápidamente y los extiende para girar más despacio. Al hacerlo, no hace sino aplicar la ecuación 16. En la figura 12 se ilustra otra aplicación de este principio, mostrando a un estudiante sentado sobre un banquillo que puede girar libremente en torno a un eje vertical. Hagamos que el estudiante extienda sus brazos sosteniendo a las pesas, y que gire con una velocidad angular ω_i . En la figura, el vector L de su ímpetu angular yace a lo largo del eje vertical.

El sistema, que consta de estudiante + banquillo + pesas, es un sistema aislado sobre el cual no actúa ninguna torca vertical externa. Por lo tanto, la componente vertical del ímpetu angular debe conservarse.

Cuando el estudiante pega sus brazos (y las pesas) hacia el cuerpo, la inercia de rotación de su sistema se reduce desde su valor inicial I_i hasta un valor más pequeño I_f , porque las pesas están ahora más cerca del eje de rotación. Su velocidad angular final, según la ecuación 16, es $\omega_f = \omega_i(I_i/I_f)$, la cual es más grande que su velocidad angular inicial (porque $I_f < I_i$), y el estudiante gira más rápidamente. Para disminuir su velocidad sólo necesita extender sus brazos otra vez.

¿Cambia la energía cinética del sistema? De ser así, ¿cuál es la fuente del trabajo que hace cambiar a la energía cinética?

La clavadista en el trampolín*

La figura 13a muestra a una clavadista abandonando el trampolín. Al saltar, se empuja a sí misma ligeramente hacia adelante, de modo que adquiere una velocidad de rotación pequeña, justo la suficiente para llevarla de cabeza hacia el agua al tiempo que su cuerpo gira en una media vuelta durante el arco.

Mientras está en el aire, no actúan sobre ella torcas externas que cambien su ímpetu angular con respecto a su centro de masa. (La única fuerza externa, la gravedad, actúa *a través* de su centro de masa y, por lo tanto, no produce una torca con respecto a ese punto. Despreciamos

* Véase "The Mechanics of Swimming and Diving", por R. L. Page, *The Physics Teacher*, febrero de 1976, pág. 72; "The Physics of Somersaulting and Twisting", por Cliff Frohlich, *Scientific American*, marzo de 1980, pág. 155.

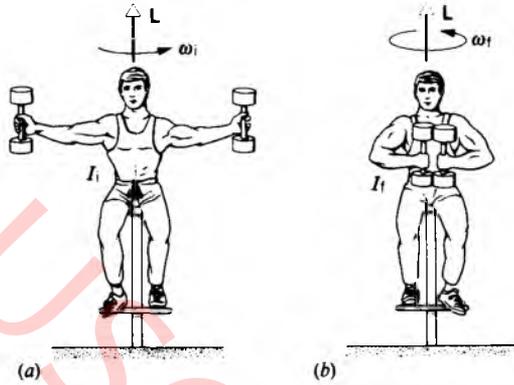


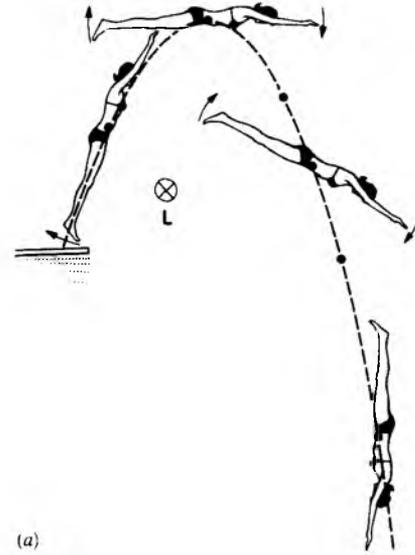
Figura 12 (a) En esta configuración, el sistema (estudiante + pesas) tiene una inercia de rotación más grande y una velocidad angular más pequeña. (b) Aquí el estudiante ha llevado a las pesas hacia adentro, dando una inercia de rotación más pequeña, y por lo tanto, una velocidad angular más grande. El ímpetu angular L tiene el mismo valor en ambas situaciones.

la resistencia del aire, que podría producir una torca neta y cambiar su ímpetu angular.) Cuando ella impulsa su cuerpo hacia la *posición de escuadra*, disminuye su inercia de rotación y, por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 16, su velocidad angular debe aumentar. El aumento en la velocidad angular le permite completar $1\frac{1}{2}$ vueltas, si bien ella había completado previamente sólo media vuelta (Fig. 13b). Al final del clavado, vuelve a la *posición normal de caída* y disminuye su velocidad angular para entrar en el agua.

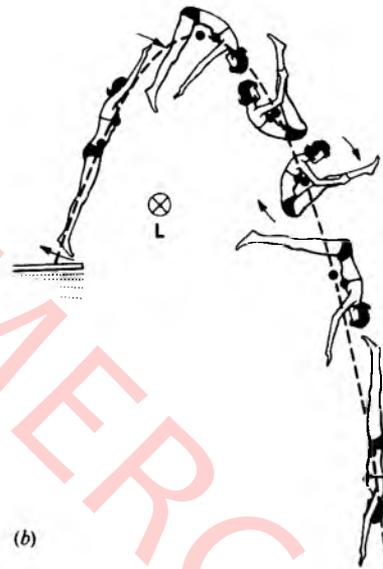
El giro de una rueda de bicicleta

La figura 14a muestra a una estudiante sentada sobre un banquillo que está libre de girar en torno a un eje vertical. La estudiante sostiene una rueda de bicicleta que ha sido puesta a girar. Cuando la estudiante le da vuelta a la rueda, el banquillo comienza a girar (Fig. 14b).

No actúa ninguna torca vertical sobre el sistema que consiste en estudiante + banquillo + rueda, y por lo tanto la componente vertical del ímpetu angular total del sistema debe permanecer constante. Inicialmente, la rueda está girando con un ímpetu angular L hacia arriba, que es el total del sistema. Cuando la rueda se voltea, la componente vertical del ímpetu angular de la rueda es ahora $-L_1$, pero la componente vertical del ímpetu angular *total* debe permanecer constante en $+L_1$. La estudiante + el banquillo deben por lo tanto adquirir un ímpetu angular de $L' = +2L_1$, de modo que el ímpetu angular final de $+2L_1 - L_1$ permanece igual al ímpetu angular inicial. Si I_s es la inercia de rotación de la estudiante + el banquillo, la velocidad de rotación será $\omega = 2L_1/I_s$.



(a)



(b)

Figura 13 (a) Una clavadora abandona el trampolín de manera tal que éste le imparte un ímpetu angular L . Ella gira con respecto a su centro de masa (indicado por el punto grueso) una media vuelta, mientras que el centro de masa sigue una trayectoria parabólica. (b) Al entrar a la posición de escuadra, reduce su inercia de rotación y, por lo tanto, aumenta su velocidad angular, permitiéndole dar $1\frac{1}{2}$ vueltas. Las fuerzas externas y las torcas sobre ella son las mismas en (a) y en (b), como lo indica el valor constante del ímpetu angular L .

Podemos también considerar esta situación desde el punto de vista de dos sistemas por separado, siendo uno la rueda y el otro la estudiante + el banquillo. Ninguno de estos sistemas está ahora aislado: la mano de la estudiante

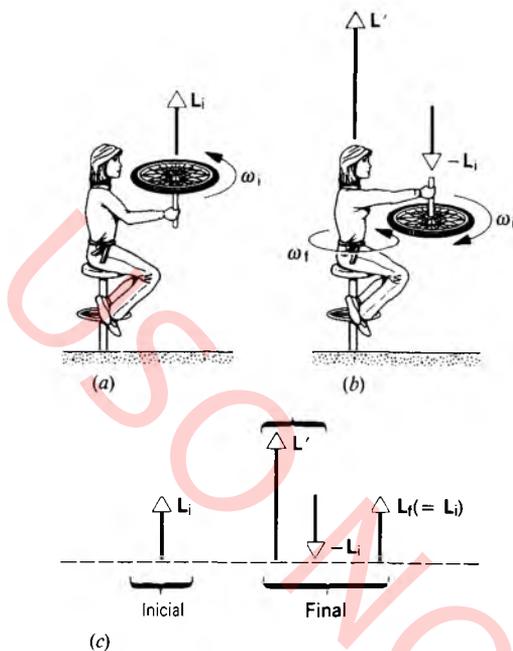


Figura 14 (a) Una estudiante sostiene una rueda de bicicleta que está girando. El ímpetu angular total del sistema es L_i . (b) Cuando la rueda de bicicleta es invertida, la estudiante comienza a girar. (c) El ímpetu angular final total debe ser igual al ímpetu angular inicial.

constituye una unión entre ellos. Cuando la estudiante intenta voltear la rueda, debe aplicar una torca para cambiar el ímpetu angular de la rueda. La fuerza que ella ejerce sobre la rueda para producir esa torca es regresada por la rueda como una fuerza de reacción sobre ella, según la tercera ley de Newton. Esta fuerza externa sobre el sistema estudiante + banquillo causa que ese sistema gire. Desde este punto de vista la estudiante ejerce una torca externa sobre la rueda para cambiar su ímpetu angular, mientras que la rueda ejerce una torca sobre la estudiante para cambiar su ímpetu angular. Si consideramos al sistema completo consistente en estudiante + banquillo + rueda, como hicimos antes, esta torca es una torca interna que no ha sido incluida en nuestros cálculos. El hecho de que consideremos a la torca como interna o como externa depende de cómo definamos a nuestro sistema.

La estabilidad de los objetos que giran

Consideremos una vez más la figura 3b. Un objeto que se mueva con un ímpetu lineal $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$ tiene una *estabilidad direccional*; una fuerza de desviación proporciona el impulso correspondiente a un incremento lateral del ímpetu $\Delta\mathbf{p}_\perp$ y, como resultado, la dirección del movimiento cambia según un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_\perp/p)$. Cuanto más grande sea el ímpetu p , más pequeño será el ángulo θ . La misma

fuerza de desviación es menos eficaz en desviar un objeto con un ímpetu lineal grande que en desviar un objeto con un ímpetu lineal pequeño.

