

FÍSICA 1

4^a Edición



Resnick | Halliday | Krane

CONTENIDO

<hr/> <hr/>		3-4 Suma de Vectores: Método de las Componentes	46
<hr/> <hr/>		3-5 Multiplicación de Vectores	48
<hr/> <hr/>		3-6 Las Leyes Vectoriales en la Física (<i>Opcional</i>)	50
<hr/> <hr/>		Preguntas y Problemas	53
CAPÍTULO 1	1	<hr/> <hr/>	
MEDICIONES		CAPÍTULO 4	
1-1 Las Cantidades Físicas, Patrones y Unidades	1	MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL	
1-2 El Sistema Internacional de Unidades	2	Y TRIDIMENSIONAL	59
1-3 Patrón de Tiempo	3	<hr/> <hr/>	
1-4 Patrón de Longitud	5	4-1 Posición, Velocidad, y Aceleración	59
1-5 Patrón de Masa	7	4-2 Movimiento con Aceleración Constante	61
1-6 Precisión y Cifras Significativas	8	4-3 Movimiento de proyectiles	63
1-7 Análisis Dimensional	10	4-4 Movimiento Circular Uniforme	67
Preguntas y Problemas	11	4-5 Vectores de Velocidad y de Aceleración en el Movimiento Circular (<i>Opcional</i>)	69
<hr/> <hr/>		4-6 Movimiento Relativo	71
CAPÍTULO 2	17	Preguntas y Problemas	74
MOVIMIENTO UNIDIMENSIONAL		<hr/> <hr/>	
2-1 Cinemática de la Partícula	17	CAPÍTULO 5	
2-2 Descripciones del Movimiento	17	FUERZA Y LAS LEYES	
2-3 Velocidad Promedio	20	DE NEWTON	87
2-4 Velocidad Instantánea	21	<hr/> <hr/>	
2-5 Movimiento Acelerado	23	5-1 Mecánica Clásica	87
2-6 Movimiento con Aceleración Constante	25	5-2 Primera Ley de Newton	88
2-7 Cuerpos en Caída Libre	28	5-3 Fuerza	90
2-8 Galileo y la Caída Libre (<i>Opcional</i>)	29	5-4 Masa	90
2-9 Medición de la Aceleración en Caída Libre (<i>Opcional</i>)	30	5-5 Segunda Ley de Newton	92
Preguntas y Problemas	31	5-6 Tercera Ley de Newton	94
<hr/> <hr/>		5-7 Unidades de Fuerza	96
CAPÍTULO 3	41	5-8 Peso y Masa	97
VECTORES		5-9 Medición de Fuerzas	99
3-1 Vectores y Escalares	41	5-10 Aplicaciones de las Leyes de Newton	100
3-2 Suma de Vectores: Método Gráfico	42	5-11 Más Aplicaciones de las Leyes de Newton	103
3-3 Componentes de Vectores	43	Preguntas y Problemas	106

CAPÍTULO 6
DINÁMICA DE LA PARTÍCULA 117

6-1 Leyes de la Fuerza	117
6-2 Fuerzas de Fricción	118
6-3 La Dinámica del Movimiento Circular Uniforme	123
6-4 Ecuaciones del Movimiento: Fuerzas Constantes y No Constantes	126
6-5 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Analíticos	128
6-6 Fuerzas Dependientes del Tiempo: Métodos Numéricos (<i>Opcional</i>)	129
6-7 Fuerzas de Arrastre y el Movimiento de proyectiles	130
6-8 Marcos No Inerciales y Seudofuerzas (<i>Opcional</i>)	133
6-9 Limitaciones de las Leyes de Newton (<i>Opcional</i>)	135
Preguntas y Problemas	137

CAPÍTULO 7
TRABAJO Y ENERGÍA 149

7-1 Trabajo Efectuado por una Fuerza Constante	149
7-2 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Unidimensional	153
7-3 Trabajo Efectuado por una Fuerza Variable: Caso Bidimensional (<i>Opcional</i>)	155
7-4 Energía Cinética y el Teorema Trabajo-Energía	157
7-5 Potencia	159
7-6 Marcos de Referencia (<i>Opcional</i>)	160
7-7 Energía Cinética a Altas Velocidades (<i>Opcional</i>)	162
Preguntas y Problemas	163

CAPÍTULO 8
CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA 171

8-1 Fuerzas Conservativas	171
8-2 Energía Potencial	174
8-3 Sistemas Conservativos Unidimensionales	176
8-4 Sistemas Conservativos Unidimensionales: La Solución Completa	179
8-5 Sistemas Conservativos Bidimensionales y Tridimensionales (<i>Opcional</i>)	182
8-6 Conservación de la Energía en un Sistema de Partículas	183

8-7 Masa y Energía (<i>Opcional</i>)	187
8-8 Cuantización de la Energía (<i>Opcional</i>)	189
Preguntas y Problemas	190

CAPÍTULO 9
SISTEMAS DE PARTÍCULAS 203

9-1 Sistemas de Dos Partículas	203
9-2 Sistemas de Muchas Partículas	206
9-3 Centro de Masa de Objetos Sólidos	209
9-4 Ímpetu Lineal de una Partícula	212
9-5 Ímpetu Lineal de un Sistema de Partículas	213
9-6 Conservación del Ímpetu Lineal	214
9-7 Trabajo y Energía en un Sistema de Partículas (<i>Opcional</i>)	217
9-8 Sistemas de Masa Variable (<i>Opcional</i>)	220
Preguntas y Problemas	224

CAPÍTULO 10
COLISIONES 233

10-1 ¿Qué es una Colisión?	233
10-2 Impulso e Ímpetu	234
10-3 Conservación e Ímpetu Durante las Colisiones	236
10-4 Colisiones en una Dimensión	237
10-5 Colisiones Bidimensionales	241
10-6 Marco de Referencia del Centro de Masa	244
10-7 Procesos de Desintegración Espontánea (<i>Opcional</i>)	248
Preguntas y Problemas	250

CAPÍTULO 11
CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN 261

11-1 Movimiento de Rotación	261
11-2 Las Variables de la Rotación	262
11-3 Rotación con Aceleración Angular Constante	264
11-4 Cantidades de Rotación como Vectores	265
11-5 Relaciones Entre Variables Lineales y Angulares: Forma Escalar	268
11-6 Relaciones Entre las Variables Lineales y Angulares: Forma Vectorial (<i>Opcional</i>)	269
Preguntas y Problemas	271

CAPÍTULO 12
DINÁMICA DE LA ROTACIÓN 277

12-1 Dinámica de la Rotación: Una Visión General	277
--	-----

12-2 Energía Cinética de la Rotación e Inercia de la Rotación	278
12-3 Inercia de Rotación de los Cuerpos Sólidos	281
12-4 Torca que Actúa Sobre una Partícula	283
12-5 Dinámica de la Rotación de un Cuerpo Rígido	286
12-6 Movimientos de Rotación y de Traslación Combinados	290
Preguntas y Problemas	296

**CAPÍTULO 13
ÍMPETU ANGULAR 305**

13-1 Ímpetu Angular de una Partícula	305
13-2 Sistemas de Partículas	307
13-3 Ímpetu Angular y Velocidad Angular	309
13-4 Conservación del Ímpetu Angular	313
13-5 El Trompo	319
13-6 Cuantización del Ímpetu Angular (<i>Opcional</i>)	320
13-7 Dinámica Rotacional: un Repaso	321
Preguntas y Problemas	321

**CAPÍTULO 14
EQUILIBRIO DE LOS CUERPOS RÍGIDOS 331**

14-1 Condiciones de Equilibrio	331
14-2 Centro de Gravedad	332
14-3 Ejemplos de Equilibrio	334
14-4 Equilibrio Estable, Inestable y Neutro de los Cuerpos Rígidos en un Campo Gravitatorio	339
14-5 Elasticidad	341
Preguntas y Problemas	344

**CAPÍTULO 15
OSCILACIONES 353**

15-1 Sistemas Oscilatorios	353
15-2 El Oscilador Armónico Simple	355
15-3 Movimiento Armónico Simple	356
15-4 Consideraciones Energéticas en el Movimiento Armónico Simple	359
15-5 Aplicaciones del Movimiento Armónico Simple	361
15-6 Movimiento Armónico Simple y Movimiento Circular Uniforme	365
15-7 Combinaciones de Movimientos Armónicos	367
15-8 Movimiento Armónico Amortiguado (<i>Opcional</i>)	368

15-9 Oscilaciones Forzadas y Resonancia (<i>Opcional</i>)	370
15-10 Oscilaciones de Dos Cuerpos (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	371 373

**CAPÍTULO 16
GRAVITACIÓN 383**

16-1 La Gravitación Desde la Antigüedad Hasta Kepler	383
16-2 Newton y la Ley de la Gravitación Universal	385
16-3 La Constante Gravitatoria G	386
16-4 La Gravedad Cerca de la Superficie de la Tierra	388
16-5 Efecto Gravitatorio de una Distribución Esférica de la Materia (<i>Opcional</i>)	390
16-6 Energía Potencial Gravitatoria	393
16-7 El Campo Gravitatorio y el Potencial (<i>Opcional</i>)	396
16-8 Los Movimientos de Planetas y Satélites	397
16-9 Gravitación Universal	402
16-10 La Teoría General de la Relatividad (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	404 408

**CAPÍTULO 17
ESTÁTICA DE LOS FLUIDOS 419**

17-1 Fluidos y Sólidos	419
17-2 Presión y Densidad	420
17-3 Variación de la Presión en un Fluido en Reposo	422
17-4 Principio de Pascal y Principio de Arquímedes	426
17-5 Medición de la Presión	429
17-6 Tensión Superficial (<i>Opcional</i>) Preguntas y Problemas	431 433

**CAPÍTULO 18
DINÁMICA DE LOS FLUIDOS 441**

18-1 Conceptos Generales del Flujo de los Fluidos	441
18-2 Trayectoria de una Corriente y la Ecuación de Continuidad	442
18-3 La Ecuación de Bernoulli	445
18-4 Aplicaciones de la Ecuación de Bernoulli y de la Ecuación de Continuidad	447
18-5 Campos de Flujo (<i>Opcional</i>)	450

18-6 Viscosidad, Turbulencia, y Flujo Caótico (<i>Opcional</i>)	453
Preguntas y Problemas	456

CAPÍTULO 19
MOVIMIENTO ONDULATORIO **465**

19-1 Ondas Mecánicas	465
19-2 Tipos de Ondas	466
19-3 Ondas Viajeras	467
19-4 Velocidad de Onda	471
19-5 La Ecuación de la Onda (<i>Opcional</i>)	471
19-6 Potencia e Intensidad en el Movimiento Ondulatorio	475
19-7 El Principio de Superposición	476
19-8 Interferencia de Ondas	478
19-9 Ondas Estacionarias	482
19-10 Resonancia	485
Preguntas y Problemas	487

CAPÍTULO 20
ONDAS SONORAS **495**

20-1 La Velocidad del Sonido	495
20-2 Ondas Viajeras Longitudinales	497
20-3 Potencia e Intensidad de las Ondas Sonoras	499
20-4 Ondas Longitudinales Estacionarias	501
20-5 Sistemas Vibratorios y Fuentes de Sonido	503
20-6 Pulsaciones	506
20-7 El Efecto Doppler	508
Preguntas y Problemas	511

CAPÍTULO 21
LA TEORÍA ESPECIAL DE LA RELATIVIDAD **519**

21-1 Las Dificultades con la Física Clásica	519
21-2 Los Postulados de la Relatividad Especial	521
21-3 Consecuencias de los Postulados de Einstein	522
21-4 La Transformación de Lorentz	526
21-5 Medición de las Coordenadas Espacio-Tiempo de un Suceso	529
21-6 La Transformación de las Velocidades	529
21-7 Consecuencias de la Transformación de Lorentz	531
21-8 Ímpetu Relativista	535
21-9 Energía Relativista	537
21-10 La Lógica la Relatividad Especial	540
Preguntas y Problemas	541

CAPÍTULO 22
TEMPERATURA **547**

22-1 Descripción Macroscópica y Descripción Microscópica	547
22-2 Temperatura y Equilibrio Térmico	548
22-3 Medición de la Temperatura	549
22-4 La Escala de Temperatura de un Gas Ideal	552
22-5 Dilatación Térmica	554
Preguntas y Problemas	558

CAPÍTULO 23
LA TEORÍA CINÉTICA Y EL GAS IDEAL **565**

23-1 Propiedades Macroscópicas de un Gas y la Ley del Gas Ideal	565
23-2 El Gas Ideal: Un Modelo	568
23-3 Cálculo Cinético de la Presión	569
23-4 Interpretación Cinética de la Temperatura	571
23-5 Trabajo Efectuado Sobre un Gas Ideal	572
23-6 La Energía Interna de un Gas Ideal	576
23-7 Fuerzas Intermoleculares (<i>Opcional</i>)	578
23-8 La Ecuación de Estado de van der Waals (<i>Opcional</i>)	579
Preguntas y Problemas	581

CAPÍTULO 24
MECÁNICA ESTADÍSTICA **587**

24-1 Distribuciones Estadísticas y Valores Medios	587
24-2 Recorrido libre medio	589
24-3 La Distribución de las Velocidades Moleculares	593
24-4 La Distribución de las Energías	597
24-5 Movimiento Browniano	599
24-6 Distribuciones Estadísticas Cuánticas (<i>Opcional</i>)	600
Preguntas y Problemas	603

CAPÍTULO 25
EL CALOR Y LA PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA **607**

25-1 El Calor: Energía en Tránsito	607
25-2 Capacidad Calorífica y Calor Específico	609
25-3 Capacidades Caloríficas de los Sólidos	611
25-4 Capacidades Caloríficas de un Gas Ideal	612

25-5 La Primera Ley de la Termodinámica	616
25-6 Aplicaciones de la Primera Ley	619
25-7 La Transferencia de Calor	622
Preguntas y Problemas	626

CAPÍTULO 26
ENTROPIA Y LA SEGUNDA LEY
DE LA TERMODINÁMICA **635**

26-1 Procesos Reversibles y Procesos Irreversibles	635
26-2 Máquinas Térmicas y la Segunda Ley	637
26-3 Refrigeradores y la Segunda Ley	639
26-4 El Ciclo de Carnot	641
26-5 La Escala de Temperatura Termodinámica	644
26-6 Entropía: Procesos Reversibles	646
26-7 Entropía: Procesos Irreversibles	648
26-8 Entropía y la Segunda Ley	650
26-9 Entropía y Probabilidad	651
Preguntas y Problemas	653

APÉNDICES

A El Sistema Internacional de Unidades (SI)	A-1
B Algunas Constantes Fundamentales de la Física	A-3
C Algunos Datos Astronómicos	A-4
D Propiedades de los Elementos	A-5
E Tabla Periódica de los Elementos	A-7
F Partículas Elementales	A-8
G Factores de Conversión	A-10
H Fórmulas Matemáticas	A-14
I Programas de Computadora	A-16
J Premios Nobel de Física	A-20
K Tablas	A-24

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS IMPARES	A-28
CRÉDITOS DE LAS FOTOGRAFÍAS	F-1
ÍNDICE	I-1

CAPÍTULO 6

DINÁMICA DE LAS PARTÍCULAS

En el capítulo 5 estudiamos las leyes de Newton y dimos algunos ejemplos de sus aplicaciones. Estos ejemplos fueron simplificados en extremo, en forma deliberada con el fin de ilustrar la aplicación de las leyes. En el proceso de simplificación, tuvimos que pasar por alto algunos razonamientos físicos. Por ejemplo, un problema esencial en la mecánica, que concierne al diseño de sistemas mecánicos, lo constituye el tema de la fricción. Ninguno de los ejemplos considerados en el capítulo 5 dejó paso a la intervención de la fricción.

En este capítulo continuaremos con más aplicaciones de las leyes de Newton. Estudiaremos ahora las fuerzas de fricción y sus consecuencias. Discutiremos las fuerzas no constantes mostrando cómo resolver las ecuaciones del movimiento para tales fuerzas. Finalmente, demostraremos cómo el uso de un marco de referencia no inercial produce efectos que pueden ser analizados con la introducción de fuerzas inerciales o seudofuerzas que, en contraste con las fuerzas que discutimos en el capítulo 5, no son causadas por objetos específicos del entorno.

6-1 LEYES DE LA FUERZA

Antes de regresar a las aplicaciones de las leyes de Newton, debemos tratar brevemente la naturaleza de las fuerzas en sí mismas. Hemos empleado las ecuaciones de movimiento para analizar y calcular los efectos de las fuerzas, pero éstas no nos dicen nada acerca de las causas de las fuerzas. Para entender qué produce una fuerza debemos tener una comprensión microscópica detallada de las interacciones mutuas de los objetos con su entorno. Al nivel más fundamental, la naturaleza parece actuar a través de un pequeño número de fuerzas fundamentales. Los físicos han identificado tradicionalmente cuatro fuerzas básicas: (1) *la fuerza de gravitación*, que se origina con la presencia de la materia (o, más en línea con la teoría general de la relatividad, la materia y la energía); (2) *la fuerza electromagnética*, que incluye las interacciones eléctricas y magnéticas básicas, y es responsable del enlace de los átomos y de la estructura de los sólidos; (3) *la fuerza nuclear débil*, que genera determinados procesos de desintegración radiactiva y ciertas reacciones entre las partículas más fundamentales, y (4) *la fuerza fuerte*, que opera entre las partículas fundamentales y es responsable de la estabilidad del núcleo.

En la escala más microscópica, por ejemplo, dos protones que apenas se toquen en sus superficies, estas fuerzas tendrían las intensidades relativas siguientes: fuerte (intensidad relativa = 1); electromagnética (10^{-2}); débil (10^{-2}); gravitatoria (10^{-38}). En la escala fundamental, la gravedad es sumamente débil y tiene efectos despreciables. Podemos tener cierta apreciación de la debilidad de la gravedad por algunos experimentos comunes, por ejemplo, levantar unos cuantos trozos de papel con un peine cargado electrostáticamente, o levantar unos cuantos clavos o clips de papelería con un imán. ¡La fuerza magnética de un imán pequeño es suficiente para superar la fuerza de gravitación ejercida por toda la Tierra sobre estos objetos!

La búsqueda de una simplificación mayor ha conducido a los físicos a tratar de reducir el número de fuerzas a menos, incluso, de cuatro. En 1967 se propuso una teoría según la cual las fuerzas débiles y las electromagnéticas podrían ser vistas como partes de una sola fuerza, llamada *fuerza electrodébil*. La combinación o *unificación* de estas dos fuerzas es similar a la unificación en el siglo XIX de la fuerza eléctrica y la fuerza magnética aisladas en una sola fuerza electromagnética. Han sido propuestas recientemente otras teorías, llamadas *teorías de la gran unificación*, que combinan a la fuerza fuerte y a la electrodébil

en un solo sistema, e incluso existen “teorías de todo” que intentan incluir también a la gravedad.

Una predicción de estas teorías es que el protón (la partícula nuclear cargada positivamente) no es estable sino que se desintegra en un periodo prolongado, de quizá 10^{33} años (realmente un tiempo muy largo, en comparación con la edad del Universo, 10^{10} años). Una manera de probar esta teoría es observar un conjunto de 10^{33} protones (equivalente a un cubo de agua de 50 pies de lado) durante un año para ver si uno de los protones se desintegra. Se necesitan de experimentos iguales a los de buscar una aguja en un pajar para probar estas exóticas teorías. En el capítulo 56 de la versión ampliada de este texto consideraremos otras especulaciones de este tipo.

Por fortuna, nuestro análisis de los sistemas mecánicos no necesita invocar tales teorías. De hecho, en todo lo que estudiamos sobre sistemas mecánicos ordinarios intervienen sólo dos fuerzas: la gravedad y el electromagnetismo. La fuerza gravitatoria es aparente en la atracción de los objetos por la Tierra, la cual les da su peso. La atracción gravitatoria mucho más débil de un objeto de laboratorio sobre otro es casi siempre despreciable.

Todas las demás fuerzas que consideramos de manera normal son esencialmente de origen electromagnético: las fuerzas de contacto, tal como la fuerza normal ejercida cuando un objeto empuja a otro, y la fuerza de fricción producida cuando una superficie frota contra otra; las fuerzas viscosas, tales como la resistencia del aire; las fuerzas de tensión, como la de un cable o una cuerda estirados; las fuerzas elásticas, como las de un resorte, y muchas otras. Microscópicamente, estas fuerzas se originan de las fuerzas entre los átomos. Por fortuna, cuando tratamos con sistemas mecánicos ordinarios podemos no tomar en cuenta la base microscópica y reemplazar la complicada subestructura con una sola fuerza efectiva de magnitud y dirección específicas.