El ímpetu angular proporciona a un objeto una *estabilidad de orientación* de manera muy similar. Un objeto en rotación tiene un cierto ímpetu angular L . Una torca τ perpendicular a L cambia la dirección de L y, por lo tanto, la dirección del eje de rotación, en un ángulo $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_\perp/L)$. Una vez más, cuanto más grande sea el ímpetu angular L , menor posibilidad tendrá una torca dada para cambiar la dirección del eje del objeto en rotación.

Cuando le damos a un objeto un ímpetu angular de rotación respecto a un eje de simetría, en efecto, estabilizamos su orientación y hacemos más difícil que las fuerzas externas cambien su orientación. Existen muchos ejemplos comunes de este efecto. Una bicicleta sin ocupante a la que se le imprima un ligero empujón puede permanecer en posición vertical durante una distancia más larga de lo que pudiéramos esperar. En este caso es el ímpetu angular de las ruedas al girar el que proporciona la estabilidad. Las protuberancias y curvas pequeñas del camino, que de otro modo derribarían o desviarían a un objeto que no estuviese girando, equilibrado en una base tan angosta como una llanta de bicicleta, tendrán menos efecto en este caso debido a la tendencia del ímpetu angular de las ruedas a fijar su orientación.*

Una pelota de fútbol americano es lanzada para un pase largo hacia el frente de modo que gire en torno a un eje que es aproximadamente paralelo a su velocidad de traslación. Esto estabiliza la orientación de la pelota de fútbol e impide que se bamboleo, lo cual hace posible lanzarla con mayor precisión y atraparla más eficazmente. También mantiene el perfil más pequeño de la pelota en la dirección hacia adelante, minimizando la resistencia del aire y aumentando el alcance.

Es importante estabilizar la orientación de un satélite, en particular si éste utiliza sus impulsos para llegar a una posición orbital específica (Fig. 15). La orientación pudiera cambiar, por ejemplo, por la fricción de una atmósfera residual enrarecida en altitudes orbitales, por el viento solar (un haz de partículas cargadas proveniente del Sol), o por los impactos con pequeños meteoroides. Para reducir los efectos de tales encuentros, se hace que el artefacto gire en torno a un eje, estabilizando, por lo tanto, su orientación.

El colapso de las estrellas

La mayoría de las estrellas giran, como lo hace nuestro Sol. Nuestro astro rey gira una vez alrededor de su eje cada

* Véase "The Stability of the Bicycle", por David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, pág. 34.



Figura 15 El satélite Morelos-D, un satélite de comunicaciones de México, desde el compartimiento de carga del taxi espacial el 17 de noviembre de 1985. Se hace que el satélite gire alrededor de su eje central (el eje vertical en esta foto) para estabilizar su orientación en el espacio mientras viaja hacia su órbita de geosincronismo.

mes, aproximadamente. (El Sol es una bola de gas y no gira realmente como un cuerpo rígido; las regiones cercanas a los polos tienen un periodo de rotación de unos 37 días, mientras que el ecuador gira una vez cada 26 días.) El Sol no llega al colapso a causa de su *presión de radiación*, en esencia, el efecto del impulso de las colisiones de la radiación emergente contra los átomos del Sol. Cuando el combustible nuclear del Sol se haya consumido, la presión de radiación desaparecerá, y el Sol comenzará colapsarse, aumentando su densidad en forma correspondiente. En algún punto la densidad será tan grande que los átomos simplemente no podrán aglutinarse más, y el colapso quedará detenido.

Sin embargo, en las estrellas con una masa de 1.4 veces mayor que la del Sol la fuerza de la gravedad es tan fuerte que los átomos no pueden impedir que continúe el colapso. En efecto, los átomos se aplastan por la acción de la gravedad, y el colapso continúa hasta que los núcleos se tocan entre sí. La estrella se convierte realmente en un núcleo atómico gigante, y recibe el nombre de *estrella neutrónica*. El radio de una estrella neutrónica de alrededor 1.5 veces la masa solar es de 11 km.

Supongamos que la estrella comenzó a colapsarse igual que nuestro Sol, girando una vez cada mes. Las fuerzas durante el colapso son claramente fuerzas internas, que no pueden cambiar el ímpetu angular. La velocidad angular

final, por lo tanto, se relaciona con la velocidad angular inicial por la ecuación 16: $\omega_f = \omega_i (I_i/I_f)$. La razón de las inercias de rotación será la misma que la razón de los cuadrados de los radios: $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. Si el radio inicial fuese aproximadamente igual al del Sol (alrededor de 7×10^5 km), entonces

$$I_i/I_f = r_i^2/r_f^2 = (7 \times 10^5 \text{ km})^2/(11 \text{ km})^2 = 4 \times 10^9.$$

Esto es, su velocidad de rotación va desde una vez por mes hasta 4×10^9 veces por mes, ¡a más de 1000 revoluciones por segundo!

Las estrellas neutrónicas pueden ser observadas desde la Tierra, porque (de nuevo al igual que el Sol) tienen campos magnéticos que atrapan electrones y, al girar la estrella, los electrones se aceleran a velocidades tangenciales muy elevadas. Estos electrones acelerados emiten una radiación, que vemos desde la Tierra como si fuera un faro reflector mientras la estrella gira. Estos vivos impulsos de radiación son la causa de que estas estrellas neutrónicas en rotación reciban el nombre de *pulsares*. En la figura 16 se muestra un ejemplo de la radiación emitida por un pulsar.

La conservación del ímpetu angular se aplica a una amplia variedad de fenómenos astrofísicos. La rotación de nuestra galaxia, por ejemplo, es el resultado de una rotación inicial mucho más lenta de la nube gaseosa de la cual se condensó la galaxia; la rotación del Sol y las órbitas de los planetas quedaron determinadas por la rotación original del material con que se formó nuestro Sistema solar.

Problema muestra 4 Un astronauta de 120 kg, que lleva a cabo una "caminata espacial", está atado a una nave espacial por medio de una cuerda totalmente extendida de 180 m de longitud. Una operación no intencional del paquete propulsor provoca que el astronauta adquiera una pequeña velocidad tangencial de 2.5 m/s. Para regresar a la nave, el astronauta comienza a jalarsé a lo largo de la cuerda a razón lenta y constante. ¿Con qué fuerza deberá jalar el astronauta hasta las distancias de (a) 50 m y (b) 5 m de la nave? ¿Cuál será la velocidad tangencial del astronauta en estos puntos?

Solución No actúan torcas externas sobre el astronauta, de modo que se cumple la conservación del ímpetu angular. Esto es, el ímpetu angular inicial del astronauta con relación a la nave espacial como origen ($Mv_i r_i$) cuando comienza a jalar de la cuerda, debe ser igual al ímpetu angular ($Mv r$) en cualquier punto del movimiento. Así,

$$Mvr = Mv_i r_i$$

o sea

$$v = \frac{v_i r_i}{r}$$

La fuerza centrípeta en cualquier etapa está dada por

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2 r_i^2}{r^3}.$$

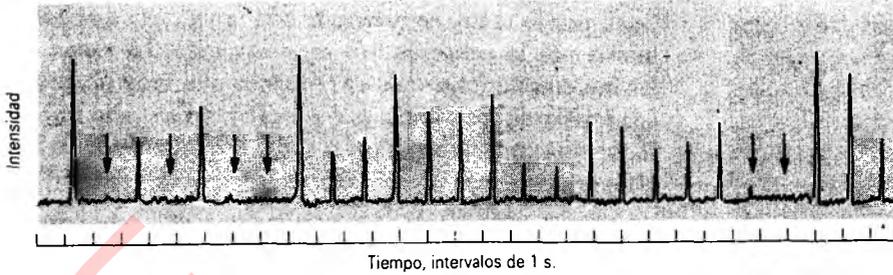


Figura 16 Las pulsaciones electromagnéticas recibidas en la Tierra desde una estrella neutrónica que gira rápidamente. Las flechas verticales indican pulsaciones demasiado débiles como para ser detectadas. El intervalo entre pulsaciones es notablemente constante, siendo igual a 1.187,911,164 s.

Inicialmente, la fuerza centrípeta requerida es de

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2}{180 \text{ m}} = 4.2 \text{ N (about 1 lb).}$$

(a) Cuando el astronauta esté a 50 m de la nave, la velocidad tangencial es

$$v = \frac{(2.5 \text{ m/s})(180 \text{ m})}{50 \text{ m}} = 9.0 \text{ m/s,}$$

y la fuerza centrípeta es

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2(180 \text{ m})^2}{(50 \text{ m})^3} = 194 \text{ N (alrededor de 44 lb).}$$

(b) A 5 m de la nave, la velocidad sube en un factor de 10 a 90 m/s, mientras que la fuerza aumenta en un factor de 10^3 a $1.94 \times 10^5 \text{ N}$, o ¡alrededor de 22 tons! Está claro que el astronauta no puede ejercer tal fuerza para regresar a la nave. Incluso si el astronauta fuera arrastrado hacia la nave por medio de un malacate desde el interior de la nave, la cuerda no podría soportar una tensión tan grande; en algún punto se rompería y el astronauta saldría disparado hacia el espacio con la velocidad tangencial que tuviera en el momento de romperse la cuerda. Conclusión: Los astronautas que caminen por el espacio deben evitar adquirir una velocidad tangencial. ¿Qué podría hacer el astronauta para regresar con seguridad a la nave?

Problema muestra 5 Una tornamesa que consta de un disco de 125 g de masa y un radio de 7.2 cm gira a una velocidad angular de 0.84 rev/s en torno a un eje vertical (Fig. 17a). De repente, se deja caer un disco idéntico, que inicialmente no estaba girando, sobre el primero. La fricción entre los dos discos causa que eventualmente giren a la misma velocidad. Sobre estos dos, se deja luego caer un tercer disco idéntico, que inicialmente no estaba girando, siguiendo los tres en giro juntos (Fig. 17b). (a) ¿Cuál es la velocidad angular de rotación de la combinación? (b) ¿Cuánta energía cinética de rotación se pierde debido a la fricción? (c) Un motor que impulse al primer disco debe restituir la velocidad angular de la combinación a su valor original en una revolución. ¿Qué torca constante deberá ejercer el motor?