6-2 FUERZAS DE FRICCIÓN*

Si lanzamos un bloque de masa m a una velocidad inicial v_0 a lo largo de una mesa horizontal larga, al final llegará al reposo. Esto significa que, mientras se está moviendo, experimenta una aceleración promedio \bar{a} que apunta en dirección opuesta a su movimiento. Si (en un marco inercial) vemos que un cuerpo es acelerado, siempre asociamos a una fuerza, definida por la segunda ley de Newton, con el movimiento. En este caso afirmamos que la mesa ejerce una fuerza de *fricción* sobre el bloque, cuyo

valor promedio es $m\bar{a}$. Generalmente aceptamos que la fricción significa una interacción de contacto entre sólidos. Los efectos de la fricción en los líquidos y los gases se describen en otros términos (véase la sección 6-7).

En realidad, cuando la superficie de un cuerpo se desliza sobre la de otro, los dos cuerpos ejercen una fuerza de fricción entre ellos. La fuerza de fricción de cada cuerpo es de dirección opuesta a su movimiento relativo al otro cuerpo. Las fuerzas de fricción se oponen automáticamente a este movimiento relativo y nunca contribuyen a él. Aun cuando no exista un movimiento relativo, pueden existir fuerzas de fricción entre superficies.

Aunque hasta ahora no hemos tenido en cuenta estos efectos, la fricción es muy importante en nuestras vidas cotidianas. Si se la dejara actuar sola, todas las flechas (ejes) dejarían de girar. En un automóvil se usa alrededor del 20% de la potencia del motor para contrarrestar las fuerzas de fricción. La fricción causa el desgaste y agarre de partes en movimiento, y se lleva a cabo un gran esfuerzo de ingeniería para reducirlas. Por otra parte, sin fricción no podríamos caminar; no podríamos sujetar un lápiz y si pudiésemos hacerlo, no podríamos escribir; el transporte sobre ruedas, tal como lo conocemos, no sería posible.

Queremos conocer cómo expresar las fuerzas de fricción en función de las propiedades del cuerpo y de su entorno; esto es, queremos conocer la ley de la fuerza para las fuerzas de fricción. En lo que sigue, consideraremos el deslizamiento (no el rodamiento) de una superficie seca (no lubricada) sobre otra. Como veremos más adelante, la fricción, vista a nivel microscópico, es un fenómeno muy complicado. Las leyes de la fuerza para una fricción seca, deslizante, son de carácter empírico y aproximadas en sus predicciones. No tienen la sencillez elegante y la precisión que encontramos en la ley de la fuerza de la gravitación (capítulo 16) o de la fuerza electrostática (capítulo 27). Sin embargo, es notable, considerando la enorme diversidad de superficies que uno encuentra, que muchos aspectos del comportamiento de la fricción puedan ser entendidos cualitativamente sobre la base de unos cuantos mecanismos simples.

Consideremos un bloque en reposo sobre una mesa horizontal, como en la figura 1a. Unámosle un resorte para medir la fuerza horizontal F requerida para poner al bloque en movimiento. Encontramos que el bloque no se mueve todavía cuando aplicamos una fuerza pequeña (Fig. 1b). Decimos que la fuerza que aplicamos está equilibrada por una fuerza de fricción f opuesta, ejercida sobre el bloque por la mesa, que actúa a lo largo de la superficie de contacto. Al aumentar la fuerza aplicada (Fig. 1c, d), hallamos alguna fuerza definida mediante la cual el bloque se “desprende” de la superficie y comienza a acelerar (Fig. 1e). Al reducir la fuerza una vez que se ha iniciado el movimiento, encontramos que es posible mantener al bloque en movimiento uniforme sin acelera-

* Para una buena referencia general sobre fricción, véase el artículo sobre este tema en la *Encyclopaedia Britannica*, 14a. edición.

ción (Fig. 1f). La figura 1g muestra los resultados de un experimento para medir la fuerza de fricción. Se aplica una fuerza F creciente en, aproximadamente, $t = 2$ s, después de lo cual la fuerza de fricción aumenta con la fuerza aplicada y el objeto permanece en reposo. En $t = 4$ s el objeto comienza súbitamente a moverse y la fuerza de fricción se vuelve constante, independientemente de la fuerza aplicada.

Las fuerzas de fricción que actúan entre superficies en reposo una respecto a la otra se llaman fuerzas de *fricción estática*. La fuerza máxima de fricción estática (correspondiente al pico en $t = 4$ s en la Fig. 1g) será la misma que la fuerza aplicada más pequeña necesaria para iniciar el movimiento. Una vez que se ha iniciado el movimiento, las fuerzas de fricción que actúan entre las superficies usualmente disminuyen de manera que sólo es necesaria una fuerza más pequeña para mantener un movimiento uniforme (correspondiente a la fuerza casi constante en $t > 4$ s en la Fig. 1g). Las fuerzas que actúan entre superficies en movimiento relativo se llaman fuerzas de *fricción cinética*.

La fuerza máxima de fricción estática entre cualquier par de superficies no lubricadas responde a estas dos leyes empíricas: (1) Es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y (2) es proporcional a la fuerza normal.* La fuerza normal se debe a las propiedades elásticas de los cuerpos en contacto (véase el capítulo 14). Estos cuerpos nunca son enteramente rígidos, y cuando se ejerce una fuerza sobre un cuerpo que no puede moverse en dirección de la fuerza, el cuerpo empuja en contra para evitar ser estirado o deformado. En un bloque que está en reposo sobre una mesa horizontal o se desliza sobre ella, la fuerza normal es igual en magnitud al peso del bloque. Ya que el bloque no tiene aceleración vertical, la mesa debe ejercer una fuerza sobre el bloque dirigida hacia arriba, que es igual en magnitud al jalón hacia abajo de la Tierra sobre el bloque, esto es, igual al peso del bloque.

La razón entre la magnitud de la fuerza *máxima* de fricción estática y la magnitud de la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción estática* de las superficies implicadas. Si f_s representa la magnitud de la fuerza de fricción estática, podemos escribir que

$$f_s \leq \mu_s N, \quad (1)$$

* Las dos leyes de la fricción fueron descubiertas experimentalmente por Leonardo da Vinci (1452-1519). El enunciado de las dos leyes de Leonardo fue notable, teniendo en cuenta que llegó a su descubrimiento dos siglos antes de que Newton desarrollara los conceptos de fuerza. Las expresiones matemáticas de las leyes de la fricción y el concepto del coeficiente de fricción fueron desarrollados por Charles Augustin Coulomb (1736-1806), que es mejor conocido por sus estudios de electrostática (véase el capítulo 27).

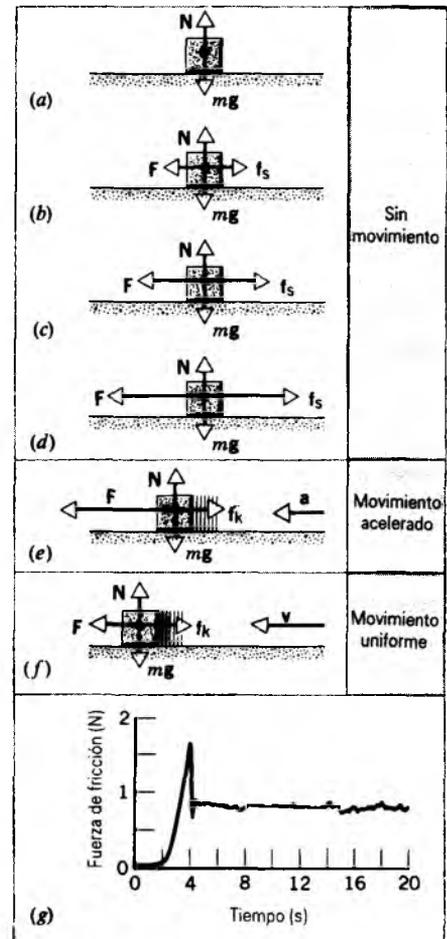


Figura 1 (a - d) Una fuerza externa F , aplicada a un bloque en reposo, es contrarrestada por una fuerza de fricción f igual y opuesta. Al aumentar F , también aumenta f , hasta que f llega a cierto valor máximo. (e) El bloque se "desprende" entonces, acelerándose hacia la izquierda. (f) Si el bloque ha de moverse a velocidad constante, la fuerza aplicada F debe reducirse respecto al valor máximo que tenía justamente antes de que el bloque comenzara a moverse. (g) Resultados experimentales; aquí la fuerza aplicada F se aumenta desde el inicio de cero, aproximadamente en $t = 2$ s, y el movimiento comienza en forma súbita, aproximadamente en $t = 4$ s. Para detalles del experimento, véase "Undergraduate Computer-Interfacing Projects", por Joseph Priest y John Snyder, *The Physics Teacher*, Mayo 1987, pág. 303.

donde μ_s es el coeficiente de fricción estática y N es la magnitud de la fuerza normal. El signo de igualdad se tiene sólo cuando f_s alcance su valor máximo.

La fuerza de fricción cinética f_k entre superficies secas no lubricadas, sigue las mismas leyes que las dos de fricción estática. (1) Es aproximadamente independiente del área de contacto dentro de límites amplios, y (2) es proporcional a la fuerza normal. La fuerza de fricción cinética es también razonablemente independiente de la velocidad relativa con la que las superficies se mueven entre sí.

La relación entre la magnitud de la fuerza de fricción cinética y la magnitud de la fuerza normal se llama *coeficiente de fricción cinética*. Si f_k representa la magnitud de la fuerza de fricción cinética, entonces

$$f_k = \mu_k N, \quad (2)$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción cinética.

Tanto μ_s como μ_k son constantes sin dimensión, siendo cada una la razón de (las magnitudes de) dos fuerzas. Por lo general, para determinado par de superficies $\mu_s > \mu_k$. Los valores reales de μ_s y de μ_k dependen de la naturaleza de las dos superficies en contacto. En la mayoría de los casos podemos considerarlas como constantes (para un par dado de superficies) dentro de la gama de fuerzas y velocidades que encontramos comúnmente. Tanto μ_s como μ_k pueden exceder la unidad, aunque por lo general son menores de 1. La tabla 1 muestra algunos valores representativos de μ_s y de μ_k .

Nótese que las ecuaciones 1 y 2 son relaciones entre las *magnitudes solamente* de las fuerzas normal y de fricción. Estas fuerzas están siempre dirigidas perpendicularmente entre sí.

La base microscópica de la fricción (Opcional)

En la escala atómica aun la superficie más finamente pulida está lejos de ser plana. La figura 2, por ejemplo, muestra un perfil real, muy aumentado, de una superficie de acero que podría ser considerada como muy pulida. Podríamos creer que cuando dos cuerpos están en contacto, el área microscópica de contacto real es mucho menor que el área verdadera de la superficie; en un caso particular estas áreas estarían fácilmente en una razón de 1:10⁴.

El área (microscópica) de contacto real es proporcional a la fuerza normal, porque los puntos de contacto se deforman plásticamente bajo los grandes esfuerzos que se desarrollan en ellos. Muchos puntos de contacto realmente resultan "soldados en frío". Este fenómeno, llamado *adhesión superficial*, ocurre a causa de que los puntos de contacto de las moléculas en lados opuestos de la superficie están tan próximos entre sí que ejercen fuerzas intermoleculares fuertes entre ellas.

TABLA 1 COEFICIENTES DE FRICCIÓN†

Superficies	μ_s	μ_k
Madera contra madera	0.25-0.5	0.2
Vidrio contra vidrio	0.9-1.0	0.4
Acero contra acero, superficies limpias	0.6	0.6
Acero contra acero, superficies lubricadas	0.09	0.05
Hule contra concreto seco	1.0	0.8
Madera encerada de un esquí contra nieve seca	0.04	0.04
Teflón contra Teflón	0.04	0.04

† Los valores son aproximados y se dan sólo como estimaciones. Los coeficientes de fricción reales para cualquier par de superficies dependen de condiciones tales como la limpieza de las superficies, la temperatura, y la humedad.



Figura 2 Una sección aumentada de una superficie de acero muy pulida. La escala vertical de las irregularidades de la superficie es de varios miles de diámetros atómicos. La sección ha sido cortada a un ángulo tal que la escala vertical resulta exagerada con respecto a la escala horizontal en un factor de 10.

Cuando un cuerpo (digamos, un metal) es arrastrado por encima de otro, la resistencia por fricción se asocia con la rotura de estos miles de pequeñísimas soldaduras, las cuales se vuelven a formar continuamente según va habiendo ocasión de nuevos contactos (véase la Fig. 3). Los experimentos de indicadores radiactivos han demostrado que, en el proceso de rotura, pequeños fragmentos de una superficie metálica pueden ser cortados y adherirse a la otra superficie. Si la velocidad relativa de las dos superficies es suficientemente grande, puede haber fusión local en ciertas áreas de contacto aun cuando la superficie, como un total, pueda sentirse sólo moderadamente tibia. El fenómeno de "pegarse y resbalar" es el causante de los ruidos que hacen las superficies secas cuando se deslizan una contra la otra como, por ejemplo, el chirrido de la tiza contra el pizarrón.*

El coeficiente de fricción depende de muchas variables, tales como la naturaleza de los materiales, el acabado de la superficie, las películas sobre la superficie, la temperatura y la cantidad de contaminación. Por ejemplo, si dos superficies de metal cuidadosamente limpias se sitúan en una cámara al alto vacío de modo que no se formen películas de óxido en ellas, el coeficiente de fricción se eleva a valores enormes y las superficies realmente se "sueldan" entre sí con firmeza. La admisión de una pequeña cantidad de aire a la cámara de modo que se puedan formar películas de óxido sobre las superficies opuestas reduce el coeficiente de fricción a su valor "normal".

La fuerza de fricción que se opone a un cuerpo que *rueda* sobre otro es mucho menor que en el movimiento deslizante; esto le da la ventaja a la rueda, que gira, sobre el trineo, que se desliza. Esta fricción reducida se debe en gran parte al hecho de que, al rodar, las soldaduras microscópicas de contacto se descascarillan en lugar de cortarse como en el caso de la fricción deslizante. Esto reduce la fuerza de fricción en un factor grande.

La resistencia al rozamiento en la fricción seca, deslizante, puede reducirse considerablemente por medio de la lubricación. En una gruta en Egipto, un mural que data de 1900 A.C. muestra una gran estatua de piedra que es arrastrada sobre un vehículo a modo de trineo mientras el hombre enfrente del vehículo vierte aceite lubricante a su paso. Una técnica aún más eficaz consiste en introducir una capa de gas entre las superficies que se deslizan; dos ejemplos de ello son la mesa de aire del laboratorio y la chumacera soportada por gas. La fricción puede ser reducida aún más suspendiendo un objeto por medio de fuerzas magnéticas. Los trenes magnéticamente levitados que actualmente se hallan en desarrollo, tienen el potencial de viajar a alta velocidad, casi sin fricción. ■

* Véase, por ejemplo, "Stick and Slip", por Ernest Rabinowicz en *Scientific American*, Mayo 1956, pág. 109.

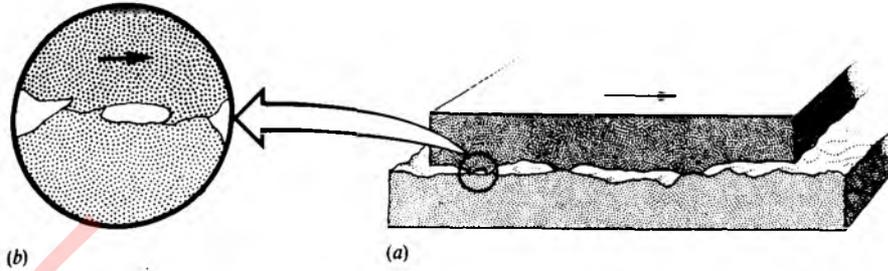


Figura 3 El mecanismo de la fricción deslizando. (a) En esta vista aumentada, la superficie superior se desliza hacia la derecha sobre la superficie inferior. (b) Un detalle, mostrando dos puntos en donde ha ocurrido una soldadura en frío. La fuerza es necesaria para romper estas soldaduras y mantener el movimiento.

Problema muestra 1 Un bloque está en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal, como en la figura 4a. Cuando el ángulo de inclinación se eleva, se halla que el deslizamiento apenas comienza a un ángulo de inclinación $\theta_s = 15^\circ$. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano?

Solución En la figura 4b se muestran las fuerzas que actúan sobre el bloque, considerado como una partícula. El peso del bloque es mg , la fuerza normal ejercida sobre el bloque por la superficie inclinada es N , y la fuerza de fricción ejercida por la superficie inclinada sobre el bloque es f_s . Nótese que la fuerza resultante ejercida por la superficie inclinada sobre el bloque, $N + f_s$, ya no es perpendicular a la superficie de contacto, como lo sería en superficies carentes de fricción ($f_s = 0$). El bloque está en reposo, de modo que la segunda ley de Newton da $\Sigma F = 0$. Resolviendo las fuerzas en sus componentes x y y (a lo largo del plano y normal al plano, respectivamente), obtenemos que

$$\text{componente } x: \quad \Sigma F_x = f_s - mg \sin \theta = 0 \quad \text{ó} \quad f_s = mg \sin \theta,$$

$$\text{componente } y: \quad \Sigma F_y = N - mg \cos \theta = 0 \quad \text{ó} \quad N = mg \cos \theta.$$

En el ángulo θ_s , cuando el deslizamiento apenas comienza, f_s tiene su valor máximo y es igual a $\mu_s N$. Evaluando estas expresiones para θ_s y dividiendo una entre otra, obtenemos

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg \sin \theta_s}{mg \cos \theta_s} = \tan \theta_s,$$

o sea

$$\mu_s = \tan \theta_s = \tan 15^\circ = 0.27.$$

De aquí que la medición del ángulo de inclinación cuando el deslizamiento apenas comienza proporciona un método experi-

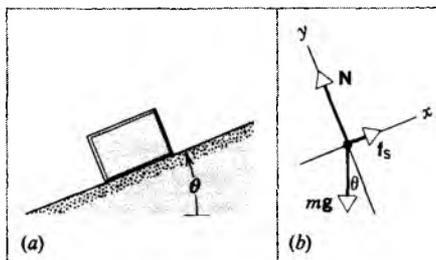


Figura 4 Problema muestra 1. (a) Un bloque en reposo sobre un plano inclinado rugoso. (b) Un diagrama de cuerpo libre del bloque.

mental sencillo para determinar el coeficiente de fricción estática entre dos superficies. Nótese que esta determinación es independiente del peso del objeto.

Podemos emplear argumentos similares para demostrar que el ángulo de inclinación θ_k requerido para mantener una *velocidad constante* del bloque al deslizarse por el plano, una vez que ha arrancado a causa de un golpe suave, está dado por

$$\mu_k = \tan \theta_k,$$

donde $\theta_k < \theta_s$. Con la ayuda de una regla para medir la tangente del ángulo de inclinación, podemos ahora determinar μ_s y μ_k para una moneda que se deslice a lo largo del libro de texto.

Problema muestra 2 Consideremos un automóvil que se mueve a lo largo de una carretera recta horizontal a una velocidad v_0 . Si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es μ_s , ¿cuál es la distancia más corta en que puede ser detenido el automóvil?

Solución En la figura 5 se muestran las fuerzas que actúan sobre el automóvil. Se supone que el automóvil se está moviendo en dirección x positiva. Si suponemos que f_s es una fuerza constante, tendremos un movimiento de deceleración uniforme.

De la relación

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0),$$

con la posición inicial elegida, de modo que $x_0 = 0$ y a una velocidad final de $v = 0$, obtenemos

$$x = -\frac{v_0^2}{2a},$$

donde x es la distancia de alto o parada en la que la velocidad cambia desde v_0 hasta 0. A causa de que a es negativa, x es positiva, tal como lo esperábamos.

Para determinar a , aplicamos la segunda ley de Newton con sus componentes asignadas de acuerdo a la figura 5b:

$$\text{componente } x: \quad \Sigma F_x = -f_s = ma \quad \text{o} \quad a = -f_s/m,$$

$$\text{componente } y: \quad \Sigma F_y = N - mg = 0 \quad \text{o} \quad N = mg,$$

de modo que

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg.$$

Sustituyendo esta cantidad en la expresión para a , hallamos que

$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g.$$

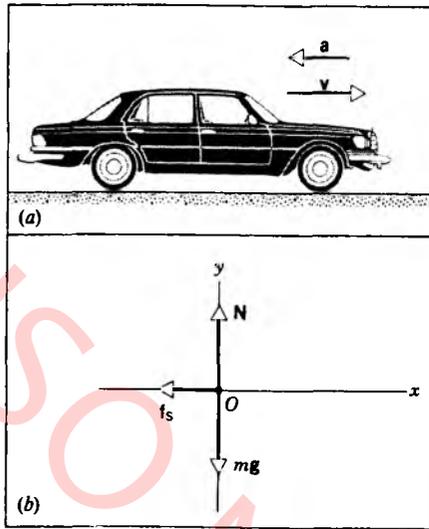


Figura 5 Problema muestra 2. (a) Un automóvil decelerando. (b) Un diagrama de cuerpo libre del automóvil decelerando, considerado éste como una partícula. Por conveniencia, hacemos que todas las fuerzas actúen en un punto común. En realidad, las tres fuerzas mostradas son sumas de las fuerzas individuales que actúan sobre cada una de las cuatro llantas.