Solución (a) Este problema es el análogo de rotación de la colisión completamente inelástica. No existe una torca vertical neta, de modo que la componente vertical del ímpetu angular es constante. La fuerza de fricción entre los discos es una fuerza interna, la cual no puede cambiar el ímpetu angular. Entonces se aplica la ecuación 16, y podemos escribir:

$$I_f \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\omega_f = \omega_i (I_i / I_f).$$

Sin hacer ningún cálculo detallado, sabemos que la inercia de rotación de tres discos idénticos en torno a su eje común será tres veces la inercia de rotación de un solo disco. Entonces, $I_i / I_f = \frac{1}{3}$ y

$$\omega_f = (0.84 \text{ rev/s})(\frac{1}{3}) = 0.28 \text{ rev/s.}$$

(b) La inercia de rotación de un disco con respecto a su eje es $\frac{1}{2}MR^2$, así que, para cada disco,

$$I = \frac{1}{2}(0.125 \text{ kg})(0.072 \text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

La energía cinética de rotación inicial es

$$K_i = \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$= \frac{1}{2}(3.24 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(2\pi \text{ rad/rev} \times 0.84 \text{ rev/s})^2$$

$$= 4.51 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

Podemos seguir un procedimiento más rápido calculando la energía cinética final, porque sabemos que la inercia de rotación final sube en un factor de 3, mientras que la velocidad angular final baja en un factor de $\frac{1}{3}$. Puesto que la energía cinética depende del cuadrado de la velocidad angular, tenemos

$$K_f = K_i \times 3 \times (\frac{1}{3})^2 = (\frac{1}{3})(4.51 \times 10^{-3} \text{ J})$$

$$= 1.50 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

El cambio en la energía cinética es

$$\Delta K = K_f - K_i = (1.50 \times 10^{-3} \text{ J}) - (4.51 \times 10^{-3} \text{ J})$$

$$= -3.01 \times 10^{-3} \text{ J.}$$

El signo menos indica que la energía cinética se pierde.

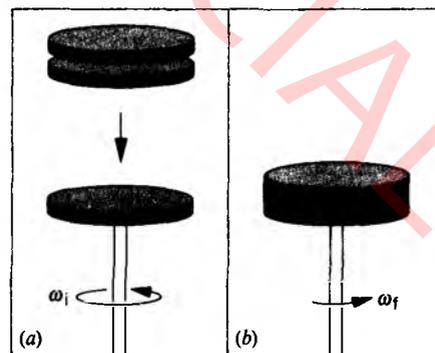


Figura 17 Problema muestra 5. (a) Un disco que gira con una velocidad angular inicial ω_i . (b) Dos discos idénticos, ninguno de los cuales está girando inicialmente, se dejan caer sobre el primero, y todo el sistema gira entonces con una velocidad angular ω_f .

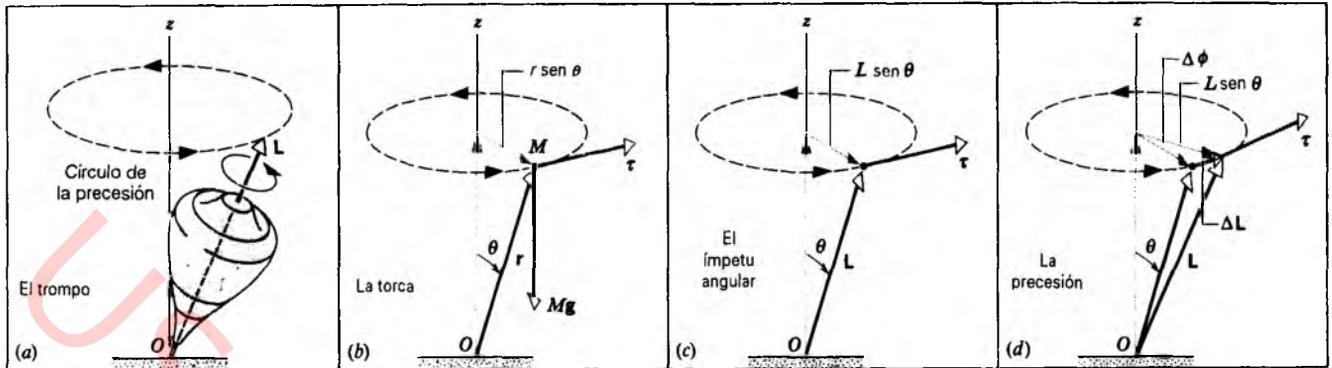


Figura 18 (a) Un trompo gira en precesión alrededor de un eje vertical. (b) El peso del trompo ejerce una torca con respecto al punto de contacto con el suelo. (c) La torca es perpendicular al vector del ímpetu angular. (d) La torca cambia la dirección del vector del ímpetu angular, causando la precesión.

(c) Para restituir la velocidad angular inicial, el motor tendrá que aumentar ω desde 0.28 rev/s hasta 0.84 rev/s, esto es, en un factor de 3. Eso significa que la energía cinética debe aumentar en un factor de $3^2 = 9$, desde 1.50×10^{-3} J hasta 13.5×10^{-3} J. El cambio en energía cinética, que es igual al trabajo efectuado por el motor, es

$$\Delta K = 13.5 \times 10^{-3} \text{ J} - 1.50 \times 10^{-3} \text{ J} = 12.0 \times 10^{-3} \text{ J}.$$

En el movimiento de rotación, el trabajo está dado por $W = \tau\phi$, donde $\phi (= 2\pi \text{ rad en este caso})$ es el desplazamiento angular del cuerpo que gira por medio del cual debe mantenerse la torca. Entonces

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{12.0 \times 10^{-3} \text{ J}}{2\pi \text{ rad}} \\ &= 1.91 \times 10^{-3} \text{ N}\cdot\text{m}. \end{aligned}$$

13-5 EL TROMPO*

Un trompo nos proporciona el ejemplo quizá más conocido del fenómeno mostrado en la figura 4b, donde una torca lateral cambia la dirección pero no la magnitud de un ímpetu angular. La figura 18a muestra un trompo que gira en torno a su eje. Se supone que la punta inferior del trompo está fija en el origen O de nuestro marco de referencia inercial. Sabemos por experiencia que el eje de este trompo que gira rápidamente se moverá lentamente en torno al eje vertical. Este movimiento se llama *precesión*, y surge de la configuración ilustrada en la figura 4b, donde la gravedad proporciona la torca externa.

* Véase "The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones", por Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1981, pág. 185.

La figura 18b muestra un diagrama simplificado, en el cual el trompo se halla sustituido por una partícula de masa M ubicada en el centro de masa del trompo. La fuerza gravitatoria Mg proporciona una torca con respecto a O de magnitud

$$\tau = Mgr \sin \theta. \quad (17)$$

La torca, que es perpendicular al eje del trompo y, por lo tanto, perpendicular a L (Fig. 18c), puede cambiar la dirección de L pero no su magnitud. El cambio en L en un tiempo Δt está dado por

$$\Delta L = \tau \Delta t \quad (18)$$

y está en la misma dirección que τ , esto es, perpendicular a L . El efecto de τ es, por lo tanto, cambiar L a $L + \Delta L$, un vector de la misma longitud que L pero que apunta en una dirección diferente. (Suponemos que el trompo gira tan rápidamente que L es grande, y entonces $L \gg \Delta L$.)

Si el trompo tiene simetría axial, entonces el ímpetu angular estará a lo largo del eje de rotación del trompo. Al cambiar L de dirección, el eje cambia de dirección también. La punta del vector L y el eje del trompo trazan un círculo en torno al eje z , como se muestra en la figura 18a. Este movimiento es la precesión del trompo.

En un tiempo Δt , el eje gira en un ángulo $\Delta\phi$ (véase la Fig. 18d), y entonces la rapidez angular de la precesión es

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \quad (19)$$

De la figura 18d vemos que

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta}. \quad (20)$$

Entonces

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin \theta} = \frac{Mgr \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{Mgr}{L}. \quad (21)$$

La velocidad de la precesión es inversamente proporcional al ímpetu angular; cuanto más rápido esté girando el trompo, más lenta será la precesión.

El movimiento de precesión ocurre en torno al eje z , y entonces el vector ω_p está en la dirección de z . Le será posible a usted demostrar que la siguiente ecuación vectorial da la relación apropiada entre las magnitudes y las direcciones de las variables dinámicas en este cálculo:

$$\tau = \omega_p \times L. \quad (22)$$

¿Puede usted escribir una ecuación vectorial similar para el caso correspondiente de una partícula que se mueva en círculo a velocidad constante bajo la influencia de una fuerza centrípeta?

13-6 CUANTIZACIÓN DEL ÍMPETU ANGULAR (Opcional)

En la sección 8-8 hemos estudiado la cuantización de la energía, la cual se restringía a la emisión o absorción de la energía de forma que tuviese lugar solamente en haces discretos o cuantos. En el mundo microscópico de los sistemas atómicos y subatómicos, no podemos cambiar la energía en una cantidad arbitraria, sino solamente en cantidades de un tamaño predeterminado. Estos cuantos son tan diminutos que no nos es posible observar esta estructura discreta en los cambios de energía de sistemas de tamaño ordinario.

La cuantización del ímpetu angular ocurre de un modo similar. Desarrollaremos este concepto más extensamente, proporcionando una evidencia experimental y un soporte teórico, en el capítulo 51 de la versión ampliada de este texto cuando estudiemos la estructura de los átomos. Por ahora, simplemente presentaremos alguna de las ideas generales y mostraremos cómo se relacionan con las propiedades asociadas al ímpetu angular que hemos desarrollado en este capítulo.

Los cambios cuantizados del movimiento de rotación de un sistema se hallan restringidos a presentarse en unidades dadas por múltiplos enteros de una constante fundamental:

$$\Delta L = n(h/2\pi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (23)$$

Aquí h es la constante de Planck, que tiene un valor de $6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. Esta unidad básica es una cantidad de ímpetu angular extraordinariamente pequeña. Por ejemplo, un disco de fonógrafo gira con relativa lentitud pero tiene un ímpetu angular del orden de 10^{32} unidades de $h/2\pi$. Cuando afinamos las velocidades de nuestras tornamesas, ciertamente no nos es posible observar estos sencillos brincos discretos en una escala de 1 parte en 10^{32} !