Entonces la distancia de parada es

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

Cuanto mayor sea la velocidad inicial, mayor será la distancia requerida para llevar al automóvil al reposo; de hecho, esta distancia varía con el cuadrado de la velocidad inicial. También, cuanto más grande sea el coeficiente de fricción estática entre las superficies, menor será la distancia requerida para llegar a detener el automóvil.

En este problema hemos empleado el coeficiente de fricción estática, en lugar del coeficiente de fricción cinética, porque suponemos que no existe deslizamiento entre las llantas y la carretera. Además, hemos supuesto que opera la fuerza de fricción estática máxima ($f_s = \mu_s N$) porque el problema busca la distancia más corta para detener al automóvil. Con una fuerza de fricción estática más pequeña la distancia para que se detenga sería obviamente mayor. La técnica de frenado correcta requerida aquí es mantener al automóvil justo a punto del patinaje. (Los automóviles equipados con sistemas de frenado anti-trabadura mantienen esta condición automáticamente.) Si la superficie es lisa y los frenos se accionan con fuerza, el automóvil puede patinar. En este caso μ_k reemplaza a μ_s , y la distancia requerida para detenerse aumentaría porque μ_k es más pequeña que μ_s .

Como un ejemplo específico, si $v_0 = 60 \text{ mi/h} = 27 \text{ m/s}$, y $\mu_s = 0.60$ (un valor típico), obtenemos que

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27 \text{ m/s})^2}{2(0.60)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 62 \text{ m}.$$

Nótese que este resultado es independiente de la masa del automóvil. En los automóviles con la propulsión en las ruedas traseras y con el motor en el frente, es una práctica común

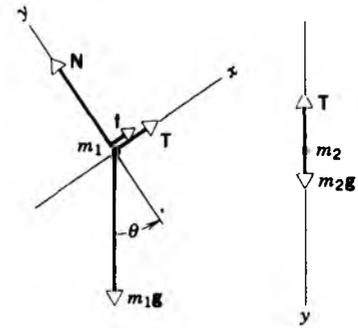


Figura 6 Problema muestra 3. Los diagramas de cuerpo libre de la figura 20 del capítulo 5, en el caso de fricción a lo largo del plano.

“cargar el baúl” con objeto de aumentar la seguridad cuando se conduce sobre carreteras heladas. ¿Cómo puede ser esta práctica consistente con nuestro resultado de que la distancia de parada es independiente de la masa del automóvil? (Sugerencia: véase el problema 2.)

Problema muestra 3 Repita el problema muestra 10 del capítulo 5, teniendo en cuenta una fuerza de fricción entre el bloque 1 y el plano. Use los valores $\mu_s = 0.24$ y $\mu_k = 0.15$.

Solución Si suponemos, como lo aprendimos en la solución al problema muestra 10 del capítulo 5, que el bloque 1 se mueve hacia abajo por el plano, entonces la fuerza de fricción actúa sobre el plano. En la figura 6 se muestra el diagrama de cuerpo libre de m_1 . Las ecuaciones de las componentes de m_1 según la segunda ley de Newton son ahora las siguientes:

$$\begin{aligned} \text{componente } x: \quad \sum F_x &= T + f - m_1 g \sin \theta = m_1 a_{1x} = -m_1 a, \\ \text{componente } y: \quad \sum F_y &= N - m_1 g \cos \theta = m_1 a_{1y} = 0. \end{aligned}$$

Aquí hemos puesto explícitamente que a , esté en la dirección x negativa (esto es, $a_{1x} = -a$). Hacemos un cambio similar en la ecuación para m_2 :

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y} = -m_2 a,$$

donde usamos que $a_{2y} = -a$, porque esperamos que el bloque 2 se mueva en la dirección y negativa.

Poniendo $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos \theta$, tenemos, de la ecuación de la componente x de m_1 ,

$$T + \mu_k m_1 g \cos \theta - m_1 g \sin \theta = -m_1 a.$$

Resolviendo estas dos últimas ecuaciones simultáneamente para las dos incógnitas a y T , obtenemos

$$a = -g \frac{m_2 - m_1 (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta - \mu_k \cos \theta). \quad (4)$$

Nótese que, en el límite de $\mu_k \rightarrow 0$, las ecuaciones 3 y 4 se reducen a las ecuaciones 9 y 10 del problema muestra 10 en el

capítulo 5 (excepto por el signo de a , el cual hemos querido que esté en dirección opuesta en la solución de este problema).
Hallemos ahora los valores numéricos de a y de T :

$$a = (-9.80 \text{ m/s}^2) \frac{2.6 \text{ kg} - 9.5 \text{ kg} (\sin 34^\circ - 0.15 \cos 34^\circ)}{2.6 \text{ kg} + 9.5 \text{ kg}}$$

$$= 1.2 \text{ m/s}^2,$$

$$T = \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} (1 + \sin 34^\circ - 0.15 \cos 34^\circ)$$

$$= 29 \text{ N}.$$

El valor positivo de a es consistente con la manera en que establecimos nuestras ecuaciones; el bloque se mueve hacia abajo por el plano, como lo hizo en el problema muestra 10 del capítulo 5, pero con menos aceleración que lo hizo en el caso sin fricción (2.2 m/s^2).

La tensión en la cuerda es menor de lo que era en el caso sin fricción (31 N). El bloque 1 acelera menos rápidamente hacia abajo por el plano cuando existe fricción, de modo que no jala tan fuertemente de la cuerda amarrada al bloque 2.

Una pregunta adicional que merece ser contestada es si el sistema llegará a moverse. Esto es, ¿existe suficiente fuerza hacia abajo del plano para exceder la fricción estática e iniciar el movimiento? Cuando el sistema está inicialmente en reposo, la tensión en la cuerda es igual al peso de m , o sea (2.6 kg) (9.8 m/s^2) = 26 N. La fricción estática máxima, que se opone a la tendencia a moverse hacia abajo por el plano, es de $\mu_s N = \mu_s m_1 g \cos \theta = 19 \text{ N}$. La componente del peso de m , que actúa hacia abajo por el plano es $m_1 g \sin \theta = 52 \text{ N}$. Así, existe peso más que suficiente actuando hacia abajo por el plano (52 N) para superar el total de la tensión y de la fuerza estática de fricción (26 N + 19 N = 45 N), y el sistema realmente se moverá. Usted debería poder demostrar que si el coeficiente estático de la fricción es mayor de 0.34 entonces no existiría movimiento.

6-3 LA DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

En la sección 4-4 hicimos notar que si un cuerpo se mueve a velocidad uniforme v en un círculo o en un arco circular de radio r , experimenta una aceleración centrípeta a cuya magnitud es v^2/r . La dirección de a es siempre hacia el centro del círculo. Así pues, a es un vector variable porque, aun cuando su magnitud permanezca constante, su dirección cambia continuamente según progresa el movimiento. Quizá el lector desee revisar la figura 11 del capítulo 4, la cual muestra la relación vectorial entre v y a en el movimiento circular a velocidad constante.

Cada cuerpo acelerado debe tener una fuerza neta que actúa sobre él, de acuerdo con la segunda ley de Newton ($\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$). Entonces (suponiendo que estamos en un marco inercial), si vemos un cuerpo que experimente un movimiento circular uniforme, podemos estar seguros de que la magnitud de la fuerza neta $\Sigma \mathbf{F}$ que actúa sobre el cuerpo debe estar dada por

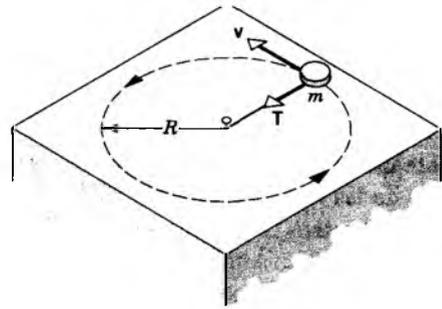


Figura 7 Un disco de masa m se mueve con velocidad constante en una trayectoria circular sobre una superficie horizontal sin fricción. La única fuerza horizontal que actúa sobre el disco es la tensión T con la que la cuerda jala al disco; T proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento circular. No se muestran las fuerzas verticales (N y mg).

$$|\Sigma \mathbf{F}| = ma = \frac{mv^2}{r}. \quad (5)$$

El cuerpo *no está* en equilibrio porque la fuerza neta *no es* cero. La dirección de la fuerza neta $\Sigma \mathbf{F}$ en cualquier instante debe ser la dirección de a en ese instante, es decir, radialmente hacia dentro. Esta fuerza es proporcionada por un agente (o agentes) externo en el ambiente de la masa m en aceleración.

Si el cuerpo en movimiento circular uniforme es un disco que se gira amarrado al extremo de una cuerda sobre una mesa horizontal sin fricción como en la figura 7, la fuerza neta sobre el disco es proporcionada por la tensión T en el cordel. Acelera al disco cambiando constantemente la dirección de su velocidad de modo que el disco se mueve en círculo. La dirección de T es siempre hacia el alfiler del centro, y su magnitud debe ser igual a mv^2/R .

Si la cuerda fuese cortada donde se une al disco, no existiría ninguna fuerza neta ejercida sobre éste. El disco entonces se movería a velocidad constante en línea recta a lo largo de la dirección de la tangente al círculo en el punto en el que se cortó la cuerda. El disco *no volará* radialmente hacia afuera o en una trayectoria curva, sino que seguirá exactamente la dirección de v en línea recta en el instante en que la cuerda se rompe.

Por lo tanto, para mantener al disco moviéndose en círculo, debe ser proporcionada una fuerza que jale de él *hacia el centro*. Las fuerzas responsables del movimiento circular uniforme se llaman fuerzas *centrípetas* porque están dirigidas "hacia el centro" del movimiento circular. Sin embargo, el hecho de catalogar a una fuerza como "centrípeta" significa simplemente que siempre apunta radialmente hacia adentro; el nombre no nos dice nada sobre la naturaleza de la fuerza o sobre el cuerpo que la ejerce. Así pues, en el disco giratorio de la figura 7, la fuerza centrípeta es una fuerza de tensión proporcionada por la cuerda; para la Luna que gira alrededor de la

Tierra la fuerza centrípeta es la atracción gravitatoria de la Tierra sobre la Luna; para un electrón que gira alrededor de un núcleo atómico la fuerza centrípeta es electrostática. La fuerza centrípeta no es una nueva clase de fuerza sino simplemente una manera de describir el comportamiento en el tiempo de las fuerzas que son atribuibles a cuerpos específicos en el mismo ambiente. Así, una fuerza puede ser centrípeta y elástica, centrípeta y gravitatoria, o centrípeta y electrostática, entre otras posibilidades.

Consideremos algunos ejemplos de fuerzas que actúan centrípetamente.

El péndulo cónico

La figura 8 muestra un cuerpo pequeño de masa m que gira en un círculo horizontal a velocidad constante v en el extremo de una cuerda de longitud L . Al moverse el cuerpo alrededor, el cordón barre la superficie de un cono imaginario. Este dispositivo se llama *péndulo cónico*. Hallemos el tiempo requerido para una revolución completa del cuerpo.

Si el cordón forma un ángulo θ con la vertical, el radio de la trayectoria circular es $R = L \sin \theta$. Las fuerzas que actúan sobre el cuerpo de masa m son su peso mg y la tensión T de la cuerda, como se muestra en la figura 8b. En este caso la segunda ley de Newton da

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}.$$

Claramente, la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo no es cero, lo cual es como debería de ser porque se requiere una fuerza para mantener al cuerpo moviéndose en círculo a velocidad constante.

Podemos descomponer T en cualquier instante en una componente radial y otra vertical:

$$T_r = -T \sin \theta \quad \text{y} \quad T_z = T \cos \theta.$$

La componente radial es negativa si definimos que la dirección positiva es hacia afuera del eje.

Puesto que el cuerpo no tiene aceleración vertical, podemos escribir que la componente z es, según la segunda ley de Newton,

$$\sum F_z = T_z - mg = 0,$$

o sea

$$T \cos \theta = mg.$$

La aceleración radial es $a_r = -v^2/R$, negativa porque actúa radialmente hacia adentro (opuesta a la dirección de r , la cual tomamos como la dirección radial positiva). Esta aceleración es proporcionada por T_r , la componente

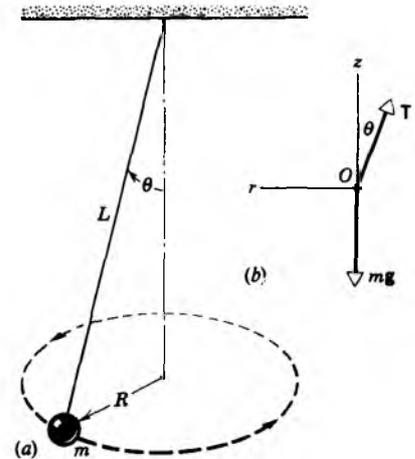


Figura 8 El péndulo cónico. (a) Un cuerpo de masa m suspendido de un cordón de longitud L se mueve en círculo; el cordón describe un cono circular recto de semiángulo θ . (b) Un diagrama de cuerpo libre del cuerpo.

radial de T , la cual proporciona la fuerza centrípeta que actúa sobre m . Por lo tanto, de la componente radial de la segunda ley de Newton,

$$\sum F_r = T_r = ma_r,$$

o sea

$$-T \sin \theta = -mv^2/R.$$

Al dividir las ecuaciones de la componente radial y de la componente z , obtenemos

$$\frac{-T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

o bien, resolviendo para v ,

$$v = \sqrt{Rg \tan \theta},$$

la cual da la velocidad constante del cuerpo. Si t es el tiempo para una revolución completa del cuerpo, entonces

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

o sea

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}.$$

Pero $R = L \sin \theta$, de modo que

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}}. \quad (6)$$

Esta ecuación da la razón entre t , L , y θ . Nótese que t , llamada *periodo* del movimiento, no depende de m .

Si $L = 1.2 \text{ m}$ y $\theta = 25^\circ$, ¿cuál es el periodo del movimiento? Tenemos que

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{(1.2 \text{ m})(\cos 25^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 2.1 \text{ s.}$$

El rotor

En muchos parques de diversión* podemos encontrar un aparato llamado rotor. Es un espacio cilíndrico hueco que gira con respecto al eje vertical central del cilindro. La persona que utiliza el juego, entra al aparato, cierra la puerta, y se pone de pie contra la pared. El aparato aumenta gradualmente su velocidad rotatoria desde el reposo hasta que, a una velocidad predeterminada, el piso se abre hacia abajo, quedando al descubierto un hondo agujero. La persona no cae sino que permanece "adherida" contra la pared del rotor. ¿Qué velocidad rotatoria mínima es necesaria para impedir la caída?

En la figura 9 se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona. El peso de la persona es mg , la fuerza de fricción estática entre la persona y la pared del aparato es f_s , y N es la fuerza normal ejercida por la pared sobre la persona (la cual, como veremos, proporciona la fuerza centrípeta necesaria). Como lo hicimos en el cálculo anterior, descomponemos las fuerzas en sus componentes radial y vertical. Definimos al eje z como positivo hacia arriba y, para que la persona no caiga, no debe haber aceleración en la dirección z . La componente z de la segunda ley de Newton da

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = 0.$$

Sea R el radio del rotor y v la velocidad tangencial de la persona. El pasajero experimenta una aceleración radial $-v^2/R$, y la componente radial de la segunda ley de Newton puede ser escrita entonces así:

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^2}{R}.$$

Nótese que N proporciona la fuerza centrípeta en este caso. Si μ_s es el coeficiente de la fricción estática entre la persona y la pared necesaria para impedir el deslizamiento, entonces $f_s = \mu_s N$ y hallamos que

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s mv^2}{R}$$

o sea

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}}. \tag{7}$$

* Véase "Fear and Trembling at the Amusement Park", por John Roeder y Jearl Walker, en *Fundamentals of Physics*, 3a. ed., por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988).

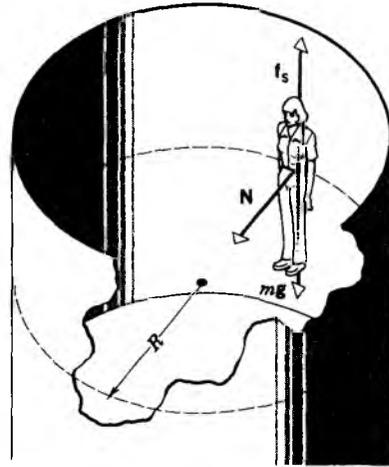


Figura 9 El rotor. Se muestran las fuerzas que actúan sobre la persona.

Esta ecuación relaciona al coeficiente de fricción necesario para impedir el deslizamiento con la velocidad tangencial de un objeto sobre la pared. Nótese que el resultado no depende del peso de la persona.

Como práctica, el coeficiente de fricción entre el material textil de la ropa que viste el pasajero y la pared típica de un rotor (lona) es de alrededor de 0.40. Para un rotor típico el radio es de 2.0 m, de modo que v debe ser alrededor de 7.0 m/s o más. La circunferencia de la trayectoria circular es $2\pi R = 12.6 \text{ m}$, y a 7.0 m/s le toma un tiempo de $t = 12.6 \text{ m}/(7.0 \text{ m/s}) = 1.80 \text{ s}$ completar cada revolución. El aparato debe, por lo tanto, girar a razón de cuando menos $1/1.80 \text{ s} = 0.56 \text{ revoluciones/s}$ o alrededor de 33 rpm, la misma tasa de rotación que el plato de un fonógrafo.

La curva peraltada

Hagamos que el bloque de la figura 10a represente a un automóvil o a un carro de ferrocarril que se mueve a velocidad constante v sobre una vía a nivel en una curva que tenga un radio de curvatura R . En adición a las dos fuerzas verticales, es decir, el peso mg y la fuerza normal N , debe actuar sobre el carro una fuerza horizontal P . La fuerza P proporciona la fuerza centrípeta necesaria para el movimiento en círculo. En el caso del automóvil esta fuerza es proporcionada por la fuerza lateral de fricción que ejerce la carretera sobre las llantas; en el caso del carro de ferrocarril la fuerza es proporcionada por los rieles al ejercer una fuerza lateral sobre el borde interior de las ruedas del carro. En aras de la seguridad, no podemos confiar en que cualquiera de estas fuerzas laterales sea lo suficientemente grande en todo momento, y ambas causan un desgaste innecesario. Por lo tanto, la

$$\tan \theta = v^2/Rg. \quad (8)$$

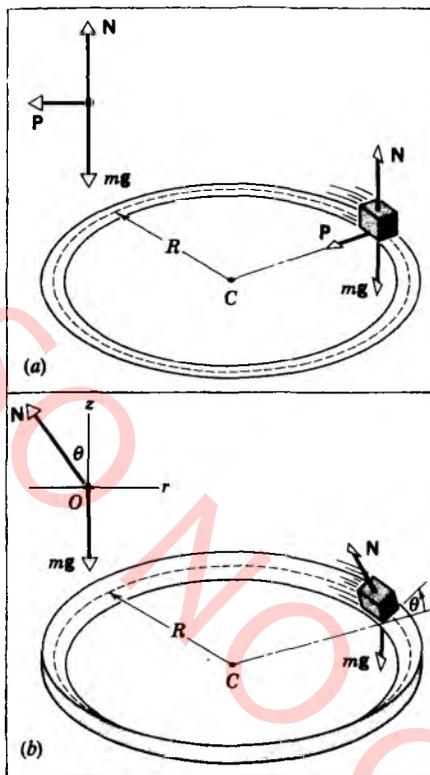


Figura 10 (a) Una vía a nivel. Se muestra a la izquierda el diagrama de cuerpo libre del cuerpo en movimiento. La fuerza centrípeta debe ser proporcionada por la fricción entre las llantas y la vía. (b) Una vía peraltada. No es necesaria la fricción para tomar la curva con seguridad.

vía está *peraltada* en las curvas, como se muestra en la figura 10b. En este caso, la fuerza normal N no solamente tiene una componente vertical, como antes, sino también una componente horizontal que proporciona la fuerza centrípeta necesaria para un movimiento circular uniforme. Por lo tanto, no se necesita ninguna fuerza lateral adicional en una vía que esté apropiadamente peraltada para vehículos de determinada velocidad.