La ecuación 23 de la cuantización del ímpetu angular se aplica al movimiento de los electrones de los átomos en sus órbitas en torno al núcleo. Este sistema tiene un *ímpetu angular orbital*, el cual debe permanecer constante durante la órbita, porque la fuerza entre el electrón y el núcleo es una fuerza interna en el sistema y, por lo tanto, no puede cambiar su ímpetu angular. Las fuerzas externas, como los campos eléctricos o magnéticos, pueden provocar que el electrón brinque a otra órbita, donde su ímpetu angular pudiera tener un valor diferente, pero el cambio en L debe ser un múltiplo entero de $h/2\pi$, como lo requiere la ecuación 23. El ímpetu angular orbital sirve

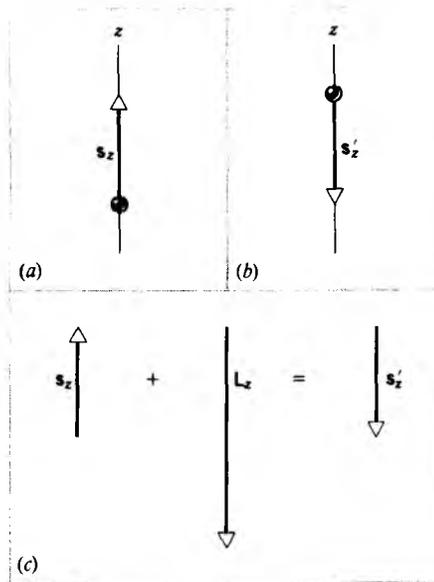


Figura 19 (a) Un protón con un ímpetu angular intrínseco (espín) s tiene una componente s_z a lo largo del eje z . (b) Después de absorber a un fotón, la componente z del espín se invierte. (c) La componente z del ímpetu angular inicial, igual a la unidad $+\frac{1}{2}$, se suma a la componente z del ímpetu angular del fotón, igual a la unidad -1 , dando por resultado una unidad de $-\frac{1}{2}$.

entonces como un distintivo conveniente y útil de las órbitas electrónicas de los átomos.

Los experimentos efectuados en los años 1920 indicaban que los electrones de los átomos tenían otra clase de ímpetu angular, que no podía ser responsable del movimiento orbital. Esta nueva clase de ímpetu angular, que se conoce como *ímpetu angular intrínseco*, es una propiedad característica de la propia partícula y no es un resultado de su estado de movimiento en particular. Una manera útil (pero estrictamente incorrecta) de visualizar el ímpetu angular intrínseco es en términos del giro de la partícula sobre su eje; por esta razón, al ímpetu angular intrínseco se le llama, a menudo, "espín" y se le indica con el símbolo s .

El electrón tiene un ímpetu angular intrínseco de $\frac{1}{2}(h/2\pi)$. Esto significa que, con relación a cualquier eje z que podamos elegir para definirla, la componente z del ímpetu angular debe ser

$$s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi) \quad \text{o} \quad s_z = -\frac{1}{2}(h/2\pi).$$

Nótese que la diferencia entre estas dos posibilidades, la cual pudiera corresponder a un cambio en la dirección del ímpetu angular intrínseco de un electrón, es $h/2\pi$, consistente con la ecuación 23.

Por lo general, el ímpetu angular intrínseco se expresa asignándole el *número cuántico del espín*, que es el ímpetu angular intrínseco en unidades de $h/2\pi$; el electrón tiene entonces un número del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. El protón y el neutrón tienen también números del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. El fotón (el haz cuantizado de radiación electromagnética) tiene un número del espín cuántico de 1. Todas las partículas elementales pueden caracterizarse por su número del espín cuántico, el cual se considera una propiedad fundamental de la partícula junto con su masa y carga eléctrica.

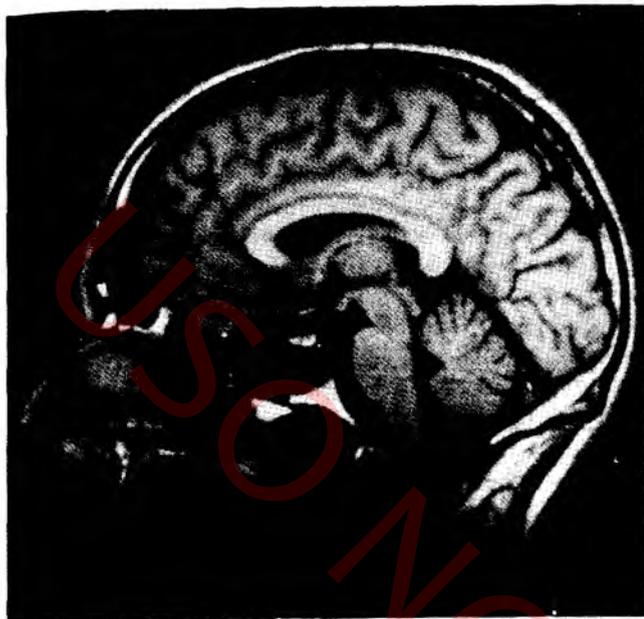


Figura 20 Vista del cráneo de un paciente mediante la imagen de resonancia magnética (MRI).

Una aplicación importante del principio de conservación del ímpetu angular cuantizado consiste en el efecto conocido como *resonancia magnética nuclear*. Consideremos al protón (el núcleo del átomo de hidrógeno), con su número del espín cuántico de $\frac{1}{2}$. En la figura 19a se muestra una representación del ímpetu angular intrínseco del protón en una orientación particular. La componente z del momento angular es $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$. Si exponemos protones a la radiación de la energía apropiada, la absorción de un fotón electromagnético (espín = 1, ímpetu angular = $h/2\pi$) puede cambiar la componente z del ímpetu angular del protón en una unidad, desde $+\frac{1}{2}(h/2\pi)$ hasta $-\frac{1}{2}(h/2\pi)$, como en la figura 19b. La adición de las componentes z de s y de L en la figura 19c muestra cómo se suman el espín inicial s ,

del protón y el ímpetu angular L_z del fotón para dar el espín final (invertido) s'_z del protón. La figura 19c es otro ejemplo más de la conservación del ímpetu angular, siendo el ímpetu angular inicial ($s + L$) igual al ímpetu angular final (s') en ausencia de una torca externa.

En la resonancia magnética nuclear (NMR o *nuclear magnetic resonance*), se usa un campo magnético estático en la dirección z para alinear los giros del protón con el eje z , como en la figura 19a. Un campo electromagnético separado que varía con el tiempo a frecuencias de radio proporciona fotones de apenas la energía correcta para ser absorbidos y provoca que los giros del protón se inviertan.

Puesto que el cuerpo humano está formado en su mayoría de agua, la cual es rica en hidrógeno, la absorción de esta radiación electromagnética provee un modo de formar una imagen de los órganos internos del cuerpo (figura 20). Se cree que la radiación electromagnética en forma de ondas de radio significa poco peligro para el cuerpo; los rayos X, que se usan también para formar imágenes, tienen un potencial mucho más grande para causar daño al organismo. Las *imágenes de resonancia magnética* pueden reemplazar ampliamente las fotografías con rayos X como técnica de diagnóstico. ■

13-7 DINÁMICA DE LA ROTACIÓN: UN REPASO

En los capítulos 11 al 13 hemos presentado una visión general de los temas de la dinámica y la cinemática de la rotación. Un tratamiento completo del tema queda fuera del alcance de este texto, pero existen muchas situaciones físicas que pueden ser analizadas usando los resultados que hemos derivado. Es importante recordar que algunos de nuestros resultados pueden aplicarse *solamente* en ciertas situaciones especiales. Para ayudar al lector a este respecto, hemos reunido algunas ecuaciones fundamentales de la dinámica de la rotación en la tabla 1.

TABLA 1 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

Ecuación	Observaciones
I. Ecuaciones de definición	
$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$	Torca sobre una partícula con respecto a un punto O debido a una fuerza \mathbf{F} .
$\tau_{\text{ext}} = \sum \tau_n$	Torca externa resultante de un sistema de partículas sobre el que actúan varias torcas individuales τ_n , con respecto a un punto O .
$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	Ímpetu angular de una partícula con respecto a un punto O .
$\mathbf{L} = \sum \mathbf{l}_n$	Ímpetu angular resultante de un sistema de partículas con respecto a un punto O .
II. Relaciones generales	
$\tau = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$	La ley del movimiento de una sola partícula aislada sobre la que actúa una torca τ . Tanto τ como \mathbf{l} se miden con respecto a un punto O de un marco de referencia inercial. Esta expresión es el análogo rotatorio de la expresión $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ del movimiento de traslación.
$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	La ley del movimiento para un sistema de partículas sobre el que actúa una torca externa resultante. Se mantiene solamente τ_{ext} si \mathbf{L} se miden con respecto a (1) cualquier punto O fijo en un marco de referencia inercial

TABLA 1 RESUMEN DE LAS ECUACIONES DE LA DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

Ecuación	Observaciones
III. Caso especial	
Los resultados siguientes se cumplen en el caso de un cuerpo rígido que gire con respecto a un eje que esté fijo en un marco de referencia inercial.	
$\tau = I\alpha$	α debe estar a lo largo del eje; I debe referirse también al eje, y τ es la componente escalar de τ_{ext} a lo largo del mismo eje. Esto es el análogo rotatorio de $F = Ma$.
$L = I\omega$	ω debe estar a lo largo del eje; I debe referirse también al eje, y L debe ser la componente escalar del ímpetu angular total a lo largo de este eje. Esto es el análogo rotatorio de $P = Mv$.

PREGUNTAS

- Hasta aquí nos hemos encontrado con muchas cantidades vectoriales, incluyendo la posición, el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, el ímpetu, y el ímpetu angular. ¿Cuáles de éstas se definen independientemente de la elección del origen en el marco de referencia?
- Un físico ilustre (R. W. Wood), quien gusta de las bromas prácticas, montó un volante que giraba rápidamente en una maleta; la maleta la dio a un maletero con instrucciones de que éste lo siguiera. ¿Qué pasará si el maletero era conducido muy deprisa a doblar una esquina? Explique en términos de $\tau = dL/dt$.
- Un cilindro gira a una velocidad angular ω alrededor de un eje que pasa por un extremo, como en la figura 21. Elija un origen apropiado y muestre cualitativamente los vectores L y ω . ¿Son estos vectores paralelos? ¿Intervienen aquí consideraciones de simetría?

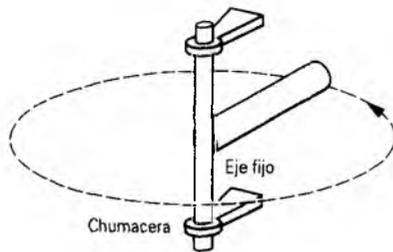


Figura 21 Pregunta 3.

- Suponga que una barra uniforme descansa en una posición vertical sobre una superficie de fricción despreciable. Entonces se le da a la barra un golpe horizontal en su extremo inferior. Describa el movimiento del centro de masa de la barra en su extremo superior.
- Si el aparato de la figura 5 se ancla al piso de una gran nave espacial que se halle flotando en una región carente de gravedad, ¿de qué manera, si existe alguna, afectaría esta acción al experimento?
- Un automóvil con impulsión en las ruedas traseras acelera rápidamente desde el reposo. El conductor observa que el

automóvil "levanta la nariz". ¿Por qué sucede esto? Se comportaría de modo diferente un automóvil con impulsión en las ruedas delanteras?

- Una saeta gira en su vuelo de modo que resulte tangente a la trayectoria del vuelo en todo momento. Sin embargo, una pelota de fútbol americano (arrojada con un giro considerable con respecto a su eje largo) no lo hace así. ¿Por qué existe diferencia en el comportamiento de una y otra?
- Un pasador lanza una pelota de fútbol americano que vuela en espiral hacia el receptor. ¿Es su ímpetu angular constante, o casi constante? Distinga entre los casos en que la pelota se bambolea y en los que no lo hace.
- ¿Puede usted sugerir una teoría sencilla que explique la estabilidad de una bicicleta en movimiento? Usted debe explicar por qué es mucho más difícil mantener el equilibrio sobre una bicicleta que esté en reposo que sobre una que esté en marcha. (Véase "The Stability of the Bicycle", por David E. H. Jones, *Physics Today*, abril de 1970, pág. 34.)
- ¿Por qué una barra larga le ayuda a un equilibrista que camine por un cable a mantener el equilibrio?
- Usted está caminando a lo largo de un riel angosto y comienza a perder el equilibrio. Si comenzara a caerse hacia la derecha, ¿de qué modo deberá hacer girar su cuerpo para recuperar el equilibrio? Explique.
- Los pernos de montaje que fijan los motores de los aviones de propulsión a chorro al bastidor estructural del mismo están diseñados para partirse en dos instantáneamente si el motor (que gira rápidamente) se agarrotara en forma súbita debido a alguna avería. ¿Por qué se emplean estos "fusibles estructurales"?
- Un jugador de hockey enojado arroja un palo a lo largo del hielo. El palo gira en torno a su centro de masa al deslizarse hasta que llega al reposo por la acción de la fricción. Su movimiento de rotación se detiene en el preciso momento en que su centro de masa llega al reposo, ni antes ni después. Explique por qué.
- Cuando la velocidad angular ω de un objeto aumenta, su momento angular puede o no aumentar también. Dé un ejemplo en que lo haga y otro en que no lo haga así.
- Un estudiante está de pie sobre una mesa que gira con una velocidad angular ω mientras sostiene dos pesas iguales

con sus brazos estirados. Sin mover nada más, deja caer las dos pesas. ¿Qué cambio, si lo hay, existe en la velocidad angular del estudiante? ¿Se conserva el ímpetu angular? Explique sus respuestas.

16. El helicóptero levanta el vuelo girando sus aspas. ¿Por qué no gira el fuselaje del helicóptero en la dirección opuesta?
17. Un aeroplano monomotor debe ser "equilibrado" para que vuele a nivel. (El arreglo consiste en elevar un alerón y bajar el opuesto.) ¿Por qué es esto necesario? ¿Es esto necesario en un aeroplano bimotor en circunstancias normales?
18. La hélice de un aeroplano gira en sentido de las manecillas del reloj vista la hélice desde atrás. Cuando el piloto enfila hacia arriba después de un clavado empinado, decide aplicar el timón de dirección hacia la izquierda en el fondo del clavado para mantener su rumbo. Explique.
19. Muchos de los grandes ríos fluyen hacia el ecuador. ¿Qué efecto produce el sedimento que acarrearán hacia el mar sobre la rotación de la Tierra?
20. Si toda la población mundial se concentrará en la Antártida, afectaría esto la duración del día? Si así fuera, ¿en qué forma afectaría?
21. Una tornamesa circular gira con velocidad angular constante en torno a un eje vertical. No existe fricción ni una torca que la impulse. Una cazuela circular descansa sobre la tornamesa y gira con ella; véase la figura 22. El fondo de la cazuela está cubierto con una capa de hielo de espesor uniforme, la cual está, por supuesto, girando también con la cazuela. El hielo se funde pero de la cacerola no escapa ni una gota de agua. ¿Es ahora la velocidad angular más grande, la misma, o menor que la rapidez original? Dé las razones de su respuesta.

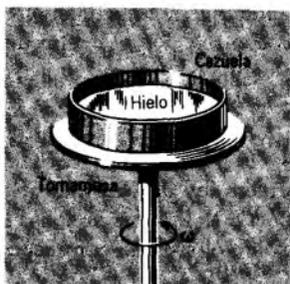


Figura 22 Pregunta 21.

22. La figura 23a muestra a un acróbata lanzado hacia arriba por un trampolín con un ímpetu angular nulo. ¿Puede el acróbata, maniobrando su cuerpo, caer sobre su espalda como en la figura 23b? Como dato interesante, el 38% de los entrenadores de clavados a quienes se les preguntó y el 34% de un grupo de físicos seleccionados dieron la respuesta incorrecta. ¿Qué piensa usted? (Para un estudio completo, véase "Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?", por Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, julio de 1979, pág. 583.)

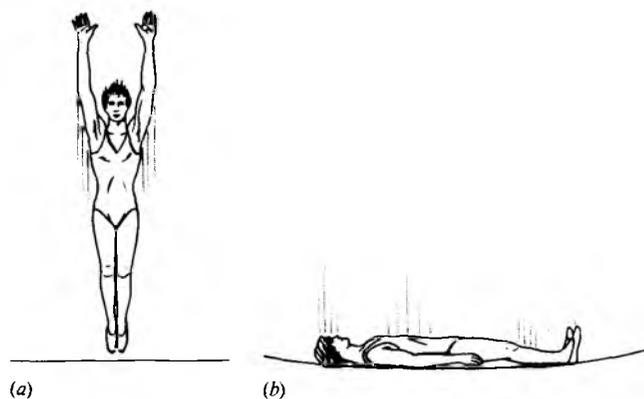


Figura 23 Pregunta 22.

23. Explique exactamente, en términos del ímpetu angular y de la inercia de rotación, cómo se "genera" un balanceo en la posición de sentado en un columpio. (Véase "How to Get the Playground Swing Going: A First Lesson in The Mechanics of Rotation", por Jearl Walker, *Scientific American*, marzo de 1989, pág. 106.)
24. ¿Puede usted columpiarse de forma que logre girar en un círculo completo, moviéndose totalmente alrededor del soporte de un columpio? Suponga (si lo desea) que el asiento del columpio está unido a su soporte por una barra rígida en lugar de una cuerda o una cadena. Explique su respuesta.
25. Una tornamesa circular gira libremente en torno a un eje vertical. No existe fricción en el eje de rotación. (a) Un bicho, inicialmente en el centro de la tornamesa, camina hacia el borde y se detiene. ¿Cómo cambia el ímpetu angular del sistema (tornamesa + bicho)? ¿Cómo cambia la velocidad angular de la tornamesa? (b) Si el bicho se cae del borde de la tornamesa (sin brincar), cómo cambiará la velocidad angular de la tornamesa?
26. Una rueda giratoria de gran masa puede ser utilizada para producir un efecto estabilizador sobre un buque. Si está montada con su eje de rotación en ángulo recto con la cubierta del buque, ¿cuál será su efecto cuando el buque tienda a bambolearse de un lado a otro?
27. Si el trompo de la figura 18 no estuviese girando, se caería. Si su ímpetu angular de giro es grande comparado con el cambio causado por la torca aplicada, el trompo entraría en precesión. ¿Qué pasa entre tanto, cuando el trompo gira lentamente?
28. Un *Tippy-Top*, con una sección de una superficie esférica de radio grande sobre un extremo y una espiga para girar sobre el extremo opuesto, descansará sobre su superficie esférica sin girar pero deslizándose hacia un lado después de girar, de modo que se quede parado sobre la espiga. Explique. (Véase "The Tippy-Top", por George D. Freier, *The Physics Teacher*, enero de 1967, pág. 36.) Si usted no tiene a la mano un *Tippy-Top*, use un huevo duro; el comportamiento de "pararse sobre una punta" del huevo al girar se sigue más fácilmente si se pone una marca de tinta en el extremo "puntiagudo" del huevo.

PROBLEMAS

Sección 13-1 Ímpetu angular de una partícula

- Si se nos dan r , p , y θ , podemos calcular el ímpetu angular de una partícula a partir de la ecuación 2. Sin embargo, a veces se nos dan en su lugar las componentes (x, y, z) de \mathbf{r} y (v_x, v_y, v_z) de \mathbf{v} . (a) Demuestre que las componentes de \mathbf{l} a lo largo de los ejes x, y y z están entonces dados por

$$l_x = m(yv_z - zv_y),$$

$$l_y = m(zv_x - xv_z),$$

$$l_z = m(xv_y - yv_x).$$

(b) Demuestre que si la partícula se mueve solamente en el plano xy , el vector del ímpetu angular resultante tiene sólo una componente z . (Sugerencia: véase la ecuación 17 del capítulo 3.)

- Una partícula P con 2.13 kg de masa tiene una posición \mathbf{r} y una velocidad \mathbf{v} , como se muestra en la figura 24. Sobre ella actúa la fuerza \mathbf{F} . Los tres vectores están en un plano común. Suponga que $r = 2.91$ m, $v = 4.18$ m/s, y $F = 1.88$ N. Calcule (a) el ímpetu angular de la partícula y (b) la torca, con respecto al origen, que actúa sobre la partícula. ¿Cuáles son las direcciones de estos dos vectores?
- Demuestre que el ímpetu angular con respecto a cualquier punto de una sola partícula que se mueva a velocidad constante permanece constante durante el movimiento.
- (a) Utilice los datos de los apéndices para calcular el ímpetu angular total de todos los planetas debido a su vuelta alrededor del Sol. (b) ¿Qué fracción de esto se asocia con el planeta Júpiter?
- Dos partículas, cada una de masa m y velocidad v , viajan en direcciones opuestas a lo largo de líneas paralelas separadas por una distancia d . Halle una expresión para el ímpetu angular total del sistema con respecto a cualquier origen.
- Calcule el ímpetu angular, respecto al centro de la Tierra, de una persona de 84.3 kg situada en el ecuador de la Tierra en rotación.