En ausencia de la fricción, el ángulo θ correcto de peralte puede obtenerse como sigue. Comenzamos, como es usual, con la segunda ley de Newton, y nos referimos al diagrama de cuerpo libre que se muestra en la figura 10b. No existe una aceleración vertical, de modo que la componente vertical da

$$\sum F_z = N \cos \theta - mg = ma_z = 0.$$

La componente radial de la fuerza normal es $-N \cos \theta$, y la aceleración radial es $-v^2/R$. La componente radial de la segunda ley de Newton nos da, por lo tanto,

$$\sum F_r = -N \sin \theta = ma_r = -mv^2/R.$$

Dividiendo estas dos ecuaciones, obtenemos

Nótese que el ángulo de peralte apropiado depende de la velocidad del carro y de la curvatura del camino. No depende de la masa del carro; para un ángulo de peralte determinado, todos los carros podrán viajar con seguridad. Para una curvatura determinada, el camino está peraltado a un ángulo correspondiente a una velocidad promedio esperada. A menudo las curvas se marcan con señales que anuncian la velocidad apropiada para la que el camino ha sido peraltado. Si los vehículos exceden esa velocidad, la fricción entre las llantas y el camino debe proporcionar la fuerza centrípeta adicional necesaria para tomar la curva con seguridad.

Compruebe la fórmula de peraltado para los casos límite $v = 0$, $R \rightarrow \infty$, v grande, y R pequeño. También, nótese que la ecuación 8, si se resuelve para v , da el mismo resultado que la que derivamos para la velocidad de la pesa de un péndulo cónico. Compare las figuras 8 y 10, observando sus semejanzas.

6-4 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO: FUERZAS CONSTANTES Y NO CONSTANTES*

Revisemos brevemente nuestro progreso en el estudio de la dinámica y de la cinemática. Nuestro objetivo final es describir cómo se mueve una partícula cuando actúan sobre ella un grupo de fuerzas. Esquemáticamente, el análisis (en una dimensión) puede ser representado como sigue:

$$\sum F \rightarrow a \rightarrow x(t), v(t).$$

Esto es, las leyes de Newton (como se describieron en el capítulo 5) nos proporcionan los medios para calcular la aceleración de una partícula a partir de la fuerza neta que actúa sobre ella. El siguiente paso es el matemático para obtener la posición y la velocidad (en todo tiempo t) a partir de la aceleración y la posición y velocidad iniciales.

Con excepción de la sección anterior sobre el movimiento circular, hasta ahora hemos considerado solamente fuerzas constantes (es decir, fuerzas que no dependen del tiempo, la velocidad, o la posición). Si la fuerza es constante, entonces la aceleración es constante, y para una aceleración constante las soluciones para $v(t)$ y $x(t)$ en una dimensión se obtienen fácilmente, como lo hicimos

* Las secciones 6-4 a 6-7 implican aspectos elementales del cálculo integral. El material de estas secciones puede omitirse o posponerse hasta que el estudiante esté más familiarizado con los métodos de la integración.

en la sección 2-6. Entonces nuestro análisis de las fuerzas constantes está completo.

Cuando las fuerzas no son constantes, todavía podemos usar las leyes de Newton para hallar la aceleración, pero ciertamente no podemos usar las fórmulas para la aceleración constante de la sección 2-6 para hallar $v(t)$ y $x(t)$. En su lugar, debemos remitirnos a los métodos que implican al cálculo integral.

Antes de aplicar nuestro análisis al caso de fuerzas no constantes, apliquemos el cálculo integral en el caso de fuerzas constantes y veamos cómo se obtienen los resultados de la sección 2-6. Supongamos que hemos hallado la aceleración a (de las leyes de Newton) y que deseamos obtener $v(t)$ y $x(t)$. Comencemos con $a = dv/dt$, y así

$$dv = a dt. \quad (9)$$

Integramos ahora ambos lados. En el lado izquierdo, la velocidad es la variable de integración, con los límites de v_0 para el tiempo 0 y v para el tiempo t . En la derecha, integramos sobre el tiempo entre 0 y t .

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt. \quad (10)$$

En el caso de la aceleración constante, a sale de la integral de la derecha y obtenemos

$$v - v_0 = a \int_0^t dt \quad (11)$$

o sea

$$v(t) = v_0 + at \quad (12)$$

la cual es justamente la ecuación 15 del capítulo 2.

Continuando, hallamos $x(t)$ usando $v = dx/dt$ para tener otra integral:

$$dx = v dt = (v_0 + at)dt = v_0 dt + at dt. \quad (13)$$

Integramos de la posición x_0 en el tiempo 0 a la posición x en el tiempo t :

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt, \quad (14)$$

y si a es constante podemos de nuevo sacarla de la integral:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \\ &= v_0 t + a(\frac{1}{2}t^2) \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Esta ecuación es idéntica a la ecuación 19 del capítulo 2.

Si la aceleración no es constante, es más complicado evaluar las integrales. El hecho de que las integrales de las

ecuaciones 10 y 14 obtengan funciones explícitas para $v(t)$ y $x(t)$ se llama enfoque *analítico* para resolver el problema. Una alternativa es el método *numérico*, mediante el cual podemos usar una computadora para evaluar las integrales, obteniendo no las funciones analíticas $v(t)$ y $x(t)$, sino los valores numéricos de v y de x para cualquier tiempo t . Esto puede hacerse a cualquier nivel de precisión deseado.

Las fuerzas constantes demuestran las aplicaciones de las leyes de Newton, y son ciertamente más fáciles de trabajar que las fuerzas no constantes. Es una fortuna que los problemas prácticos incluyan a menudo fuerzas que pueden ser consideradas bajo muchas circunstancias como aproximadamente constantes: la gravedad cerca de la superficie de la Tierra, las fuerzas de fricción, las fuerzas de tensión en cables, y tantas otras. Sin embargo, muchas situaciones físicas no quedan bien descritas por las fuerzas constantes, en cuyos casos debemos usar técnicas analíticas o numéricas para resolver el problema. He aquí algunos ejemplos de estas fuerzas:

1. *Fuerzas que dependen del tiempo.* En el capítulo 2 analizamos el frenado de un automóvil *suponiendo* que la aceleración era constante. En la práctica, rara vez es éste el caso. Bajo muchas circunstancias, especialmente a alta velocidad, solemos, por lo general, accionar los frenos lentamente al principio y luego con más fuerza cuando el auto se va deteniendo. La fuerza de frenado depende, por tanto, del tiempo durante el intervalo en que se detiene el automóvil; la función $a(t)$ dependerá de los detalles de cómo apliquemos los frenos.

Otro ejemplo de una fuerza que depende del tiempo ocurre en el caso de una onda que viaja a través de un medio. Consideremos una onda sonora en el aire, donde, para cualquier posición dada, la onda varía sinusoidalmente con el tiempo. La fuerza que actúa sobre cada una de las moléculas de aire por separado variará también sinusoidalmente con el tiempo, con la misma frecuencia que la onda. La aceleración de la partícula tendrá la misma dependencia del tiempo que la fuerza.

2. *Fuerzas que dependen de la velocidad.* Un ejemplo conocido de una fuerza dependiente de la velocidad es la fuerza de arrastre que experimenta un cuerpo que se mueve en un medio fluido tal como el aire o el agua. Esta fuerza de fricción aumenta con la velocidad. Usted habrá encontrado éste efecto cuando trata de caminar en una alberca. Si camina lentamente, siente sólo una fuerza resistiva pequeña, pero si trata de caminar rápidamente, las fuerzas resistivas sobre sus piernas pueden ser bastante grandes. Cuanto más rápido trate de moverse, mayor será la fuerza de arrastre.

El movimiento de los proyectiles se ve extraordinariamente afectado por las fuerzas de arrastre, aun cuando en los capítulos 2 y 4 los tuvimos en cuenta en nuestro análisis de cuerpos en caída y proyectiles. Para una velo-

cidad inicial determinada, un proyectil tal como una bola de béisbol tiene un alcance en el aire de la mitad o menos del que se esperaría si nos basáramos en el análisis de la sección 4-3. Un cuerpo lanzado a una distancia grande no responderá a las ecuaciones de la caída libre de la sección 2-7, las cuales parecen permitir que su velocidad aumente sin límite. En su lugar, a medida que la velocidad aumenta lo hará también la fuerza de arrastre, la cual tiende a reducir o incluso impedir incrementos adicionales de la velocidad. De hecho, como veremos en la sección 6-7, la velocidad tiende a un límite (la *velocidad terminal*) más allá del cual no habrá una aceleración. (Para muchos objetos, este efecto ocurre sólo a una velocidad considerablemente alta, siguiendo luego caídas a través de distancias del orden de 100 m o más. Para una caída de 1 ó 2 metros en nuestros experimentos de laboratorio, el efecto es despreciable y podemos usar las ecuaciones de la sección 2-7 con confianza.)

3. *Fuerzas que dependen de la posición.* Un ejemplo familiar de una fuerza dependiente de la posición es la fuerza de restitución ejercida por un resorte estirado a una distancia x de su longitud de equilibrio: $F = -kx$. La aceleración experimentada por un cuerpo de masa m unido al resorte es, entonces, $a = F/m = -kx/m$. Si desplazamos al cuerpo una distancia x , experimenta una fuerza que tiende a regresarlo hacia su posición de equilibrio. Si soltamos el cuerpo, se mueve hacia la posición de equilibrio; al hacerlo, el desplazamiento x disminuye, así como también la aceleración. Mientras pasa por la posición de equilibrio, su aceleración es instantáneamente cero, pero la aceleración aumenta en magnitud de nuevo mientras se mueve más allá de $x = 0$.

Las fuerzas dependientes de la posición se analizan con más facilidad usando técnicas de trabajo y energía, las cuales discutiremos en los capítulos 7 y 8. En las secciones próximas demostraremos algunos métodos que emplean las leyes de Newton para analizar situaciones donde aparecen fuerzas que dependen del tiempo y de la velocidad.

6-5 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO: MÉTODOS ANALÍTICOS

Usando las leyes de Newton de la manera usual, con algunas de las fuerzas dependiendo del tiempo, obtenemos una aceleración $a(t)$ que depende del tiempo. En este caso podemos proceder exactamente como lo hicimos en la sección 6-4 para hallar la velocidad por integración directa. Recordando que $a = dv/dt$, escribimos que $dv = a(t) dt$ e integramos desde el tiempo $t = 0$, cuando la velocidad inicial es v_0 , hasta el tiempo t , cuando la velocidad es v . Para simplificar suponemos que el movimiento

está confinado a una dimensión, pero la extensión a tres dimensiones es fácil. Procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^v dv &= \int_0^t a(t) dt, \\ v - v_0 &= \int_0^t a(t) dt, \\ v(t) &= v_0 + \int_0^t a(t) dt. \end{aligned} \quad (16)$$

Comparemos el grupo de ecuaciones de arriba con las ecuaciones 10 a 12; la única diferencia es que a permanece dentro de la integral.

Una vez que tengamos a $v(t)$, podemos repetir el procedimiento para hallar a $x(t)$. Con $v = dx/dt$, tenemos que $dx = v(t) dt$, y llevando a cabo una integral similar desde el tiempo $t = 0$, cuando la partícula se localiza en x_0 , hasta el tiempo t , cuando la posición es x , tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x dx &= \int_0^t v(t) dt, \\ x - x_0 &= \int_0^t v(t) dt, \\ x(t) &= x_0 + \int_0^t v(t) dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Una vez más, comparemos con las ecuaciones 14 y 15 y notemos cómo la ecuación 17 se reduce a la ecuación 15 cuando a sea constante.

Problema muestra 4 Un automóvil se mueve a 105 km/h (unas 65 mi/h ó 29.2 m/s). El conductor comienza a accionar súbitamente los frenos, pero lo hace con fuerza creciente de modo que la deceleración aumenta con el tiempo de acuerdo con $a(t) = ct$, donde $c = -2.67 \text{ m/s}^3$. (a) ¿Cuánto tiempo transcurrirá antes de que el automóvil llegue al reposo? (b) ¿Qué distancia recorre en el proceso?

Solución (a) Necesitamos una expresión para $v(t)$, de modo que podamos hallar el tiempo para el cual $v = 0$. Usando la ecuación 16 con $a(t) = ct$, tenemos que

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ct dt = v_0 + \frac{1}{2}ct^2.$$

Haciendo que $v(t)$ sea igual a cero, podemos resolver para el tiempo t_1 en el cual el automóvil llega al reposo:

$$\begin{aligned} 0 &= v_0 + \frac{1}{2}ct_1^2, \\ t_1 &= \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} = \sqrt{\frac{-2(29.2 \text{ m/s})}{-2.67 \text{ m/s}^3}} = 4.68 \text{ s}. \end{aligned}$$

Al automóvil le toma 4.68 s llegar al reposo.

(b) Para hallar qué distancia recorre el automóvil, necesitamos una expresión para $x(t)$, para lo cual debemos integrar a $v(t)$ de acuerdo con la ecuación 17:

$$x(t) = x_0 + \int_c^t (v_0 + \frac{1}{2}ct^2) dt = x_0 + v_0t + \frac{1}{6}ct^3.$$

Con $t = t_1 = 4.68$ s, la distancia recorrida es (haciendo a x_0 igual a cero)

$$\begin{aligned} x(t_1) &= 0 + (29.2 \text{ m/s})(4.68 \text{ s}) + \frac{1}{6}(-2.67 \text{ m/s}^3)(4.68 \text{ s})^3 \\ &= 91.0 \text{ m.} \end{aligned}$$

La figura 11 muestra la dependencia del tiempo de x , v , y a . En contraste con el caso de la aceleración constante, $v(t)$ no es una línea recta.

Con este método de frenar, la mayoría del cambio de velocidad ocurre cerca del final del movimiento. El cambio de velocidad en el primer segundo después de haber aplicado los frenos es sólo de 1.3 m/s (unas 3 mi/h); en el último segundo, sin embargo, el cambio es de 11.2 m/s (unas 25 mi/h). (Recordemos que en el caso de la aceleración constante, el cambio de velocidad es el mismo en intervalos de tiempo iguales.) ¿Puede usted pensar en las ventajas de frenar de esta manera? ¿Existen también desventajas?

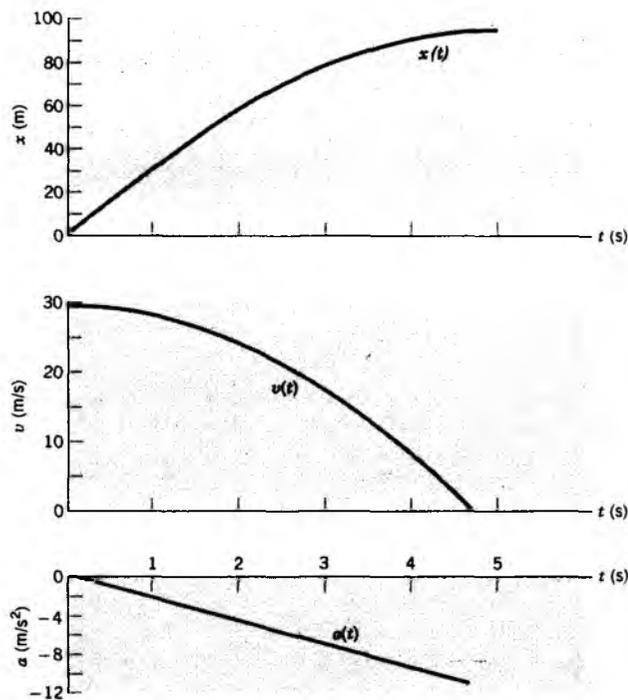


Figura 11 Problema muestra 4. La posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ deducidas se muestran correspondiendo con $a(t)$, la cual varía linealmente con el tiempo.

6-6 FUERZAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO: MÉTODOS NUMÉRICOS (Opcional)

El procedimiento analítico descrito en la sección anterior nos permite en principio calcular $x(t)$ y $v(t)$ para cualquier $a(t)$ dada. Sin embargo, a menudo este método no es práctico ni deseable. Por ejemplo, puede no existir una forma analítica para las integrales, o quizá la forma es tan complicada que las soluciones no contribuyen a nuestra visión física del problema. Las técnicas numéricas ofrecen una alternativa conveniente a los métodos analíticos, y son, por supuesto, particularmente útiles en ejemplos en que no pueda usarse el método analítico.

En el método numérico, aproximamos el problema dividiendo el intervalo, sobre el que deseamos hallar la solución, en un número grande de intervalos pequeños. En cada intervalo aplicamos las ecuaciones de la aceleración constante, pero esa "constante" cambia de un intervalo al otro. Una elección conveniente para la aceleración constante en cada intervalo es la aceleración promedio en el intervalo.

Este método trabaja mejor, y da los resultados más precisos, si hacemos los intervalos tan pequeños como sea posible; cuanto más pequeño sea el intervalo, mejor se aproximará la aceleración promedio (constante) a la aceleración real. Por otra parte, cuando disminuimos el tamaño de los intervalos, debemos aumentar correspondientemente su número, y podemos por tanto necesitar hacer muchos cálculos repetitivos. Ésta es justamente la tarea que las computadoras hacen muy bien, y así este método de solución puede hacerse en una computadora a cualquier nivel de precisión deseado.

La figura 12 muestra gráficamente cómo se lleva a cabo este procedimiento en el caso del problema con aceleración variable que resolvimos en el problema muestra 4. La región entre $t = 0$ y $t = 5$ s se divide en 10 intervalos pequeños, cada uno de anchura $\delta t = 0.5$ s. La función $a(t)$ es aproximada en cada intervalo por una constante diferente (la aceleración promedio, que en este

caso lineal es también el valor de a en el punto medio del intervalo). En el primer intervalo, la aceleración promedio se determina de los valores de a en $t = 0$ y $t = 0.5$ s:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{1}{2}[a(0) + a(0.5 \text{ s})] = \frac{1}{2}[0 + (-2.67 \text{ m/s}^3)(0.5 \text{ s})] \\ &= -0.67 \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

El cambio de la velocidad en el primer intervalo, δv_1 , es aproximadamente

$$\delta v_1 = \bar{a}_1 \delta t = (-0.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) = -0.34 \text{ m/s},$$

y la velocidad en $t = 0.5$ s es, por lo tanto,

$$v_1 = v_0 + \delta v_1 = 29.2 \text{ m/s} - 0.34 \text{ m/s} = 28.9 \text{ m/s}.$$

Para hallar el desplazamiento durante el primer intervalo, primero hallamos la velocidad promedio durante ese intervalo:

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_1) = \frac{1}{2}(29.2 \text{ m/s} + 28.9 \text{ m/s}) = 29.1 \text{ m/s},$$

y el desplazamiento δx_1 en ese intervalo es aproximadamente

$$\delta x_1 = \bar{v}_1 \delta t = (29.1 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.6 \text{ m}.$$

Si asignamos el punto de partida como $x_0 = 0$, entonces la posición al final del primer intervalo es la siguiente:

$$x_1 = x_0 + \delta x_1 = 0 + 14.6 \text{ m} = 14.6 \text{ m}.$$

Los valores de v_1 y de x_1 están trazados para $t = 0.5$ s en la figura 12.

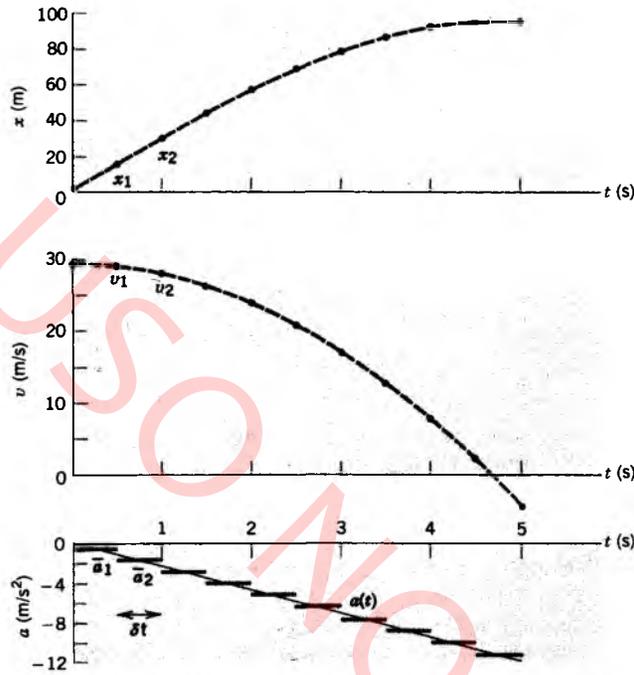


Figura 12 Solución numérica (mostrada como puntos) al problema muestra 4; compare con la solución analítica (Fig. 11 y curvas con líneas entrecortadas). Se supone que la aceleración es constante para cada uno de los intervalos de 0.5 s, y que la posición y la velocidad pueden calcularse al final del intervalo, dando los puntos trazados. Tomando más intervalos (y más pequeños) nos daría más puntos y curvas menos pronunciadas para $x(t)$ y $v(t)$.