Sección 13-2 Sistemas de partículas

- El ímpetu angular total de un sistema de partículas respecto al origen O de un marco de referencia inercial está dado por $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$, en donde \mathbf{r}_i y \mathbf{p}_i están medidos con respecto a O . (a) Utilice las relaciones $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$ y $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{p}'_i$ para expresar a \mathbf{L} en términos de las posiciones \mathbf{r}'_i y los ímpetus \mathbf{p}'_i en relación al centro de masa C ; véase la figura 25. (b) Utilice la definición del centro de masa y la definición del ímpetu angular \mathbf{L}' con respecto al centro de masa para obtener $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{cm} \times M\mathbf{v}_{cm}$. (c) Demuestre cómo puede ser interpretado este resultado teniendo en cuentas que el ímpetu angular total es la suma del momento angular de giro (ímpetu angular con relación al centro de masa) más el ímpetu angular orbital (ímpetu angular del movimiento del centro de masa C con respecto a O si toda la masa del sistema estuviese concentrada en C).

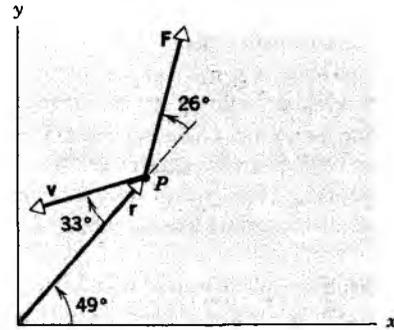


Figura 24 Problema 2.

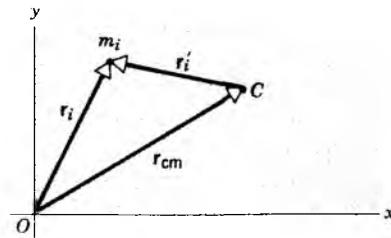


Figura 25 Problemas 7 y 8.

- Sea \mathbf{r}_{cm} el vector de posición del centro de masa C de un sistema de partículas respecto al origen O de un marco de referencia inercial, y sea \mathbf{r}'_i el vector de posición de la i ésima partícula, de masa m_i , con respecto al centro de masa C . De aquí que $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$ (véase la Fig. 25). Definamos ahora que el ímpetu angular total del sistema de partículas con relación al centro de masa C sea $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$, en donde $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt$. (a) Demuestre que $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt = m_i d(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{cm})/dt = \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{cm}$. (b) Demuestre después que $d\mathbf{L}'/dt = \sum \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$. (c) Combine los resultados de (a) y (b) y, usando la definición del centro de masa y la tercera ley de Newton, demuestre que $\boldsymbol{\tau}'_{ext} = d\mathbf{L}'/dt$, donde $\boldsymbol{\tau}'_{ext}$ es la suma de todas las torcas externas que actúan sobre el sistema con respecto a su centro de masa.

Sección 13-3 Ímpetu angular y velocidad angular

- La integral con respecto al tiempo de una torca se llama *impulso angular*. (a) A partir de $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$, demuestre que el impulso angular resultante es igual al cambio en ímpetu angular. Esto es la analogía de rotación de la relación impulso-ímpetu lineal. (b) Para una rotación alrededor de un eje fijo, demuestre que

$$\int \boldsymbol{\tau} dt = \bar{\mathbf{F}}r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i),$$

donde r es el brazo del momento de la fuerza, $\bar{\mathbf{F}}$ es el valor promedio de la fuerza durante el tiempo que actúa sobre el objeto, y ω_i y ω_f son las velocidades angulares del objeto justo antes y justo después de actuar la fuerza.

10. Un disco abrasivo con una inercia de rotación de $1.22 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ está unido a un taladro eléctrico cuyo motor desarrolla una torca de $15.8 \text{ N} \cdot \text{m}$. Halle (a) el ímpetu angular y (b) la velocidad angular del disco 33.0 ms después de haber encendido el motor.
11. Una rueda de 24.7 cm, que se mueve inicialmente a razón de 43.3 m/s, rueda hasta detenerse en 225 m. Calcule (a) su aceleración lineal y (b) su aceleración angular. (c) La inercia de rotación de la rueda es $0.155 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$; calcule la torca ejercida por la fricción sobre la rueda al rodar.
12. Dos ruedas, A y B, están conectadas por una banda como en la figura 26. El radio de B es tres veces el radio de A. ¿Cuál sería la razón de las inercias de rotación I_A/I_B si (a) ambas ruedas tienen los mismos ímpetus angulares y (b) las dos ruedas tienen la misma energía cinética de rotación? Suponga que la banda no se patina.

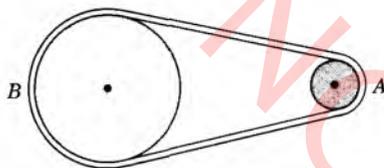


Figura 26 Problema 12.

13. Demuestre que $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ para el sistema de dos partículas de la figura 7.
14. Usando los datos de los apéndices, halle el ímpetu angular del giro de la Tierra respecto a su propio eje de rotación. Suponga que la Tierra es una esfera uniforme.
15. El ímpetu angular de un volante que tiene una inercia de rotación de $0.142 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ disminuye de 3.07 a $0.788 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ en 1.53 s. (a) Halle la torca promedio que actúa sobre el volante durante este periodo. (b) Suponiendo una aceleración angular uniforme, ¿en qué ángulo habrá girado el volante? (c) ¿Cuánto trabajo se efectuó sobre el volante? (d) ¿Cuánta potencia promedio fue suministrada por el volante?
16. La figura 27 muestra un cuerpo rígido simétrico que gira en torno a un eje fijo. El origen de coordenadas ha sido fijado por conveniencia en el centro de masa. Probar, sumando las contribuciones hechas al ímpetu angular por todos los elementos de masa m_i en que está dividido el cuerpo, que $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, donde \mathbf{L} es el ímpetu angular total.
17. Un polín tiene una masa de 4.42 kg y una longitud de 1.23 m. Inicialmente está en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción y es golpeado perpendicularmente por un disco de hule que le imparte una fuerza impulsiva horizontal de $12.8 \text{ N} \cdot \text{s}$ de impulso a una distancia de 46.4 cm del centro. Determine el movimiento subsiguiente del polín.
18. Un cilindro rueda hacia abajo por un plano inclinado en un ángulo θ . Demuestre, por aplicación directa de la ecuación 8 ($\sum \tau_{\text{ext}} = d\mathbf{L}/dt$), que la aceleración de su centro de masa es $\frac{2}{3}g \sin \theta$. Compare este método con el empleado en el problema muestra 8 del capítulo 12.
19. Para hacer que una bola de billar ruede sin deslizarse desde el reposo, el taco debe golpear a la bola no en el centro

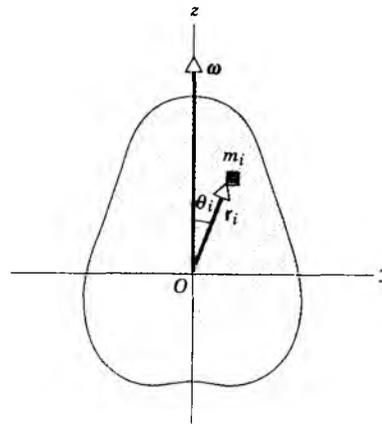


Figura 27 Problema 16.

(esto es, no a una altura sobre la mesa igual al radio R de la bola) sino exactamente a una altura de $2R/5$ sobre el centro. Demuestre este resultado. [Véase Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press, Orlando (edición en rústica de 1964), págs. 158 a 161, para un suplemento sobre la mecánica de los billares.]

20. El eje del cilindro de la figura 28 está fijo y el cilindro está inicialmente en reposo. El bloque de masa M se está moviendo inicialmente hacia la derecha sin fricción con una velocidad v_1 . Pasa sobre el cilindro a la posición señalada en líneas punteadas. Cuando hace contacto por primera vez con el cilindro, se desliza sobre el cilindro, pero la fricción es suficientemente grande como para que el deslizamiento cese antes de que M pierda contacto con el cilindro. El cilindro tiene un radio R y una inercia de rotación I . Halle la velocidad final v_2 en términos de v_1 , M , I , y R . Esto puede hacerse más fácilmente usando la relación entre el impulso y el cambio de ímpetu.



Figura 28 Problema 20.

21. Un barrote de longitud L y masa M está sobre una mesa horizontal sin fricción sobre la cual puede moverse libremente de cualquier modo. Un disco de hule de los usados en el hockey sobre hielo de masa m , que se mueve como se muestra en la figura 29 con velocidad v , choca elásticamente con el barrote. (a) ¿Qué cantidades se conservan en la colisión? (b) ¿Cuál debe ser la masa m del disco de hule con el fin de que permanezca en reposo inmediatamente después de la colisión?
22. Dos cilindros que tienen radios R_1 y R_2 e inercias de rotación I_1 e I_2 , respectivamente, están soportados por ejes

perpendiculares al plano de la figura 30. El cilindro grande gira inicialmente a una velocidad angular ω_0 . El cilindro pequeño se mueve hacia la derecha hasta que toca al cilindro grande y comienza a girar a causa de la fuerza de fricción entre los dos. Al cabo de un tiempo, el resbalamiento cesa, y los dos cilindros giran a razones constantes en direcciones opuestas. Halle la velocidad angular final ω_2 del cilindro pequeño en términos de I_1, I_2, R_1, R_2 , y ω_0 (*Sugerencia:* No se conserva ningún ímpetu angular ni la energía cinética. Aplíquese la ecuación del impulso angular a cada cilindro. Véase el problema 9.)