Nos movemos ahora al segundo intervalo y repetimos el procedimiento. Aquí la aceleración promedio es

$$\begin{aligned}\bar{a}_2 &= \frac{1}{2}[a(0.5 \text{ s}) + a(1.0 \text{ s})] \\ &= \frac{1}{2}[(-2.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) + (-2.67 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})] \\ &= -2.00 \text{ m/s}^2.\end{aligned}$$

Continuando como lo hicimos para el primer intervalo, en el segundo intervalo

$$\begin{aligned}\delta v_2 &= \bar{a}_2 \delta t = (-2.00 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) = -1.0 \text{ m/s}, \\ v_2 &= v_1 + \delta v_2 = 28.9 \text{ m/s} - 1.0 \text{ m/s} = 27.9 \text{ m/s},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\bar{v}_2 &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) = \frac{1}{2}(28.9 \text{ m/s} + 27.9 \text{ m/s}) = 28.4 \text{ m/s}, \\ \delta x_2 &= \bar{v}_2 \delta t = (28.4 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.2 \text{ m}, \\ x_2 &= x_1 + \delta x_2 = 14.6 \text{ m} + 14.2 \text{ m} = 28.8 \text{ m}.\end{aligned}$$

Los valores de v_2 y de x_2 dan la velocidad y la posición al final del segundo intervalo, y están trazados para $t = 1.0 \text{ s}$ en la figura 12.

Continuando igual para los 10 intervalos, hallamos los puntos restantes trazados en la figura 12.

Al comparar las figuras 11 y 12, podemos ver lo bien que la solución numérica concuerda con la analítica, aun para tan pocos como 10 intervalos. Una computadora podría hacer fácilmente este cálculo para 100 o para 1000 intervalos, de modo que los puntos trazados para x y para v aparecerían casi como curvas lisas.

Interpolando entre los puntos finales de la velocidad del último intervalo, vemos que el automóvil se detiene en 4.7 s aproximadamente, tal como lo hallamos en la solución analítica. Al calcular la distancia viajada de la figura 12, hallamos alrededor de 91 m, nuevamente de acuerdo con el valor analítico.

El valor negativo hallado para v al final del décimo intervalo no es, por supuesto, significativo en este problema: la situación dinámica original no permite valores negativos, porque al accionar los frenos no provoca que el automóvil se mueva hacia atrás. Es conveniente para nosotros continuar con el cálculo numérico hasta ese punto, para ayudarnos a analizar el último intervalo.

En el apéndice I, el lector encontrará un programa de computadora (en lenguaje BASIC), que puede hacer este cálculo. Mediante unos pequeños cambios en el programa, el lector puede hacer este tipo de cálculo para cualquier forma de $a(t)$. ■

6-7 FUERZAS DE ARRASTRE Y EL MOVIMIENTO DE PROYECTILES

La lluvia cae de las nubes cuya altura h sobre el nivel del suelo es de unos 2 km. Utilizando nuestra ecuación para los cuerpos en caída libre (Ec. 25 del capítulo 2), sabremos que la lluvia caerá al suelo a una velocidad de $v = \sqrt{2gh} = 200 \text{ m/s}$, o de alrededor de 440 mi/h. El impacto de un proyectil, incluso de las gotas de lluvia, a esta velocidad sería mortal; puesto que las gotas de lluvia se mueven a velocidades mucho más bajas, es obvio que hemos cometido un error en algún paso de nuestro cálculo.

El error acontece si no tomamos en cuenta el efecto que ejerce la fuerza de fricción del aire en las gotas de lluvia al caer. Esta fuerza de fricción es un ejemplo de la fuerza de arrastre que experimenta todo objeto que se mueve en un medio fluido. Las fuerzas de arrastre tienen efectos importantes en una gran cantidad de objetos, como las pelotas de béisbol, que se desvían en forma considerable de la trayectoria ideal de libre arrastre, o los esquiadores al descender por una ladera, quienes tratan de dar al cuerpo una posición aerodinámica con el fin de reducir la fuerza de arrastre. Estas fuerzas deben tomarse en cuenta en el diseño de aeronaves y embarcaciones. Desde el punto de vista de los cuerpos en caída, desde las gotas de lluvia hasta los paracaidistas las fuerzas de arrastre impiden que la velocidad crezca sin límite e imponen una velocidad máxima o *terminal* que puede ser alcanzada por un cuerpo al caer.

Una característica peculiar de las fuerzas de arrastre es que dependen de la velocidad: cuanto más aprisa se mueva el objeto, mayor será la fuerza de arrastre. Por lo tanto,

debemos usar métodos de cálculo con integrales para analizar la cinemática.

Cuando la fuerza, y por lo tanto la aceleración, es una función de la velocidad, los métodos de la sección 6-5 para las fuerzas dependientes del tiempo deben modificarse un tanto. Comenzamos, como lo hicimos en la ecuación 16, con $a = dv/dt$, pero ahora a es una función de la velocidad, $a(v)$:

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{a(v)} = dt.$$

Esto puede ahora ser integrado directamente:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt = t. \quad (18)$$

El lado izquierdo de la ecuación 18 da alguna función de v , por lo que la ecuación 18 es en efecto t en función de v , o $t(v)$, en lugar de $v(t)$. A menudo nos es posible "invertir" este resultado para hallar $v(t)$, la cual es generalmente más útil en los cálculos.

Problema muestra 5 Supongamos que un objeto de masa m que cae en el aire experimenta una fuerza de arrastre D que aumenta *linealmente* con la velocidad,

$$D = bv,$$

y que actúa siempre en dirección opuesta a la velocidad. La constante b depende de las propiedades del objeto (su tamaño y forma, por ejemplo) y de las propiedades del fluido (especialmente de su densidad). Halle la velocidad en función del tiempo, $v(t)$, para un objeto de masa m que se deja caer desde el reposo.

Solución La figura 13 muestra el diagrama de cuerpo libre, el cual cambia con el tiempo porque D varía con v . Cuando el objeto se deja caer, D es cero (porque v es cero), y D aumenta con v . En cierto punto del movimiento $D = mg$ y el objeto no tiene una fuerza neta que actúe sobre él y, por lo tanto, no tiene aceleración, como en la figura 13c. A partir de este punto la velocidad permanece constante. Nuestra solución matemática mostraría esta propiedad.

La segunda ley de Newton para este problema es

$$\sum F = D + mg = ma.$$

Elegimos el eje y y hacia abajo, de modo que la componente vertical sea

$$\sum F_y = mg - bv = ma,$$

o bien

$$a = g - \frac{b}{m}v.$$

De esta expresión podemos ver que cuando v aumenta, finalmente llegamos a alcanzar un punto donde el lado derecho se convierte en cero, cuando $bv/m = g$. En este punto $a = 0$, y

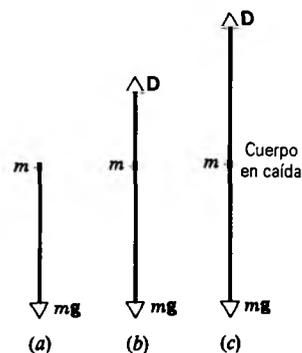


Figura 13 Fuerzas que actúan sobre un cuerpo que cae en el aire. (a) En el instante que se deja caer, $v = 0$ y no existe fuerza de arrastre. (b) La fuerza de arrastre aumenta a medida que el cuerpo gana velocidad. (c) Finalmente la fuerza de arrastre se iguala al peso; durante cualquier tiempo posterior permanece igual al peso y el cuerpo cae a su velocidad terminal constante.

permanece cero durante el resto del movimiento, de modo que la velocidad permanece constante desde ese punto en adelante. Ésta es la velocidad terminal, $v_T = mg/b$.

Para hallar $v(t)$, usamos la ecuación 18 con $v_0 = 0$:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - (b/m)v} = t.$$

La integral puede ser escrita así:

$$-\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv}$$

que es de la forma $\int du/u = \ln u$, donde $u = mg - bv$. Así,

$$\begin{aligned} -\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv} &= -\frac{m}{b} \ln (mg - bv) \Big|_0^v \\ &= -\frac{m}{b} \ln (mg - bv) + \frac{m}{b} \ln (mg) \\ &= -\frac{m}{b} \ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) = t. \end{aligned}$$

Esta expresión es una razón perfectamente aceptable entre v y t , pero es un tanto más fácil de usar e interpretar si la invertimos para hallar $v(t)$:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) &= -\frac{bt}{m} \\ \frac{mg - bv}{mg} &= e^{-bt/m}, \end{aligned}$$

y finalmente, resolviendo para v ,

$$v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}). \quad (19)$$

Cuando t es pequeña (cerca del comienzo de la caída del proyectil), podemos aproximar la exponencial mediante $e^x \approx 1 + x$ para una x pequeña ($x \ll 1$). Entonces

$$v(t) \approx \frac{mg}{b} \left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m} \right) \right] = gt \quad (\text{pequeño } t).$$

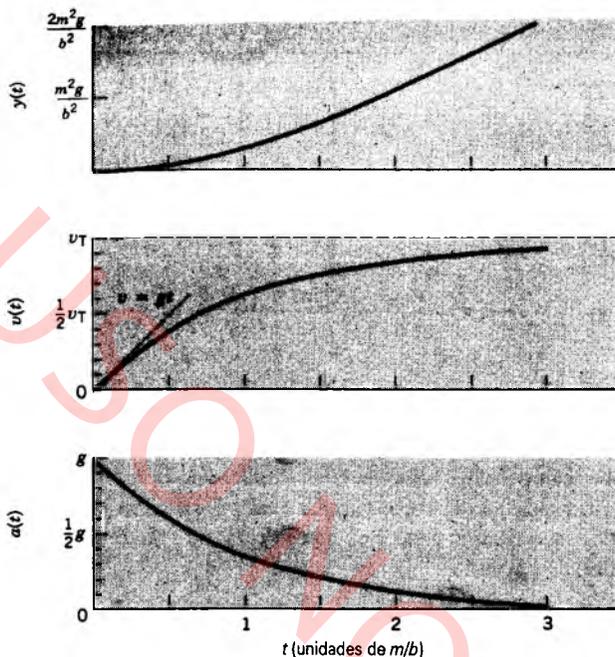


Figura 14 Problema muestra 5. La posición, la velocidad y la aceleración de un cuerpo en caída libre sujeto a una fuerza de arrastre. Nótese que la aceleración comienza en g y llega a ser cero; la velocidad comienza en cero y se aproxima a v_T .

Al principio del movimiento, antes de que la fuerza de arrastre haya aumentado significativamente, el objeto está muy cercano a una caída libre con una aceleración g .

Para un t grande, la exponencial tiende a cero ($e^{-x} \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$). La velocidad tiende entonces a la velocidad terminal v_T :

$$v_T = \frac{mg}{b} \quad (20)$$

Una vez que tenemos ya una expresión general para $v(t)$, podemos diferenciarla para hallar $a(t)$ y también integrarla para hallar $y(t)$. Se deja al estudiante hacer estos cálculos como ejercicio y comprobar los resultados para un t pequeño y un t grande (véase el problema 66). La figura 14 ilustra la dependencia del tiempo de a , v , y y .

Este ejemplo muestra una manera de analizar la fuerza de arrastre. Otro enfoque supone que D es proporcional a v^2 en lugar de v . Se usan métodos similares para hallar las soluciones en ese caso, pero las matemáticas son algo más complicadas. En ese caso se obtiene también una velocidad terminal, aunque su expresión matemática es diferente de la derivada aquí.

A tabla 2 muestra valores típicos medidos de la velocidad terminal de diferentes objetos en el aire.

Movimiento de un proyectil contra la resistencia del aire (Opcional)

Los cálculos con arrastre son también importantes en el movimiento bidimensional de los proyectiles. Una bola de béisbol, por ejemplo, deja el bate a una velocidad del orden de 100 mi/h

TABLA 2 ALGUNAS VELOCIDADES TERMINALES EN EL AIRE

Objeto	Velocidad terminal (m/s)	95% de la distancia [†] (m)
Obús de 16 lb	145	2500
Paracaidista en caída libre (típico)	60	430
Bola de béisbol	42	210
Pelota de tenis	31	115
Pelota de baloncesto	20	47
Pelota de ping-pong	9	10
Gota de lluvia (radio = 1.5 mm)	7	6
Paracaidista (típico)	5	3

[†] Ésta es la distancia a la que debe caer el cuerpo desde el reposo hasta llegar al 95% de su velocidad terminal.

Fuente: Adaptada de *Sport Science*, por Peter J. Brancazio, Simon & Schuster Inc., Nueva York, © 1984.

ó 45 m/s. Ésta es realmente más grande que su velocidad terminal en el aire cuando se la deja caer desde el reposo (tabla 2). La fuerza de arrastre $D = bv$ puede calcularse de nuestra solución al problema muestra 5. De la ecuación 20 se desprende que la constante b es el peso mg de la bola de béisbol (alrededor de 1.4 N, correspondiente a una masa de 0.14 kg) dividida entre su velocidad terminal, 42 m/s. Entonces $b = 0.033$ N/(m/s). Si la bola viaja a razón de 45 m/s, experimenta una fuerza de arrastre bv de 1.5 N aproximadamente, que es mayor que su peso y, por lo tanto, tiene un efecto sustancial en su movimiento.

La figura 15 muestra el diagrama de cuerpo libre en un punto particular de la trayectoria de la bola de béisbol. Como todas las fuerzas de fricción, D está en dirección opuesta a v , y suponemos que no está soplando el viento. Si tomamos que $D = -bv$, podemos usar las leyes de Newton para hallar una solución analítica para la trayectoria, un ejemplo de lo cual se ilustra en la figura 16. Cuando la resistencia del aire es tenida en cuenta, el alcance se reduce de 179 m a 72 m y la altura máxima de 78 m a 48 m. Nótese también que la trayectoria ya no es simétrica respecto al máximo; el movimiendo descendente es mucho más empinado que el movimiento ascendente. Para $\phi_0 = 60^\circ$, el

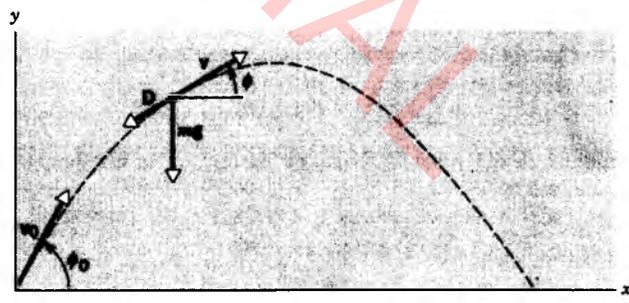


Figura 15 Un proyectil en movimiento. El proyectil es lanzado a una velocidad v_0 y un ángulo ϕ_0 con la horizontal. Cierta tiempo más tarde su velocidad es v con el ángulo ϕ . Se muestran el peso y la fuerza de arrastre (que siempre apunta en dirección opuesta a v) para ese momento.

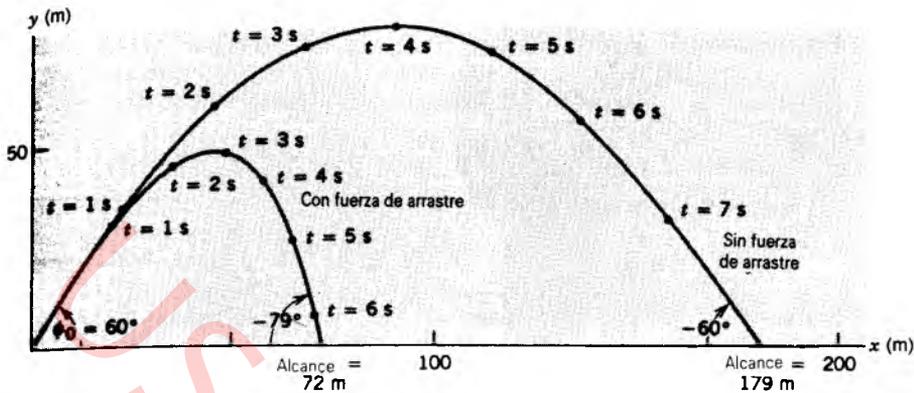


Figura 16 Movimiento de proyectiles con y sin fuerza de arrastre, calculado para $v_0 = 45$ m/s y $\phi_0 = 60^\circ$.

proyectil choca contra el suelo con un ángulo de -79° , mientras que en ausencia del arrastre chocaría con el terreno con un ángulo igual a $-\phi_0$.

La fuerza de arrastre depende de la velocidad del proyectil en aire en calma. Si sopla el viento, el cálculo debe cambiarse en consonancia, y el resultado será diferente.

Para otras elecciones (más realistas) de la fuerza de arrastre D , el cálculo debe hacerse numéricamente.* ■

6-8 MARCOS NO INERCIALES Y SEUDOFUERZAS (Opcional)

Hasta ahora hemos supuesto, en nuestro tratamiento de la mecánica clásica, que las mediciones y las observaciones se realizaron desde un marco de referencia inercial. Éste es uno del conjunto de marcos de referencia definidos por la primera ley de Newton, es decir, ese conjunto de marcos en que un cuerpo no está acelerado ($\mathbf{a} = 0$) si no existen cuerpos identificables en su entorno que produzcan la fuerza ($\Sigma \mathbf{F} = 0$). La elección de un marco de referencia la hacemos siempre nosotros, de modo que si elegimos marcos inerciales solamente, no restringimos en modo alguno nuestra posibilidad de aplicar la mecánica clásica a los fenómenos naturales.

Sin embargo, podemos, si lo hallamos conveniente, aplicar la mecánica clásica desde el punto de vista de un observador en un *marco no inercial*, esto es, un marco unido a un cuerpo que está acelerando tal como se ve desde un marco inercial. Los marcos definidos por un automóvil acelerando o un tiovivo de feria que gira son ejemplos de marcos no inerciales.

Para aplicar la mecánica clásica a marcos no inerciales debemos introducir fuerzas adicionales, conocidas como *seudofuerzas* (a veces llamadas fuerzas inerciales). Al contrario de las fuerzas que hemos examinado hasta ahora, no podemos asociar a las seudofuerzas con ningún objeto particular en el entorno

del cuerpo sobre el cual actúen, y no podemos clasificarlas en ninguna de las categorías listadas en la sección 6-1. Más aún, si vemos al cuerpo desde un marco inercial, las seudofuerzas desaparecen. Las seudofuerzas son simplemente recursos que nos permiten aplicar la mecánica clásica de la manera normal a acontecimientos, si insistimos en ver estos acontecimientos desde un marco de referencia no inercial.

Como ejemplo, consideremos a un observador S' que viaja en una vagoneta que se mueve a velocidad constante. La vagoneta contiene una pista aérea larga con un planeador de 0.25 kg carente de fricción que descansa en un extremo (Fig. 17a). El conductor de la vagoneta aplica los frenos, y la vagoneta comienza a decelerar. Un observador S en tierra mide la aceleración constante de la vagoneta en -2.8 m/s². El observador S' que viaja en la vagoneta está, por lo tanto, en un marco de referencia no inercial cuando la vagoneta comienza a decelerar. S' observa que el planeador se mueve por la pista a una aceleración de $+2.8$ m/s². ¿Cómo podría cada observador usar la segunda ley de Newton para apreciar el movimiento del planeador?

Para el observador S en tierra, el cual está en un marco de referencia inercial, el análisis es sencillo. El planeador, que se ha estado moviendo hacia adelante a velocidad constante antes de que la vagoneta comenzara a frenar, simplemente continúa haciéndolo. De acuerdo con S , el planeador no tiene aceleración y, por lo tanto, no necesita ninguna fuerza horizontal que actúe sobre él.

Sin embargo, el observador S' ve que el planeador acelera y no puede hallar un objeto del entorno del planeador que ejerza una fuerza sobre él y le proporcione la aceleración hacia el frente observada. Para preservar la aplicabilidad de la segunda ley de Newton, S' debe suponer que sobre el planeador actúa una seudofuerza. De acuerdo con S' , esta fuerza F' debe ser igual a ma' , donde $\mathbf{a}' (= -\mathbf{a})$ es la aceleración del planeador medida por S' . La magnitud de esta seudofuerza es

$$F' = ma' = (0.25 \text{ kg})(2.8 \text{ m/s}^2) = 0.70 \text{ N},$$

y su dirección es la misma que la de \mathbf{a}' , esto es, hacia el frente de la vagoneta. Esta fuerza, que es muy real desde el punto de vista de S' , no es aparente para el observador S en tierra, quien no necesita introducirla para explicar el movimiento del planeador.

Una indicación de que las seudofuerzas son no newtonianas es que violan la tercera ley de Newton. Para aplicar esta ley, S' debe hallar una fuerza de reacción ejercida *por* el planeador *sobre* algún otro cuerpo. No puede ser hallada tal fuerza de reacción y, por lo tanto, se viola la tercera ley de Newton.

* Se puede hallar más información sobre este cálculo en "Trajectory of a Fly Ball", de Peter J. Brancazio. *The Physics Teacher*, Enero 1985, pág. 20, y en su libro *SportScience* (Simon & Schuster Inc., 1984), que contiene muchas aplicaciones fascinantes de los principios de la física en los deportes. Véase también "Physics and Sports: the Aerodynamics of Projectiles", por Peter Brancazio, en *Fundamentals of Physics*, 3a. ed., por David Halliday y Robert Resnick (Wiley, 1988).

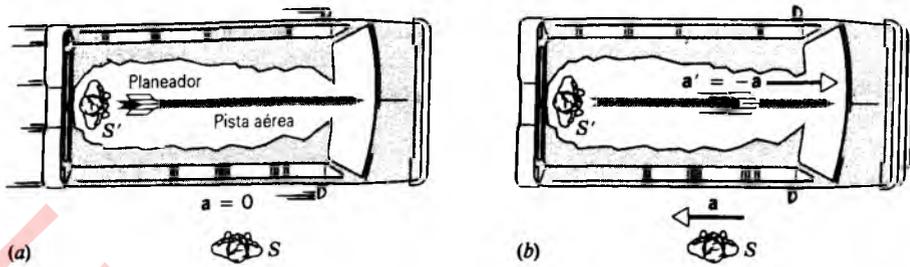


Figura 17 (a) Un observador S en tierra ve al observador S' que viaja en una vagoneta a velocidad constante. Ambos observadores están en marcos de referencia inerciales. (b) La vagoneta frena con aceleración constante a según el observador S . El observador S' , ahora en un marco de referencia no inercial, ve al planeador que se mueve hacia adelante en su pista con aceleración constante $a' = -a$. El observador S' aprecia este movimiento en función de una seudofuerza.

Las seudofuerzas son muy reales para aquellos que las experimentan. Imagínese que usted viaja en un automóvil que avanza por una curva a la izquierda. Para un observador en tierra, el automóvil está experimentando una aceleración centrípeta y, por lo tanto, constituye un marco de referencia no inercial. Si el automóvil tiene asientos de vinilo lisos, usted advertirá que resbala en el asiento hacia la derecha. Para el observador en tierra, que está en un marco inercial, esto es bastante natural: su cuerpo está simplemente tratando de obedecer a la primera ley de Newton y se mueve en línea recta, y es el automóvil el que se desliza hacia la izquierda por debajo de usted. Desde su punto de vista en el marco de referencia no inercial del automóvil, usted debe atribuir su movimiento de deslizamiento a una seudofuerza que jala de usted hacia la derecha. Este tipo de seudofuerza se llama *fuerza centrífuga*, o sea una fuerza dirigida *hacia fuera desde el centro*.

Si usted se sube a un tiiovivo, estará nuevamente en un marco de referencia acelerado y, por lo tanto, no inercial, en el cual los objetos se moverán aparentemente hacia afuera del eje de rotación bajo la influencia de la fuerza centrífuga. Si usted sujeta una pelota en su mano, le parecerá que está en equilibrio, por estar la fuerza centrífuga hacia afuera equilibrada por la fuerza hacia adentro ejercida sobre la pelota por su mano. Para un observador en tierra, el cual está en un marco de referencia inercial, la pelota se está moviendo en un círculo, acelerando hacia el centro bajo la influencia de la fuerza *centrípeta* que usted ejerce sobre ella con su mano. Para el observador en tierra, no existe una fuerza centrífuga porque la pelota no está en equilibrio: está acelerada radialmente hacia adentro.

Las seudofuerzas pueden ser usadas como base de aparatos prácticos. Consideremos la centrifugadora, uno de los instrumentos de laboratorio más útiles. Al moverse rápidamente una mezcla de sustancias en círculo, las sustancias con mayor cantidad de masa experimentan una mayor fuerza centrífuga mv^2/r y se mueven alejándose del eje de rotación. La centrifugadora usa entonces una seudofuerza para separar sustancias por su masa, precisamente como el espectrómetro de masas (secciones 1-5 y 5-4) usa una fuerza electromagnética para separar a los átomos por sus masas.

Otra seudofuerza es la llamada fuerza *Coriolis*. Supongamos que usted hace rodar a una pelota hacia adentro a velocidad constante siguiendo una línea radial pintada en el piso de un tiiovivo que está girando. En el instante en que usted la suelta en el radio r , tiene precisamente la velocidad tangencial correcta (la misma que la de usted) del movimiento circular. A medida

que se mueve hacia adentro tomará una velocidad tangencial más pequeña que mantenga su movimiento circular en la misma cantidad que su entorno inmediato. A causa de que no hay manera de que pierda su velocidad tangencial (suponemos poca fricción entre la pelota y el piso), se mueve un poco hacia adelante de la línea pintada que representa una velocidad rotacional uniforme. Esto es, en su marco de referencia no inercial en giro usted sugeriría que hay una seudofuerza lateral (una fuerza Coriolis) que hace que la pelota se desvíe poco a poco de la línea cuando rueda hacia adentro. Para un observador en tierra, en un marco inercial, no existe fuerza Coriolis alguna: la pelota se mueve en línea recta a una velocidad que es determinada por las componentes de su velocidad en el instante en que la soltó.

Quizá el ejemplo más conocido de los efectos de la fuerza Coriolis está en el movimiento de la atmósfera alrededor de centros de baja o de alta presión. La figura 18 muestra un diagrama de un centro de baja presión en el hemisferio norte. A causa de que la presión es más baja que la del entorno, el aire fluye radialmente hacia adentro en todas las direcciones. Al girar la Tierra (formando un marco no inercial), el efecto es similar al de la pelota en el tiiovivo: el aire que viene desde el sur se mueve un tanto adelante de una línea imaginaria trazada sobre la Tierra que está girando, mientras que el aire del norte (como una pelota que rodara hacia afuera en el tiiovivo) se atrasa un tanto con respecto a la misma línea. El efecto total es que el aire gira en dirección *contraria* a las manecillas del reloj alrededor del centro de baja presión. Este efecto Coriolis es, pues, el causante de la circulación de los vientos en un ciclón o en un huracán. En el hemisferio sur los efectos se invierten.

En el movimiento de obuses de artillería de largo alcance es necesario hacer correcciones por el efecto Coriolis de la rotación de la Tierra. Para un obús típico de 10 km de alcance, el efecto Coriolis puede causar una desviación de hasta 20 m. Tales correcciones se introducen en los programas de computación usados para controlar la puntería y el disparo de armas de largo alcance. Sin embargo, las cosas pueden fallar, según lo descubrió la Marina británica en una batalla de la Primera Guerra Mundial cerca de las islas Malvinas o Falkland. Sus manuales para el control del disparo fueron escritos para el hemisferio norte, y las islas Falkland están en el hemisferio sur, donde la corrección Coriolis debe hacerse en dirección opuesta. Los obuses británicos aterrizaron a unos 100 m de sus blancos, ¡porque la corrección por el efecto Coriolis se había hecho en la dirección contraria!

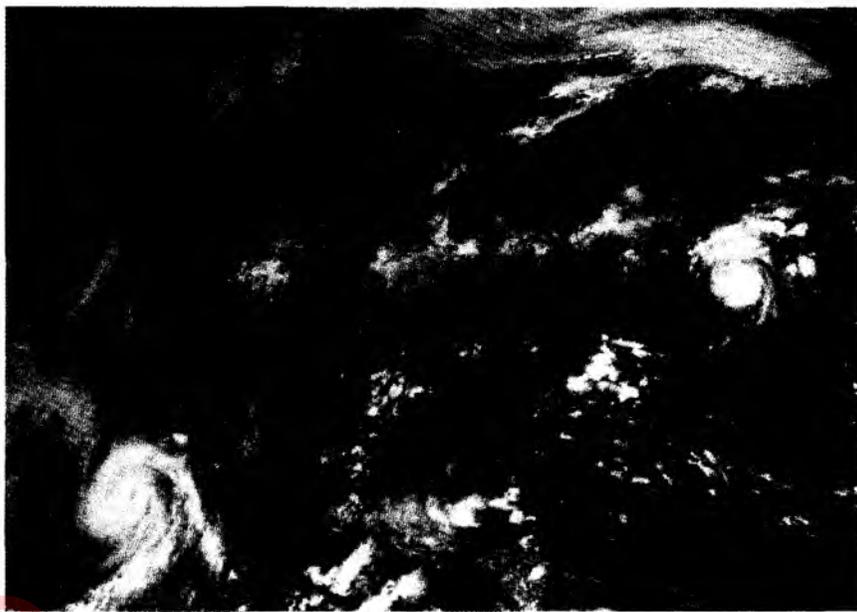
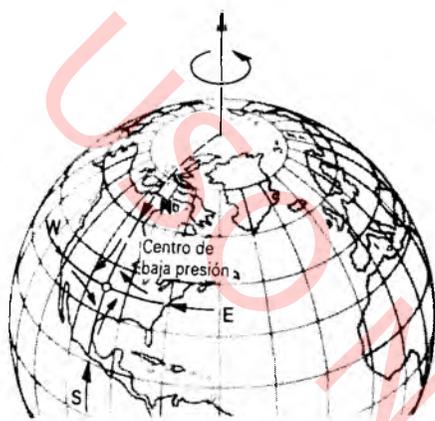


Figura 18 Un centro de baja presión en la Tierra en rotación. Cuando el aire fluye hacia adentro, los observadores no inerciales situados en el hemisferio norte apreciarían un giro en sentido contrario a las manecillas del reloj. Un huracán (en la foto) es un centro de baja presión con tales características.

Así pues, en problemas mecánicos tenemos dos disyuntivas: (1) escoger un marco de referencia *inercial* y considerar fuerzas “reales” solamente, esto es, fuerzas que puedan ser asociadas con cuerpos definidos del entorno, o (2) escoger un marco de referencia *no inercial* y considerar no sólo las fuerzas “reales” sino también las seudofuerzas definidas apropiadamente. Aunque por lo general elegimos la primera alternativa, a veces elegimos la segunda; ambas son completamente equivalentes y la elección es sólo un asunto de conveniencia. ■

6-9 LIMITACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON (Opcional)

En los primeros seis capítulos hemos descrito un sistema para analizar el comportamiento mecánico con una gama de aplicaciones aparentemente vasta. Con poco más que las ecuaciones de las leyes de Newton podemos diseñar grandes rascacielos y puentes colgantes, o incluso planear la trayectoria de un vehículo espacial interplanetario (Fig. 19). La mecánica newtoniana, que proporcionó estas herramientas de cálculo, constituyó el primer desarrollo verdaderamente revolucionario de la física teórica.

He aquí un ejemplo de nuestra fe en las leyes de Newton. A menudo se observa que las galaxias y los agrupamientos de galaxias giran, y a partir de la observación podemos deducir la velocidad de la rotación. A partir de ello podemos calcular la cantidad de materia que debe estar presente en la galaxia o en el cúmulo de galaxias para que la gravedad proporcione la fuerza centrípeta que corresponde a la rotación observada. Empero, la cantidad de materia que observamos realmente con los telescopios es mucho menor de lo que sería de esperarse. Por lo tanto, ha sido propuesta la existencia de una “materia oscura” adicional que no puede ser vista con los telescopios pero

que debe estar presente para proporcionar la fuerza de gravitación necesaria. Hasta ahora, no existe un candidato convincente para el tipo o naturaleza de esta materia oscura y, por lo tanto, han sido propuestas otras explicaciones para la aparente inconsistencia entre la cantidad de materia realmente observada en las galaxias y la cantidad que pensamos se necesita para satisfacer las leyes de Newton. Una explicación propuesta es que nuestros cálculos son incorrectos porque las leyes de Newton no son válidas a escala muy grande, esto es, cuando las aceleraciones son muy pequeñas (menos de unas cuantas veces 10^{-10} m/s^2). En particular, se ha propuesto que, para estas aceleraciones muy pequeñas, la fuerza sea proporcional a a^2 en lugar de a .

La figura 20 muestra los resultados de un experimento reportado recientemente y que prueba esta hipótesis. Si la fuerza dependiese de la aceleración con una potencia distinta a 1, los datos no caerían sobre una línea recta. De este experimento extremadamente preciso concluimos que para aceleraciones tan pequeñas como $10 \text{ m/s}^{-10} \text{ m/s}^2$, la fuerza es proporcional a la aceleración y la segunda ley de Newton se cumple.

En nuestro siglo, hemos conocido otros tres desarrollos revolucionarios: la teoría especial de la relatividad de Einstein (1905), su teoría general de la relatividad (1915), y la mecánica cuántica (alrededor de 1925). La relatividad especial nos enseña que no podemos extrapolar el uso de las leyes de Newton a partículas que se mueven a una velocidad comparable a la velocidad de la luz. La teoría general de la relatividad demuestra que no podemos usar las leyes de Newton en la vecindad de una fuerza de gravitación muy fuerte. La mecánica cuántica nos enseña que no podemos extrapolar las leyes de Newton a elementos tan pequeños como los átomos.

La relatividad especial, que implica una visión notoriamente no newtoniana del espacio y el tiempo, puede aplicarse en todas las circunstancias, tanto para altas como para bajas velocidades. En el límite de las velocidades bajas, puede demostrarse que la dinámica de la relatividad especial se reduce directamente a las leyes de Newton. De manera similar, la relatividad general

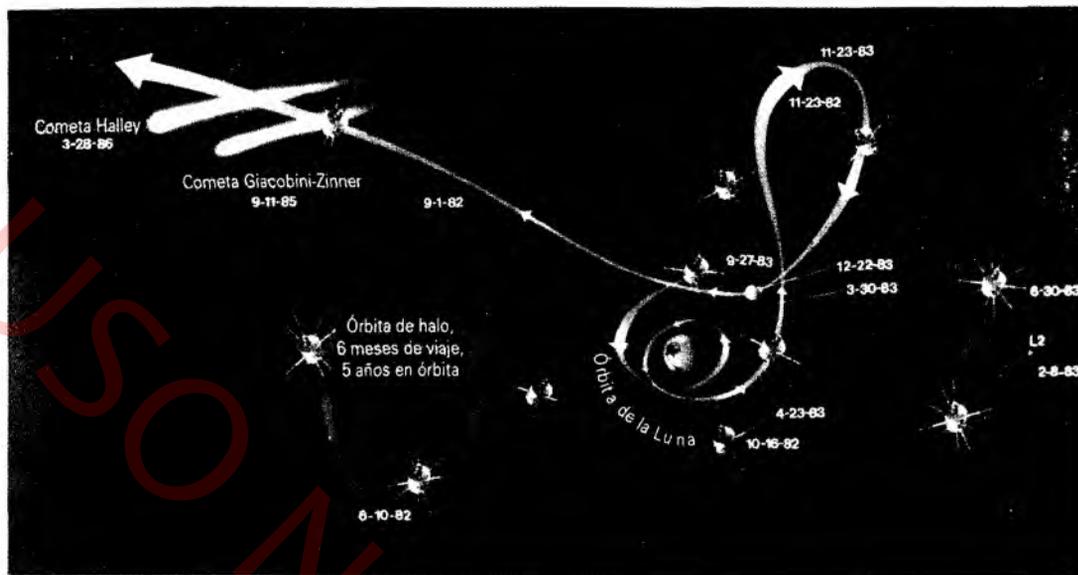


Figura 19 Un triunfo de la mecánica newtoniana. Lanzado en 1978, el vehículo espacial International Planetary Explorer (Explorador planetario internacional) estuvo girando durante 4 años alrededor del punto L_2 , analizando el viento solar. Luego exploró la cauda magnética de la Tierra desde una órbita situada en el lado de la noche; luego encontró la cauda del cometa Giacobini-Zinner en 1985 y pasó por el cometa Halley en 1986. Ahora en crucero interplanetario, retornará a la vecindad de la Tierra en el año 2012. Su viaje ha implicado hasta ahora 37 encendidos de sus motores y 5 vuelos en las cercanías de la Luna.

puede ser aplicada lo mismo a fuerzas de gravitación débiles que fuertes, pero sus ecuaciones se reducen a las leyes de Newton para las fuerzas débiles. La mecánica cuántica puede aplicarse a los átomos individuales, donde se predice un cierto comportamiento al azar, o a objetos ordinarios que contengan un número enorme de átomos, en cuyo caso el azar se promedia para dar nuevamente las leyes de Newton.

En la pasada década ha surgido otro desarrollo aparentemente revolucionario. Este nuevo desarrollo concierne a los sistemas



Figura 20 Resultados de un experimento reciente para probar si la segunda ley de Newton es válida para aceleraciones pequeñas, menores de 10^{-9} m/s^2 . La línea recta demuestra que la aceleración es proporcional a la fuerza aplicada hasta 10^{-10} m/s^2 y, por tanto, la ley de Newton es válida aun para esas pequeñísimas aceleraciones.

mecánicos cuyo comportamiento se describe como *caótico*. Uno de los pilares de las leyes de Newton es su posibilidad de predecir el comportamiento futuro de un sistema, si conocemos las fuerzas que actúan y el movimiento inicial. Por ejemplo, a partir de la posición y la velocidad iniciales de una sonda espacial que experimente fuerzas conocidas de gravitación desde el Sol y los planetas, podemos calcular su trayectoria exacta. Por otra parte, consideremos una ramita flotando en una corriente turbulenta. Aun cuando en todo momento actúan sobre ella fuerzas regidas por la mecánica newtoniana, su trayectoria corriente abajo es totalmente impredecible. Si se sueltan dos ramitas juntas en la corriente, pueden ser encontradas corriente abajo muy apartadas entre sí. Un tema particular de la dinámica caótica es que pequeños cambios en las condiciones iniciales de un problema pueden amplificarse extraordinariamente y causar diferencias sustanciales en las predicciones. La dinámica caótica es a menudo invocada en la predicción del tiempo, y se ha llegado a decir que el revoloteo de una mariposa en Japón puede estar relacionado con el desarrollo posterior de un huracán sobre el Golfo de México.

Tales movimientos caóticos ocurren no sólo en sistemas complejos como la corriente turbulenta sino también en sistemas físicos sencillos, como un péndulo, la llave o grifo del agua que gotea lentamente, o un circuito eléctrico oscilante. En la década de 1960 se descubrió que el comportamiento aparentemente caótico de estos sistemas encierra un orden y regularidad ocultos, cuyo estudio ha constituido el núcleo de una nueva rama de la ciencia, el *chaos*.* Se han hallado aplicaciones de las

* Véase *Chaos—Making a New Science*, por James Gleick (Penguin Books, 1987).

leyes del caos no sólo en sistemas físicos sino también en sistemas biológicos. Aun áreas de la ciencia social, tales como la economía y la dinámica de la población, muestran un comportamiento caótico.

Los cálculos que combinan la mecánica newtoniana de las partículas con la teoría del caos han demostrado que la órbita del planeta Plutón es caótica en una escala de tiempo de decenas de millones de años (un tiempo corto comparado con la edad del sistema solar, de alrededor de 4500 millones de años, pero un tiempo largo comparado con el periodo orbital de Plutón alrededor del Sol, de alrededor de 250 años). La teoría del caos ha sido también empleada para explicar dos propiedades del cinturón de asteroides (situado entre las órbitas de Marte y de

Júpiter) que no podrían ser explicadas dentro del marco de la mecánica newtoniana convencional: (1) muchos asteroides se desvían de lo que deberían ser órbitas estables, algunos de ellos se vuelven meteoritos que llueven continuamente sobre la Tierra, y (2) dentro del cinturón de asteroides hay varios huecos vacíos donde el número de asteroides en órbita es pequeño o cero. Hace apenas una década que las computadoras de alta velocidad han permitido el seguimiento mediante cálculos detallados de la dinámica de tales sistemas, debido a las escalas de tiempo necesarias para observar este comportamiento inusual, y conforme se van haciendo cálculos adicionales continúan descubriéndose nuevas aplicaciones de este emocionante campo. ■

PREGUNTAS

1. Existe un límite más allá del cual, al seguir puliendo una superficie, *umenta* la resistencia por fricción en lugar de disminuir. Explique por qué.
2. Una caja, con un peso mayor que usted, descansa sobre un suelo rugoso. El coeficiente de fricción estática entre la caja y el suelo es el mismo que entre las suelas de sus zapatos y el suelo. ¿Puede usted empujar la caja a través del suelo? Véase la figura 21.

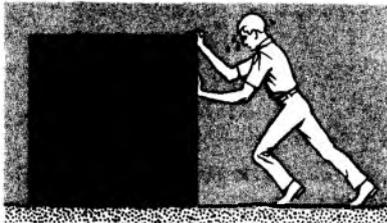


Figura 21 Pregunta 2.

3. En el béisbol, un corredor puede por lo general llegar a una base más rápidamente corriendo que deslizándose. Explique por qué esto es así. ¿Por qué se deslizan, entonces?
4. ¿Cómo podría llegar una persona, que está en reposo sobre el hielo que cubre un estanque, completamente sin fricción, llegar a la orilla? ¿Podría hacerlo caminando, rodando, balanceando sus brazos, o pateando? ¿Cómo podría colocarse una persona, en tal posición?
5. ¿Por qué las llantas de un automóvil se "agarran" a la carretera mejor sobre un terreno a nivel que cuando se sube o se baja una pendiente?
6. ¿Cuál es el propósito de las superficies curvas (llamadas spoilers), que se colocan en la parte trasera de los automóviles deportivos? Están diseñadas para que el flujo del aire, al pasar por ellas, ejerza una fuerza hacia abajo.