23. Una bola de billar, inicialmente en reposo, recibe de un taco un impulso rápido. El taco es sostenido horizontalmente a una distancia h sobre la línea central como en la figura 31. La bola deja el taco a una velocidad v_0 y, a causa de una "inglesa hacia el frente", adquiere una velocidad final de $9v_0/7$. Demuestre que $h = 4R/5$, donde R es el radio de la bola.
24. En el problema 23, imaginemos que F va a ser aplicada debajo de la línea central. (a) Demuestre que es imposible, con esta "inglesa en reversa", reducir la velocidad hacia adelante a cero, sin que sobrevenga un rodamiento, a no ser que $h = R$. (b) Demuestre que es imposible darle a la bola una velocidad hacia atrás, a no ser que F tenga una componente vertical hacia abajo.
25. Un bolichista lanza una bola de boliche de radio $R = 11.0$ cm a lo largo de la pista con una velocidad inicial $v_0 = 8.50$ m/s. La bola se lanza de forma que patina durante cierta distancia antes de que comience a rodar. No gira en absoluto cuando toca primero la pista, siendo su movimiento una traslación pura. El coeficiente de fricción cinética entre la bola y la pista es de 0.210. (a) ¿Durante qué lapso de tiempo patina la bola? (*Sugerencia:* Mientras que la bola patine, su velocidad v disminuye y su velocidad angular ω aumenta; el patinaje cesa cuando $v = R\omega$). (b) ¿A lo largo de qué distancia patina la bola? (c) ¿Cuántas vueltas da la bola antes de que comience a rodar? (d) ¿Con qué velocidad se mueve cuando empieza a rodar?

Sección 13-4 Conservación del ímpetu angular

26. Las observaciones astronómicas demuestran que desde 1870 hasta 1900 la longitud del día aumentó unos 6.0×10^{-3} s. (a) ¿Qué cambio fraccionario correspondiente resultó en la velocidad angular de la Tierra? (b) Supóngase que la causa de este cambio haya sido un desplazamiento del material fundido en el núcleo de la Tierra. ¿Qué cambio fraccionario resultante en la inercia de rotación de la Tierra podría considerarse para la respuesta a la parte (a)?
27. Supongamos que al Sol se le agote el combustible nuclear y súbitamente se colapse para formar la así llamada estrella enana blanca, con un diámetro igual al de la Tierra. Suponiendo que no hubiera pérdida de masa, ¿cuál sería entonces el nuevo periodo de rotación del Sol, que actualmente es de unos 25 días? Supóngase que el Sol y la estrella enana blanca sean esferas uniformes.
28. Una persona está de pie sobre una plataforma sin fricción que gira con una velocidad angular de 1.22 rev/s; sus brazos están en cruz y en cada mano sostiene una pesa. Con sus manos en esta posición la inercia de rotación total de la

persona, junto con las pesas, y la plataforma es de $6.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Si al mover las pesas la persona disminuye la inercia de rotación a $1.97 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, (a) ¿cuál es la velocidad angular resultante de la plataforma y (b) ¿cuál es la razón entre la nueva energía cinética y la energía cinética original?

29. En una clase demostrativa, se montan unos carriles de un tren de juguete sobre una rueda grande que puede girar libremente con fricción despreciable en torno a un eje vertical; véase la figura 32. Sobre los carriles se coloca un tren de juguete de masa m y, con el sistema inicialmente en reposo, se conecta la potencia eléctrica. El trenecito llega a una velocidad uniforme v respecto a los carriles. ¿Cuál es la velocidad angular ω de la rueda, si su masa es M y su radio R ? (Desprecie la masa de los rayos de la rueda.)

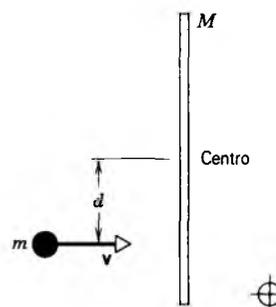


Figura 29 Problema 21.

30. El rotor de un motor eléctrico tiene una inercia rotatoria $I_m = 2.47 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ respecto a su eje central. El motor está montado paralelo al eje de una sonda espacial que se mueve con una inercia rotatoria $I_p = 12.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ en torno a su eje. Calcule el número de vueltas necesarias para hacer girar a la sonda a través de 25.0° en torno a su eje.

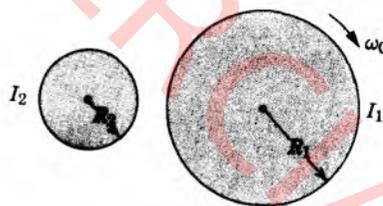


Figura 30 Problema 22.

31. Una rueda con una inercia rotatoria de $1.27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ está girando a una velocidad angular de 824 rev/min en una flecha cuya inercia rotatoria es despreciable. Una segunda rueda, inicialmente en reposo y con una inercia rotatoria de $4.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ se acopla de repente a la misma flecha. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de la combinación resultante de la flecha y las dos ruedas? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética original se pierde?
32. Con centro y rayos de masa despreciable, cierta rueda de bicicleta tiene un rin delgado de 36.3 cm de radio y 3.66 kg de masa; puede girar sobre su eje con una fricción despreciable. Un hombre sostiene a la rueda sobre su cabeza con

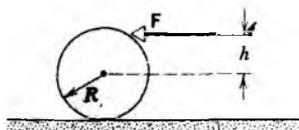


Figura 31 Problema 23.

el eje vertical mientras está de pie sobre una tornamesa con libertad para girar sin fricción; la rueda gira en el sentido de las manecillas del reloj, vista desde arriba, con una velocidad angular de 57.7 rad/s , y la tornamesa está inicialmente en reposo. La inercia de rotación de rueda + hombre + tornamesa respecto al eje de rotación común es de $2.88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. (a) La mano del hombre detiene súbitamente la rotación de la rueda (relativa a la tornamesa). Determine la velocidad angular (magnitud y dirección) resultante del sistema. (b) Se repite el experimento introduciendo una fricción notable sobre el eje de la rueda, la cual, comenzando desde la misma velocidad angular inicial (57.7 rad/s), llega gradualmente al reposo (en relación a la tornamesa) mientras el hombre mantiene a la rueda como se describió antes. (La tornamesa puede todavía girar libremente sin fricción.) Describa qué le sucede al sistema, dando tanta información cuantitativa como los datos lo permitan.

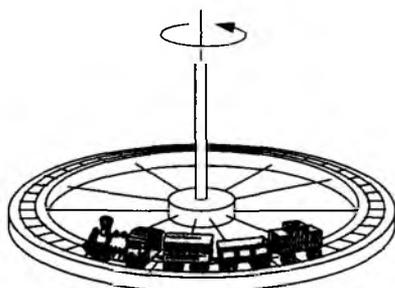


Figura 32 Problema 29.

33. Una joven de 50.6 kg de masa está de pie sobre el borde de un tiiovivo sin fricción de 827 kg de masa y 3.72 m de radio, que no se mueve. Lanza una piedra de 1.13 kg en una dirección horizontal tangente al borde exterior del tiiovivo. La velocidad de la piedra, en relación al suelo, es de 7.82 m/s . Calcule (a) la velocidad angular del tiiovivo y (b) la velocidad lineal de la joven después de haber lanzado la piedra. Suponga que el tiiovivo es un disco uniforme.
34. En un parque de diversiones hay un pequeño tiiovivo de 1.22 m de radio y 176 kg de masa. El radio de giro (véase el problema 11 del capítulo 12) es de 91.6 cm . Un niño de 44.3 kg de masa corre a una velocidad de 2.92 m/s tangente al borde del tiiovivo cuando está en reposo y luego salta sobre él. Desprecie la fricción entre las chumaceras y la flecha del tiiovivo y halle la rapidez angular del tiiovivo y el niño.
35. Un disco plano uniforme de masa M y radio R gira en torno a un eje horizontal que pasa por su centro con una veloci-

dad angular ω_0 . (a) ¿Cuál es su energía cinética? ¿Cuál es su ímpetu angular? (b) Del borde del disco se rompe en cierto momento un trozo de masa m , de modo que el trozo se eleva verticalmente sobre el punto en que se rompió (Fig. 33). ¿A qué altura de ese punto llegará antes de que comience a caer? (c) ¿Cuál es la velocidad angular final del disco roto?

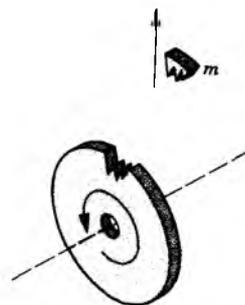


Figura 33 Problema 35.

36. Una cucaracha, de masa m , corre en contra de las manecillas del reloj por el borde de un plato circular giratorio montado sobre un eje vertical de radio R e inercia de rotación I que tiene chumaceras sin fricción. La velocidad de la cucaracha (con relación a la Tierra) es v , mientras que el plato gira en sentido de las manecillas del reloj a una velocidad angular ω . La cucaracha encuentra un miga de pan sobre el borde y, por supuesto, se detiene. (a) Halle la velocidad angular del plato después de haberse detenido la cucaracha. (b) ¿Cuánta energía cinética se ha perdido, si esto ha sucedido?
37. Una partícula se proyecta horizontalmente en el interior de un tazón hemisférico sin fricción de radio r , que se mantiene en reposo (Fig. 34). Deseamos hallar la velocidad inicial v_0 requerida para que la partícula llegue a la parte superior del tazón. Halle v_0 en función de θ_0 , la posición angular inicial de la partícula. (Sugerencia: Emplee los principios de la conservación.)

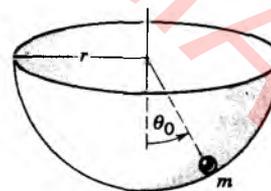
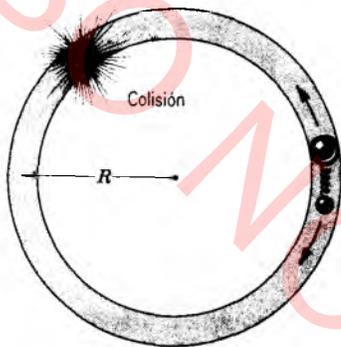


Figura 34 Problema 37.

38. En una gran pista circular horizontal sin fricción, de radio R , se encuentran dos pequeñas bolas de masas m y M , que pueden deslizarse libremente sobre la pista. Entre las dos bolas hay un resorte comprimido el cual, sin embargo, no se halla unido a las bolas. Las dos bolas se mantienen juntas por medio de un cordón. (a) Si el cordón se rompe,

el resorte comprimido (que se supone sin masa) dispara a las dos bolas en direcciones opuestas; el propio resorte queda atrás. Las bolas chocan cuando se encuentran de nuevo sobre la pista (Fig. 35). En dónde tiene lugar esta colisión? Exprese la respuesta en términos del ángulo, en radianes, a través del cual se desplaza la bola M . (b) La energía potencial inicialmente almacenada en el resorte era U_0 . Halle el tiempo que transcurre desde que el cordón se rompe hasta que sucede la colisión. (c) Suponiendo que la colisión sea perfectamente elástica y de frente, ¿en dónde chocarían las bolas nuevamente después de la primera colisión?