7. Dos superficies están en contacto, pero en reposo una respecto a la otra. Sin embargo, cada una ejerce una fuerza de fricción sobre la otra. Explíquelo.
8. Su automóvil patina en una carretera helada, cruzando la línea central. ¿Debería usted girar las ruedas frontales en dirección del resbalón o en la dirección opuesta (a) cuando quiere evitar un choque con otro automóvil que avanza en sentido opuesto y (b) cuando ningún otro automóvil está cerca pero usted quiere recuperar el control del volante? Suponga primero el impulso en las ruedas traseras y después en las delanteras.
9. ¿Por qué los corredores de autos aumentan su velocidad al dar una curva?
10. Está usted piloteando un aeroplano a una altitud constante cuando desea hacer un giro de 90° . ¿Por qué se ladea para ello?
11. Cuando un perro mojado se sacude, salpica y moja a quien está cerca de él. ¿Por qué salpica el agua en esa dirección?
12. Habrá usted notado (Einstein así lo hizo) que cuando usted revuelve el té dentro de la taza, las hojas de té que flotan se acumulan en el centro de la taza en lugar de hacerlo en el borde exterior. ¿Puede usted explicar por qué? (Einstein pudo.)
13. Supongamos que usted necesita medir si la cubierta de una mesa en un tren es realmente horizontal. Si emplea un nivel de burbuja, ¿puede usted comprobarlo cuando el tren sube o baja una pendiente? ¿Cuando el tren recorre una curva? (Sugerencia: Existen dos componentes horizontales.)
14. En el péndulo cónico, ¿qué le pasa al periodo y a la velocidad cuando $\theta = 90^\circ$? ¿Por qué no puede alcanzarse este ángulo físicamente? Explique el caso para $\theta = 0^\circ$.
15. Se coloca una moneda sobre la tornamesa de un tocadiscos. El motor se pone en marcha pero, antes de que se alcance la velocidad de rotación final, la moneda sale despedida. Explique por qué.
16. Un auto está marchando sobre un camino rural que se parece a una montaña rusa. Si el auto viaja a velocidad

- uniforme, compare la fuerza que ejerce sobre una sección horizontal del camino con la fuerza que ejerce sobre el camino en la cima de una colina y en la parte baja de la colina. Explique.
17. Usted conduce una vagoneta a velocidad uniforme a lo largo de una carretera recta. Un balón de playa descansa en el centro de la plataforma de la vagoneta y un globo lleno de helio flota sobre él, tocando el techo de la vagoneta. ¿Qué le sucede a cada uno si usted (a) toma una curva a velocidad constante o (b) acciona los frenos?
 18. Explique cómo debe hacerse la elección del ángulo de tiro de un proyectil en función de la resistencia del aire para obtener el máximo alcance.
 19. ¿Qué gotas de lluvia caen más aprisa: las pequeñas o las grandes?
 20. La velocidad terminal de una bola de béisbol es de 95 mi/h. Sin embargo, las mediciones de la velocidad de las bolas lanzadas suelen superar esa velocidad, llegando a ser de más de 100 mi/h. ¿Cómo puede ser esto?
 21. Describa el movimiento de un objeto disparado verticalmente hacia abajo a una velocidad inicial mayor que su velocidad terminal.
 22. Un leño está flotando corriente abajo. ¿Cómo podría usted calcular la fuerza de arrastre que actúa sobre él?
 23. Usted deja caer dos objetos de masas diferentes simultáneamente desde lo alto de una torre. Demuestre que, si usted supone que la resistencia del aire tiene el mismo valor constante para cada objeto, el que tiene una masa más grande llegará al suelo primero. ¿Qué tan buena es esta hipótesis?
 24. ¿Por qué en la tabla 2 se lee “95% de la distancia” y no “100% de la distancia”?
 25. ¿Cómo afecta la rotación de la Tierra al peso aparente de un objeto en el ecuador?
 26. Explique por qué una plomada no cuelga exactamente en dirección de la atracción gravitatoria de la Tierra en la mayoría de las latitudes.
 27. Los astronautas que se hallan en un taxi espacial en órbita quieren llevar un registro diario de su peso. ¿Puede usted imaginar cómo podrían hacerlo, considerando que “no tienen peso”?
 28. Explique por qué la pregunta “¿Cuál es la velocidad lineal de un punto en el ecuador?” requiere hacerse teniendo en cuenta el marco de referencia empleado. Demuestre cómo cambia la respuesta si los marcos de referencia cambian también.
 29. ¿Cuál es la diferencia entre los marcos de referencia inerciales y los que difieren solamente por una traslación o una rotación de los ejes?
 30. Un pasajero situado en el asiento frontal de un automóvil se da cuenta de que se desliza hacia la puerta cuando el conductor toma súbitamente una curva hacia la izquierda. Describa las fuerzas sobre el pasajero y sobre el automóvil en ese instante si el movimiento es visto desde un marco de referencia (a) fijo en la Tierra y (b) fijo en el automóvil.
 31. ¿Tiene usted que preocuparse del efecto Coriolis cuando juega tenis o golf? Si no, ¿por qué?
 32. Supongamos que usted está parado en el balcón de una torre alta, mirando hacia el este. Deja caer un objeto de modo que llegue al suelo; véase la figura 22. Supongamos también que usted puede localizar el punto de impacto con mucha precisión. ¿Golpeará el objeto al suelo en a , verticalmente abajo del punto en que lo soltó, en b hacia el este, o en c hacia el oeste? El objeto se dejó caer desde el reposo; la Tierra gira de oeste a este.

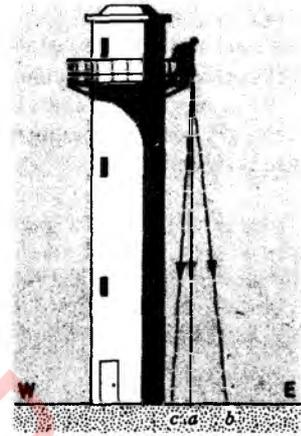


Figura 22 Pregunta 32.

33. Demuestre con un argumento cualitativo que, a causa de la rotación de la Tierra, un viento en el hemisferio norte que sopla de norte a sur se desviará hacia la derecha. Qué pasa con un viento que esté soplando de sur a norte? ¿Cuál es la situación en el hemisferio sur?

PROBLEMAS

Sección 6-2 Fuerzas de fricción

1. El coeficiente de fricción estática entre el teflón y los huevos revueltos es de alrededor de 0.04. ¿Cuál es el ángulo más pequeño desde la horizontal que provocará que los huevos resbalen en el fondo de una sartén recubierta con teflón?
2. Suponga que sólo las ruedas traseras de un automóvil pueden acelerarlo, y que la mitad del peso total del automóvil lo soportan esas ruedas. (a) ¿Cuál es la aceleración máxima posible si el coeficiente de fricción estática entre las llantas y la carretera es μ_s ? (b) Tome $\mu_s = 0.56$ y obtenga un valor numérico para esta aceleración.

- ¿Cuál es la mayor aceleración a la que puede llegar un corredor si el coeficiente de fricción estática entre los zapatos y el camino es de 0.95?
- Un jugador de béisbol (Fig. 23) con una masa de 79 kg, que se desliza hacia una base, es retenido por una fuerza de fricción de 470 N. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el jugador y el terreno?



Figura 23 Problema 4.

- Se usa una barra horizontal para sostener un objeto de 75 kg entre dos muros, como se muestra en la figura 24. Las fuerzas iguales F ejercidas por la barra contra los muros pueden cambiarse ajustando la longitud de la barra. Al sistema lo sostiene solamente la fricción entre los extremos de la barra y los muros. El coeficiente de fricción estática entre la barra y los muros es de 0.41. Halle el valor mínimo de las fuerzas F para obtener el equilibrio.

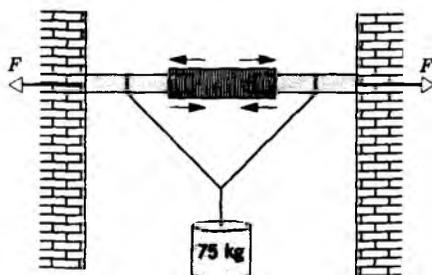


Figura 24 Problema 5.

- Un baúl de 53 lb (= 240 N) descansa sobre el suelo. El coeficiente de fricción estática entre el baúl y el suelo es

de 0.41, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.32. (a) ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima con la que una persona debe empujar al baúl para que comience a moverse? (b) Una vez que se está moviendo, ¿qué fuerza horizontal debe aplicar la persona para que el baúl siga moviéndose a velocidad constante? (c) Si, en su lugar, la persona continuara empujando con la fuerza empleada para iniciar el movimiento, ¿cuál sería la aceleración del baúl?

- El coeficiente de fricción estática entre las llantas de un automóvil y una carretera seca es de 0.62. La masa del automóvil es de 1500 kg. ¿Cuál es la fuerza de frenado máxima obtenible (a) sobre una carretera a nivel y (b) sobre una bajada de 8.6° ?
- Una casa está construida en la cima de una colina que tiene un talud de 42° . Un desplome posterior del material de la superficie del talud indica que su gradiente debería ser reducido. Si el coeficiente de fricción de suelo contra suelo es de 0.55, ¿en qué ángulo ϕ adicional (véase la Fig. 25) debería ser corregida la superficie del talud?

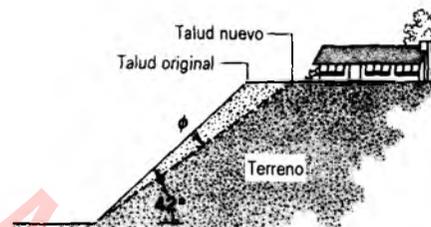


Figura 25 Problema 8.

- Una fuerza horizontal F de 12 lb empuja a un bloque que pesa 5.0 lb contra una pared vertical (Fig. 26). El coeficiente de fricción estática entre la pared y el bloque es de 0.60 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.40. Suponga que el bloque no se está moviendo inicialmente. (a) ¿Comenzará a moverse el bloque? (b) ¿Cuál es la fuerza ejercida sobre el bloque por la pared?

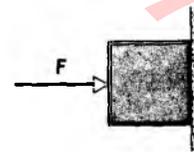


Figura 26 Problema 9.

- Una caja de 136 kg está en reposo sobre el suelo. Un hombre intenta empujarla por el suelo aplicando una fuerza de 412 N horizontalmente. (a) Tome el coeficiente de fricción estática entre la caja y el piso como de 0.37 y demuestre que la caja no se mueve. (b) Un segundo hombre ayuda a jalar de la caja. ¿Cuál es la fuerza vertical mínima que deberá aplicar para que la caja pueda moverse? (c) Si el segundo

hombre aplica una fuerza horizontal en lugar de vertical, ¿qué fuerza mínima, adicional a la fuerza de 412 N del primer hombre, deberá ejercer para hacer que se mueva la caja?

11. Un bloque de 7.96 kg descansa sobre un plano inclinado a 22° respecto a la horizontal, como lo muestra la figura 27. El coeficiente de fricción estática es de 0.25, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.15. (a) ¿Cuál es la fuerza F mínima, paralela al plano, que impedirá que el bloque se deslice por el plano hacia abajo? (b) ¿Cuál es la fuerza F necesaria para mover al bloque hacia arriba a velocidad constante?

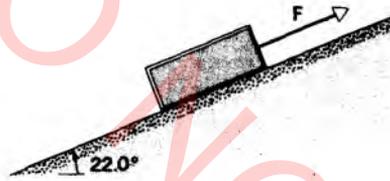


Figura 27 Problema 11.

12. Un estudiante desea determinar los coeficientes de fricción estática y cinética entre una caja y un tablón. Coloca la caja sobre el tablón y gradualmente eleva un extremo del tablón. Cuando el ángulo de inclinación respecto a la horizontal alcanza 28.0° , la caja comienza a deslizarse y desciende 2.53 m por el tablón en 3.92 s. Halle los coeficientes de fricción.
13. Una persona desea apilar arena sobre un área circular en su patio. El radio del círculo es R . No debe apilarse arena en la parte de alrededor del círculo; véase la figura 28. Demuestre que el mayor volumen de arena que puede ser apilado de esta manera es $\pi\mu_s R^3/3$, donde μ_s es el coeficiente de fricción estática de arena contra arena. (El volumen de un cono es $Ah/3$, donde A es el área de la base y h es la altura.)

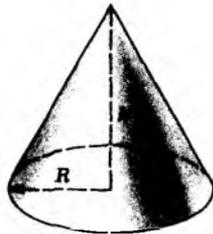


Figura 28 Problema 13.

14. El calor de fricción generado por el esquí al moverse es el principal factor que promueve el deslizamiento al esquiar. El esquí se pega en el arranque, pero una vez en movimiento fundirá la nieve bajo él. El hecho de encerar el esquí lo hace repelente al agua y reduce la fricción con la película de agua. Una revista reporta que un nuevo tipo de esquí de plástico es aun más repelente al agua y que, en

una pendiente suave de 230 m en los Alpes, un esquiador redujo su tiempo de 61 a 42 s con los nuevos esquís. Suponiendo una pendiente de 3.0° , calcule el coeficiente de fricción cinética para cada caso.

15. Un bloque se desliza por un plano inclinado con un ángulo de pendiente θ a velocidad constante. Luego es lanzado hacia arriba por el mismo plano con una velocidad inicial v_0 . (a) ¿A qué distancia subirá por el plano antes de llegar al reposo? (b) ¿Se deslizará de nuevo hacia abajo?
16. Un trozo de hielo se desliza desde el reposo por un plano inclinado rugoso de 33.0° en el doble del tiempo que le toma deslizarse por otro plano igual, pero sin fricción, de la misma longitud. Halle el coeficiente de fricción cinética entre el hielo y el plano inclinado rugoso.
17. En la figura 29, A es un bloque de 4.4 kg y B es un bloque de 2.6 kg. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre A y la mesa son de 0.18 y 0.15. (a) Determine la masa mínima del bloque C que debe colocarse sobre A para evitar que se deslice. (b) El bloque C es levantado súbitamente de A . ¿Cuál es la aceleración del bloque A ?

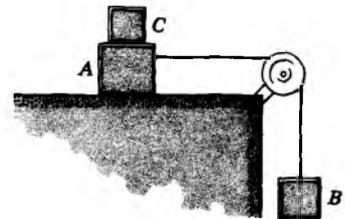


Figura 29 Problema 17.

18. Un bloque de 4.8 kg que está sobre un plano inclinado a 39° recibe la acción de una fuerza horizontal de 46 N (véase la Fig. 30). El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es de 0.33. (a) ¿Cuál es la aceleración del bloque cuando se mueve hacia arriba por el plano? (b) Con la fuerza horizontal aplicada todavía, ¿qué tanto subirá el bloque por el plano si tiene una velocidad inicial hacia arriba de 4.3 m/s? (c) ¿Qué le sucede al bloque después de que ha llegado al punto más alto?

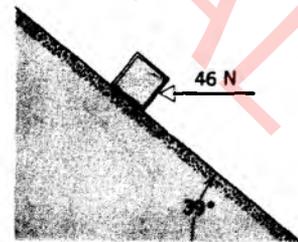


Figura 30 Problema 18.

19. Un bloque de acero de 12 kg está en reposo sobre una mesa horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la mesa es de 0.52. (a) ¿Cuál es la magnitud de

la fuerza horizontal que haría que el bloque empezara a moverse? (b) ¿Cuál es la magnitud de una fuerza que actuase hacia arriba formando 62° con la horizontal que hiciera que el bloque inicie su movimiento? (c) Si la fuerza actúa hacia abajo formando un ángulo de 62° con la horizontal, ¿a qué magnitud puede llegar sin que haga que el bloque se mueva?

20. El mango de un trapeador de masa m forma un ángulo θ con la dirección vertical; véase la figura 31. Sea μ_k el coeficiente de fricción cinética entre el trapeador y el piso y μ_s el coeficiente de fricción estática. Desprecie la masa del mango. (a) Halle la magnitud de la fuerza F dirigida a lo largo del mango necesaria para deslizar al trapeador a velocidad uniforme por el piso. (b) Demuestre que si θ es más pequeño que cierto ángulo θ_0 , no puede hacerse que el trapeador se deslice por el piso, no importa qué tan grande sea la fuerza ejercida a lo largo del mango. ¿Cuál es el ángulo θ_0 ?



Figura 31 Problema 20.

21. Un obrero arrastra una caja de 150 lb por un piso jalando de ella por medio de una cuerda inclinada a 17° con respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción estática es de 0.52 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.35. (a) ¿Qué tensión se requiere en la cuerda para hacer que la caja comience a moverse? (b) ¿Cuál es la aceleración inicial de la caja?
22. Un alambre se romperá cuando la tensión exceda de 1.22 kN. Si el alambre, no necesariamente horizontal, se emplea para arrastrar una caja por el piso, ¿cuál es el peso más grande que puede ser movido si el coeficiente de fricción estática es de 0.35?
23. La figura 32 muestra la sección transversal de un camino cortado en la ladera de una montaña. La línea llena AA' representa un plano de estratificación débil en el cual es posible un deslizamiento. El bloque B directamente arriba del camino está separado de la roca ladera arriba por una grieta grande (llamada *juntura*), de manera tal que sólo la fuerza de fricción entre el bloque y la probable superficie de falla impide el deslizamiento. La masa del bloque es de 1.8×10^7 kg, el ángulo de inclinación del plano de la falla es de 24° , y el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano es de 0.63. (a) Demuestre que el bloque no se deslizará. (b) En la *juntura* se filtra el agua, ejerciendo una fuerza hidrostática F paralela a la inclinación del bloque. ¿Qué valor mínimo de F provocaría un deslizamiento?
24. El bloque B de la figura 33 pesa 712 N. El coeficiente de fricción estática entre el bloque B y la mesa es de 0.25.

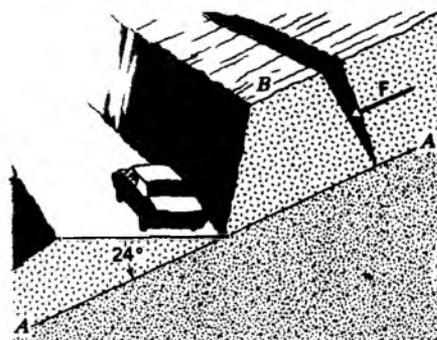


Figura 32 Problema 23.

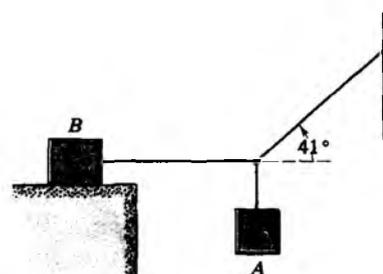


Figura 33 Problema 24.

Halle el peso máximo del bloque A con el que el sistema se mantendrá en equilibrio.

25. El bloque m_1 de la figura 34 tiene una masa de 4.20 kg y el bloque m_2 tiene una masa de 2.30 kg. El coeficiente de fricción cinética entre m_2 y el plano horizontal es de 0.47. El plano inclinado carece de fricción. Halle (a) la aceleración de los bloques y (b) la tensión en la cuerda.

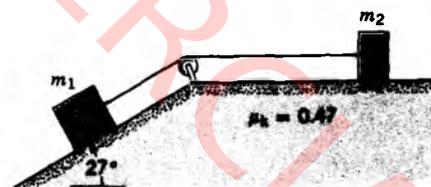


Figura 34 Problema 25.

26. En la figura 35, el objeto B pesa 94.0 lb y el objeto A pesa 29.0 lb. Entre el objeto B y el plano el coeficiente de fricción estática es de 0.56 y el coeficiente de fricción cinética es de 0.25. (a) Halle la aceleración del sistema si B está inicialmente en reposo. (b) Halle la aceleración si B se mueve por el plano hacia arriba. (c) ¿Cuál es la aceleración si B se mueve por el plano hacia abajo? El plano tiene una inclinación de 42.0° .
27. Una caja se desliza hacia abajo por una canal inclinada y en ángulo recto como se muestra en la figura 36. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el material que componen la canal es μ_k . Halle la aceleración de la caja.

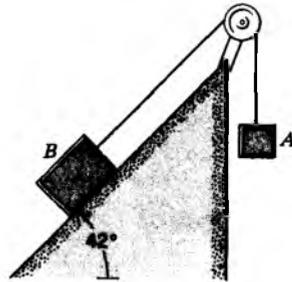


Figura 35 Problema 26.



Figura 36 Problema 27.

28. Los dos bloques, $m = 16$ kg y $M = 88$ kg, mostrados en la figura 37 pueden moverse libremente. El coeficiente de fricción estática entre los bloques es $\mu_s = 0.38$, pero la superficie bajo M carece de fricción. ¿Cuál es la fuerza horizontal mínima F necesaria para mantener a m contra M ?

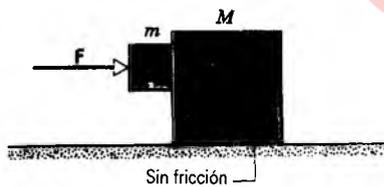


Figura 37 Problema 28.