Figuras 35 Problema 38.

39. Dos patinadores, cada uno de 51.2 kg de masa, se aproximan uno al otro a lo largo de trayectorias paralelas separadas por 2.92 m. Tienen velocidades iguales y opuestas de 1.38 m/s. El primer patinador lleva en sus manos una barra ligera larga de 2.92 m de longitud, y el segundo patinador toma el extremo de ésta al pasar; véase la figura 36. Suponga que el hielo carece de fricción. (a) Describa cuantitativamente el movimiento de los patinadores después de que están unidos por la barra. (b) Ayudándose al jalar la barra, los patinadores reducen su separación a 0.940 m. Halle su velocidad angular entonces. (c) Calcule la energía cinética del sistema en las partes (a) y (b). ¿De dónde proviene el cambio?
40. Si las capas de hielo polar de la Tierra se fundiesen y el agua retornase a los océanos, éstos serían unos 30 m más profundos. ¿Qué efecto tendría esto sobre la rotación de la Tierra? Haga una estimación del cambio resultante en la longitud del día. (Se ha expresado la preocupación de que el calentamiento de la atmósfera como consecuencia de la contaminación industrial pudiera provocar que las capas de hielo se fundan.)
41. Se cree que la Tierra se formó hace unos 4500 millones de años, como una esfera de densidad aproximadamente uniforme. Poco tiempo después, el calor de la desintegración de elementos radiactivos hizo que gran parte de la Tierra se derritiera. Esto favoreció que el material más pesado se hundiera hacia el centro de la Tierra, formando el núcleo. Hoy día podemos representar a la Tierra con un núcleo de 3570 km de radio y 10.3 g/cm^3 de densidad rodeado por una capa de 4.50 g/cm^3 de densidad que

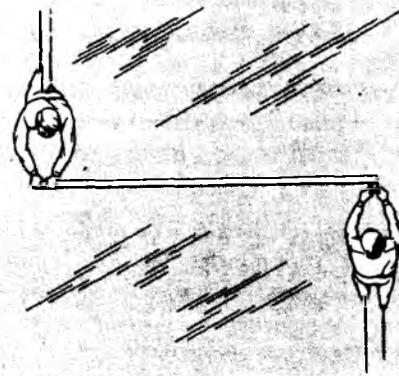


Figura 36 Problema 39.

se extiende hasta la superficie del planeta (6370 km de radio). Desconocemos la corteza de la Tierra. Calcule el cambio fraccionario en la longitud del día debido a la formación del núcleo.

Sección 13-5 El trompo

42. Un trompo gira a razón de 28.6 rev/s en torno a un eje que forma un ángulo de 34.0° con la vertical. Su masa es de 492 g y su inercia rotatoria es de $5.12 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. El centro de masa está a 3.88 cm del punto de pivoteo. El giro es en sentido de las manecillas del reloj visto desde arriba. Halle la magnitud (en rev/s) y la dirección de la velocidad angular de la precesión.
43. Un giroscopio consta de un disco rotatorio con un radio de 48.7 cm convenientemente montado en el punto central de un eje de 12.2 cm de longitud de modo que pueda girar y entrar en precesión libremente. Su velocidad de giro es de 975 rev/min. La masa del disco es de 1.14 kg y la masa del eje es de 130 g. Halle el tiempo requerido para una precesión si el eje está sujeto en un extremo y es horizontal.

Sección 13-6 Cuantización del ímpetu angular

44. En 1913, Niels Bohr postuló que el ímpetu angular de cualquier sistema rotatorio mecánico con una inercia de rotación I está cuantizado. Esto es,

$$L = I\omega = n(h/2\pi),$$

donde L es el ímpetu angular y n es cualquier entero positivo o cero. (a) Demuestre que este postulado restringe a la energía cinética que el sistema rotatorio puede tener a un grupo de valores discretos: es decir, la energía está cuantizada; halle una expresión para la energía. (b) Consideremos al *rotador rígido*, consistente en una partícula de masa m obligada a girar en un círculo de radio R . ¿Con qué velocidades angulares podría girar la partícula si el postulado fuese correcto? ¿Qué valores de energía cinética podría tener? (c) Trace un diagrama energía-nivel como el de la figura 37, indicando cómo varía el espaciamiento entre los niveles de energía al aumentar n . Ciertas

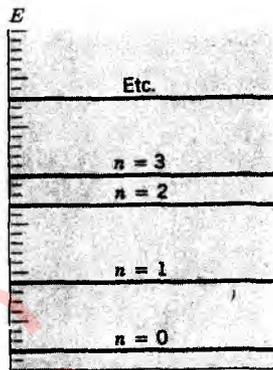


Figura 37 Problema 44.

moléculas biatómicas de baja energía se comportan como un rotador rígido.

45. (a) Supongamos que el electrón se mueve en una órbita circular en torno al protón de un átomo de hidrógeno. La fuerza centrípeta sobre el electrón es proporcionada por una fuerza eléctrica $e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$, donde e es la magnitud de la carga de un electrón y de un protón, r es el radio de la órbita, y ϵ_0 es una constante. Demuestre que el radio de la órbita es

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

en donde m es la masa del electrón y v es su velocidad.

- (b) Suponga ahora que el ímpetu angular del electrón respecto al protón sólo puede tener valores que sean múltiplos enteros n de $h/2\pi$, donde h es la constante de Planck. Demuestre que las únicas órbitas posibles del electrón son aquéllas con un radio

$$r = \frac{nh}{2\pi m v}$$

- (c) Combine estos resultados para eliminar a v y demuestre que las únicas órbitas que son consistentes con ambos requerimientos tienen radios

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

De aquí que los radios permitidos sean proporcionales al cuadrado de los enteros $n = 1, 2, 3$, etc. Cuando $n = 1$, r es el más pequeño y tiene el valor de 0.529×10^{-10} m.

Proyecto para la computadora

46. Consideremos dos volantes que estén montados sobre la misma flecha pero libres de girar independientemente. El volante 1, que inicialmente gira a 100 rad/s, tiene una inercia rotatoria de $2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. El volante 2, que está inicialmente en reposo, tiene una inercia rotatoria de $1.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Al deslizar un volante a lo largo de la flecha ambos volantes entran en contacto entre sí, cara contra

DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECAS
MONTEVIDEO - URUGUAY

cara. Ejercen torcas entre sí y llegan a alcanzar la misma velocidad angular. (a) Suponga que no actúan otras torcas que las de cada volante entre sí y utilice el principio de la conservación del ímpetu angular para hallar la velocidad angular final de los volantes.

Si la torca de cada volante sobre el otro puede ser calculada, se puede usar una computadora para seguir a los volantes hasta que lleguen a la misma velocidad. Suponga que la torca del volante 2 sobre el volante 1 está dada por $\tau_1 = -0.20(\omega_1 - \omega_2)$, donde ω_1 es la velocidad angular del volante 1 y ω_2 es la velocidad angular del volante 2. Aquí τ_1 está en $\text{N} \cdot \text{m}$ y las velocidades angulares están en rad/s. La torca del volante 1 sobre el volante 2 es $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$. Las torcas continúan actuando hasta que los volantes tengan la misma velocidad angular, y luego se anulan. Mientras están interactuando, el volante 1 obedece a $\tau_1 = I_1 \alpha_1$ y el volante 2 obedece a $\tau_2 = I_2 \alpha_2$. Estas ecuaciones son matemáticamente similares a las ecuaciones de la segunda ley de Newton y pueden ser integradas numéricamente de la manera descrita en la sección 6-6 y en los proyectos para la computadora al final del capítulo 6. Considere intervalos de tiempo de duración Δt y suponga que el volante 1 tiene una posición angular θ_{1b} y una velocidad angular ω_{1b} al principio de un intervalo. Entonces, su posición angular y su velocidad angular al final del intervalo pueden aproximarse por $\theta_{1e} = \theta_{1b} + \omega_{1b} \Delta t$ y $\omega_{1e} = \omega_{1b} + \alpha_{1b} \Delta t = \omega_{1b} + (\tau_{1b}/I_1) \Delta t$, donde τ_{1b} es la torca al principio del intervalo. Se tienen ecuaciones similares para el volante 2. Cuanto más pequeño sea Δt mejor será la aproximación.

(b) Escriba un programa de computación o diseñe una hoja de cálculo para hallar la velocidad angular de los volantes al final de cada segundo desde $t = 0$ hasta $t = 25$ s. Use un intervalo de integración de 0.001 s. Trace las velocidades angulares en función del tiempo en la misma gráfica, luego usar la gráfica o la lista de valores para hallar las velocidades angulares finales y compare el resultado con el valor obtenido en la parte (a).

(c) Para ver la influencia de una torca externa suponga que la torca que actúa sobre el volante 1 está dada por $\tau_1 = -4.0 - 0.20(\omega_1 - \omega_2)$ y la torca que actúa sobre el volante 2 es $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$, donde las torcas están en $\text{N} \cdot \text{m}$ y las velocidades angulares en rad/s. Esto representa una torca externa de $-4.0 \text{ N} \cdot \text{m}$. Use el programa de computación para hallar las velocidades angulares de los volantes y el ímpetu angular total en cada 1 s desde $t = 0$ hasta $t = 25$ s. De nuevo, use un intervalo de integración de 0.001 s. Grafique las velocidades angulares en función del tiempo. Puesto que $\tau_{\text{ext}} = dL_{\text{total}}/dt$, la torca externa debería producir un cambio en el ímpetu angular total de $\Delta L = \tau_{\text{ext}} \Delta t = -4.0 \times 25 = -100 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ durante los primeros 25 s. ¿Concuerdan sus resultados? ¿Cuál volante sufre el cambio (comparado con el caso de una torca externa nula); o queda el cambio compartido?

(d) La velocidad angular final no depende de los detalles de la torca que cada volante ejerce sobre el otro. ¿Qué depende de las torcas?