29. En la figura 38 se muestran dos objetos, con masas $m_1 = 1.65$ kg y $m_2 = 3.22$ kg, unidos por una varilla carente de masa paralela al plano inclinado por el que ambos se deslizan hacia abajo arrastrando m_2 a m_1 . El ángulo del plano inclinado es $\theta = 29.5^\circ$. El coeficiente de fricción cinética entre m_1 y el plano inclinado es $\mu_1 = 0.226$; entre m_2 y el plano inclinado el coeficiente correspondiente es $\mu_2 = 0.127$. Calcule (a) la aceleración común de los dos objetos y (b) la tensión en la varilla. (c) ¿Cuáles serán las respuestas a (a) y (b) cuando m_2 arrastra a m_1 ?

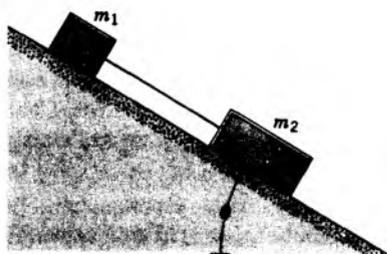


Figura 38 Problema 29.

30. Un bloque de 4.40 kg está colocado sobre otro bloque de 5.50 kg. Con objeto de hacer que el bloque de arriba se deslice sobre el de abajo, que se mantiene fijo, debe aplicarse sobre el bloque de arriba una fuerza horizontal de 12.0 N. El conjunto de bloques es ahora situado sobre una mesa horizontal carente de fricción; véase la figura 39. Halle (a) la fuerza horizontal máxima F que puede ser aplicada al bloque inferior de modo que ambos bloques se muevan juntos, (b) la aceleración resultante de los bloques, y (c) el coeficiente de fricción estática entre los bloques.

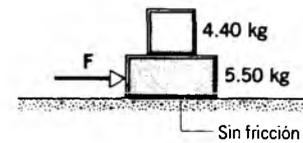


Figura 39 Problema 30.

31. Una losa de 42 kg descansa sobre un piso sin fricción. Un bloque de 9.7 kg descansa a su vez sobre la losa, como en la figura 40. El coeficiente de fricción estática entre el bloque y la losa es de 0.53, mientras que el coeficiente de fricción cinética es de 0.38. El bloque de 9.7 kg recibe la acción de una fuerza horizontal de 110 N. ¿Cuáles son las aceleraciones resultantes de (a) el bloque y (b) la losa?

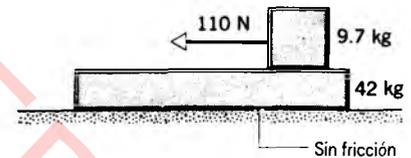


Figura 40 Problema 31.

Sección 6.3 La dinámica del movimiento circular uniforme

32. Durante una carrera olímpica de trineos, un equipo europeo toma una curva de 25 ft de radio a una velocidad de 60 mi/h. ¿Qué aceleración experimentan los contendientes (a) en ft/s^2 y (b) en unidades de g ?
33. Un auto de 2400 lb ($= 10.7$ kN) que viaja a 30 mi/h ($= 13.4$ m/s) intenta tomar una curva no peraltada con un radio de 200 ft ($= 61.0$ m). (a) ¿Qué fuerza de fricción se requiere para mantener al auto en su trayectoria circular? (b) ¿Qué coeficiente de fricción estática mínimo se requiere entre las llantas y la carretera?
34. Una curva circular de una carretera está diseñada para un tráfico que transita a 60 km/h ($= 37$ mi/h). (a) Si el radio de la curva es de 150 m ($= 490$ ft), ¿cuál es el ángulo correcto de peralte de la carretera? (b) Si la curva no estuviera peraltada, ¿cuál sería el coeficiente de fricción mínimo entre las llantas y la carretera que evitaría que el tráfico patine a esta velocidad?

35. Usted conduce un auto a una velocidad de 85 km/h cuando nota una barrera a través de la carretera a 62 m adelante. (a) ¿Cuál es el coeficiente mínimo de fricción estática entre las llantas y la carretera que le permitiría detenerse sin llegar a la barrera? (b) Suponga que conduce a 85 km/h en un gran estacionamiento vacío. ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática mínimo que le permitiría hacer girar el auto en un círculo de 62 m de radio y, de esta manera, evitar el choque con un muro situado a 62 m más adelante?
36. Un péndulo cónico consta de un guijarro de 53 g atado a un cordel de 1.4 m. El guijarro oscila en un círculo de 25 cm de radio. (a) ¿Cuál es la velocidad del guijarro? (b) ¿Cuál es su aceleración? (c) ¿Cuál es la tensión en la cuerda?
37. Un ciclista (Fig. 41) viaja en un círculo de 25 m de radio a una velocidad constante de 8.7 m/s. La masa combinada de la bicicleta y el tripulante es de 85 kg. Calcule la fuerza (magnitud y ángulo con la vertical) ejercida por la pista sobre la bicicleta.



Figura 41 Problema 37.

38. En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, el electrón gira en una órbita circular alrededor del núcleo. Si el radio es 5.3×10^{-11} m y el electrón da 6.6×10^{15} rev/s, Halle (a) la velocidad del electrón, (b) la aceleración del electrón, y (c) la fuerza que actúa sobre el electrón. (Esta fuerza es el resultado de la atracción entre el núcleo, cargado positivamente, y el electrón, cargado negativamente.)
39. Un niño coloca una canasta de merienda en el borde exterior de un tiiovivo que tiene un radio de 4.6 m y gira una vez cada 24 s. ¿Qué tan grande deberá ser el coeficiente de fricción estática para que la canasta permanezca sobre el tiiovivo?

cienta de fricción estática para que la canasta permanezca sobre el tiiovivo?

40. Un disco de masa m que está sobre una mesa sin fricción está atado a un cilindro colgante de masa M por medio de un cordón que pasa por un orificio de la mesa (véase la Fig. 42). Halle la velocidad con que debe moverse el disco en un círculo de radio r para que el cilindro permanezca en reposo.

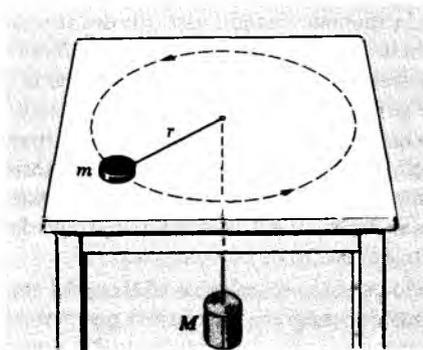


Figura 42 Problema 40.

41. El manual del conductor afirma que un conductor que viaje a 48 km/h y quiera detenerse tan rápidamente como sea posible viajará 10 m antes de que ponga el pie sobre el freno. El auto viaja 21 m más antes de llegar al reposo. (a) ¿Qué coeficiente de fricción es supuesto en estos cálculos? (b) ¿Cuál es el radio mínimo para tomar una curva a 48 km/h sin patinar?
42. Una curva peraltada de una carretera circular está diseñada para que el tráfico se mueva a razón de 95 km/h. El radio de la curva es de 210 m. El tráfico se mueve a lo largo de la carretera a razón de 52 km/h en un día tormentoso. (a) ¿Cuál es el coeficiente de fricción mínimo entre las llantas y la carretera que permita que los automóviles tomen la curva sin patinar? (b) Con este valor del coeficiente de fricción, ¿cuál es la velocidad mayor a la que puede ser tomada la curva sin que haya un patinaje?
43. Un estudiante de 150 lb que viaja en una rueda Ferris que gira uniformemente tiene un peso aparente de 125 lb en el punto más alto. (a) ¿Cuál es el peso aparente del estudiante en el punto más bajo? (b) ¿Cuál sería el peso aparente del estudiante en el punto más alto si la velocidad de la rueda Ferris se duplicara?
44. Un auto se mueve a velocidad constante sobre una carretera recta pero montañosa. Una sección tiene una cresta y un valle del mismo radio de 250 m; véase la figura 43. (a) Cuando el auto pasa sobre la cresta, la fuerza normal sobre el auto es un medio del peso de 16 kN del auto. ¿Cuál será la fuerza normal sobre el auto al pasar por el fondo del valle? (b) ¿Cuál es la velocidad máxima a que el auto puede moverse sin abandonar la carretera en la parte más alta de la cresta? (c) Moviéndose a la velocidad hallada en (b), ¿cuál sería la fuerza normal sobre el auto cuando se mueve por el fondo del valle?

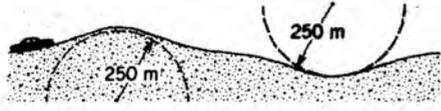


Figura 43 Problema 44.

45. Sobre una tornamesa horizontal y plana colocamos una pequeña moneda. Según se observa, la tornamesa da exactamente tres revoluciones en 3.3 s. (a) ¿Cuál es la velocidad de la moneda cuando gira sin deslizamiento a una distancia de 5.2 cm del centro de la tornamesa? (b) ¿Cuál es la aceleración (magnitud y dirección) de la moneda en la parte (a)? (c) ¿Cuál es la fuerza de fricción que actúa sobre la moneda en la parte (a) si la moneda tiene una masa de 1.7 g? (d) ¿Cuál es el coeficiente de fricción estática entre la moneda y la tornamesa si se observa que la moneda se desliza fuera de la tornamesa cuando está a más de 12 cm del centro de la tornamesa?
46. Un objeto pequeño se coloca a 13.0 cm del centro de una tornamesa de fonógrafo. Se observa que permanece sobre la tornamesa cuando gira a razón de $33\frac{1}{3}$ rev/min pero se desliza hacia afuera cuando gira a razón de 45.0 rev/min. ¿Entre qué límites deberá estar el coeficiente de fricción estática entre el objeto y la superficie de la tornamesa?
47. Un aeroplano está volando en un círculo horizontal a una velocidad de 482 km/h. Las alas del aeroplano están inclinadas a 38.2° respecto a la horizontal; véase la figura 44. Halle el radio del círculo en el cual está volando el aeroplano. Suponga que la fuerza centrípeta es proporcionada enteramente por la fuerza de ascenso perpendicular a la superficie de las alas.

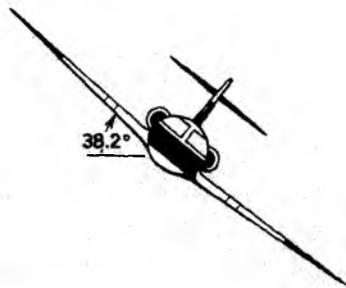


Figura 44 Problema 47.

48. Un rabihorcado vuela remontándose en una trayectoria circular horizontal. Se estima que su ángulo de inclinación es de 25° y el pájaro emplea 13 s en completar un círculo. (a) ¿A qué velocidad está volando el pájaro? (b) ¿Cuál es el radio del círculo? (Véase "The Amateur Scientist", por Jearl Walker, *Scientific American*, Marzo 1985, pág. 122.)
49. Cierta cuerda puede soportar una tensión máxima de 9.2 lb sin romperse. Un niño ata una piedra de 0.82 lb a un extremo y, manteniendo el otro extremo, hace girar a la piedra en un círculo vertical de 2.9 ft de radio, aumentando lentamente la velocidad hasta que el cordón se rompe. (a)

¿En qué lugar de su trayectoria está la piedra cuando se rompe el cordón? (b) ¿Cuál es la velocidad de la piedra al romperse el cordón?

50. Un modelo de aeroplano de 0.75 kg de masa, vuela a velocidad constante en un círculo horizontal en el extremo de un cordel de 33 m y a una altura de 18 m. El otro extremo del cordel está amarrado al suelo. El aeroplano da 4.4 rev/min y la fuerza ascensional es perpendicular a las alas sin peralte. (a) ¿Cuál es la aceleración del aeroplano? (b) ¿Cuál es la tensión en la cuerda? (c) ¿Cuál es la fuerza ascensional producida por las alas del aeroplano?
51. Supongamos que el kilogramo patrón pesaría exactamente 9.80 N al nivel del mar en el ecuador si la Tierra no girase. Entonces, tenga en cuenta el hecho de que la Tierra gira, de modo que este objeto se mueve en un círculo de 6370 km de radio (el radio de la Tierra) en un día. (a) Determine la fuerza centrípeta necesaria para mantener al kilogramo patrón en movimiento en su trayectoria circular. (b) Halle la fuerza ejercida por el kilogramo patrón sobre una báscula de resorte de la cual esté suspendido en el ecuador (su peso aparente).
52. Una bola de 1.34 kg está unida a una varilla vertical rígida por medio de dos cordones sin masa, cada uno de 1.70 m de longitud. Los cordones están unidos a la varilla con una separación entre sí de 1.7 m (aparte). El sistema está girando con respecto al eje de la varilla, quedando ambos cordones tirantes y formando un triángulo equilátero con la varilla, como se muestra en la figura 45. La tensión en el cordón superior es de 35.0 N. (a) Halle la tensión en el cordón inferior. (b) Calcule la fuerza neta sobre la bola en el instante mostrado en la figura. (c) ¿Cuál es la velocidad de la bola?

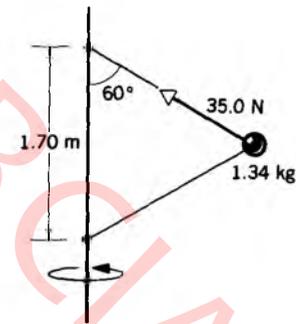


Figura 45 Problema 52.

53. Un pequeñísimo cubo de masa m se halla en el interior de un embudo (véase la Fig. 46) que gira alrededor de un eje vertical a una razón constante de ν revoluciones por segundo. La pared del embudo forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el cubo y el embudo es μ_s y el centro del cubo está a una distancia r del eje de rotación. Halle (a) los valores mayor y (b) menor de ν para los cuales el cubo no se moverá con respecto al embudo.
54. A causa de la rotación de la Tierra, una plomada puede no colgar exactamente en la dirección de la fuerza de gravedad de la Tierra sobre la plomada, sino que se

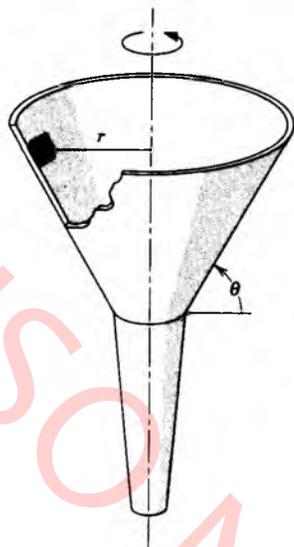


Figura 46 Problema 53.

desvía ligeramente de esa dirección. (a) Demuestre que la desviación θ en radianes en un punto con latitud L está dado por

donde R es el radio de la Tierra y T es el periodo de la rotación de la Tierra. (b) ¿En qué latitud adquiere la desviación un máximo? ¿De cuánto es esta desviación? (c) ¿Cuál es la desviación en los polos? ¿Y en el ecuador?

Sección 6-5 Fuerzas dependientes del tiempo: métodos analíticos

55. La posición de una partícula de 2.17 kg de masa que viaje en línea recta está dada por

$$x = 0.179t^4 - 2.08t^2 + 17.1.$$

donde x está en metros y t está en segundos. Halle (a) la velocidad, (b) la aceleración, y (c) la fuerza sobre la partícula en el tiempo $t = 7.18$ s.

56. Una partícula de masa m está sujeta a una fuerza neta $F(t)$ dada por

$$F(t) = F_0 \quad \text{i}$$

esto es, $F(t)$ es igual a F_0 en $t = 0$ y disminuye linealmente hasta cero en el tiempo T . La partícula pasa por el origen $x = 0$ con una velocidad $v_0 \mathbf{i}$. Demuestre que en el instante $t = T$ en que $F(t)$ se anula, la velocidad v y la distancia x recorrida están dadas por

$$v(T) = v_0 + \frac{1}{2}a_0 T,$$

$$x(T) = v_0 T + \frac{1}{3}a_0 T^2$$

donde $a_0 = F_0/m$ es la aceleración inicial. Compare estos resultados con las ecuaciones 15 y 19 del capítulo 2.

57. Una partícula de masa m está en reposo en $x = 0$. Al tiempo $t = 0$ se aplica una fuerza dada por $F = F_0 e^{-\gamma t}$ en la dirección $+x$; F_0 y T son constantes. Cuando $t = T$ se retira la fuerza. En este instante en que la fuerza se retira, (a) ¿cuál es la velocidad de la partícula, y (d) dónde está?

Sección 6-7 Fuerzas de arrastre y el movimiento de proyectiles

58. Un pequeño guijarro de 150 g está a 3.4 km de profundidad en el océano y cae a una velocidad terminal constante de 25 m/s. ¿Qué fuerza ejerce el agua sobre el guijarro al caer?
59. Un objeto se deja caer desde el reposo. Halle la velocidad terminal suponiendo que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv^2$.
60. ¿Cuánto tiempo le toma al objeto del problema muestra 5 llegar a la mitad de su velocidad terminal?
61. A partir de la tabla 2, calcule el valor de b para la gota de agua, suponiendo que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv$. La densidad del agua es de 1.0 g/cm³.
62. Una locomotora acelera a un tren de 23 vagones a lo largo de una vía a nivel. Cada vagón tiene una masa de 48.6 tons métricas y está sujeto a una fuerza de arrastre $f = 243v$, donde v es la velocidad en m/s y la fuerza f está en N. En el instante en que la velocidad del tren es de 34.5 km/h, la aceleración es de 0.182 m/s². (a) Calcule la tensión en el cople situado entre el primer vagón y la locomotora. (b) Suponga que esta tensión es la fuerza mayor que la locomotora puede ejercer sobre el tren. ¿Cuál, entonces, es la mayor pendiente en la que la locomotora pueda jalar al tren a razón de 34.5 km/h? (1 ton métrica = 1000 kg.)
63. Un globo aerostático desciende en aire tranquilo a una velocidad constante de 1.88 m/s. El peso total del globo, incluyendo la carga útil, es de 10.8 kN. Se ejerce sobre el globo una fuerza ascensional constante de 10.3 kN. El aire ejerce también una fuerza de arrastre dada por $D = bv^2$, donde v es la velocidad del globo y b es una constante. La tripulación arroja 26.5 kg del lastre. ¿Cuál será la velocidad constante de descenso del globo?
64. Repita el problema 63, pero esta vez suponga que la fuerza de arrastre está dada por $D = bv$. Nótese que la constante b deberá ser reevaluada.
65. Una barcaza de masa m está navegando por un canal a velocidad v , cuando sus motores se detienen. La fuerza de arrastre D en el agua está dada por $D = bv$. (a) Halle la expresión del tiempo requerido para que la barcaza reduzca su velocidad a v_r . (b) Evalúe numéricamente el tiempo para que una barcaza de 970 kg, que navega inicialmente a razón de 32 km/h, reduzca su velocidad a 8.3 km/h; el valor de b es de 68 N · s/m.
66. Consideremos la caída del objeto del problema muestra 5. (a) Halle la aceleración en función del tiempo. ¿Cuál es la aceleración en un t pequeño; en un t grande? (b) Halle la distancia recorrida por el objeto en su caída, en función del tiempo.

67. Suponiendo que la fuerza de arrastre D esté dada por $D = bv$. (a) Demuestre que la distancia y_{95} a través de la cual debe caer un objeto desde el reposo hasta alcanzar el 95% de su velocidad terminal está dada por

$$y_{95} = (v_T^2 / g)(\ln 20 - \frac{19}{20})$$

donde v_T es la velocidad terminal. (Sugerencia: Use el resultado de $y(t)$ obtenido en el problema 66.) (b) Usando la velocidad terminal de 42 m/s para la bola de béisbol dada en la tabla 2, calcule la distancia al 95%. ¿Por qué no concuerda este resultado con el valor listado en la tabla 2?

Proyectos para la computadora

68. La sección 6-6 describe una técnica numérica para integrar la segunda ley de Newton y obtener una tabla que dé la posición y la velocidad de un objeto en una secuencia de tiempos. Divida el periodo desde algún tiempo inicial t_0 a algún tiempo final t_f en N intervalos pequeños Δt . Si x_0 , v_0 , y F_0 son la coordenada, la velocidad, y la fuerza del inicio de un intervalo, entonces $x_1 = x_0 + v_0\Delta t$ y $v_1 = v_0 + (F_0/m)\Delta t$ dan las estimaciones de la coordenada y la velocidad al final. Estos valores se usan después como la coordenada y la velocidad al inicio del intervalo siguiente. Cuanto más pequeño sea Δt , mejor será la estimación, pero Δt no podrá ser demasiado pequeño o, de lo contrario, se perderán cifras significativas durante el cálculo. La fuerza puede ser una función de la posición, de la velocidad y del tiempo. La función explícita se determina por la situación física, y una vez que es conocida se usan los valores de x_0 , v_0 , y t_0 para evaluar F_0 . Escriba un programa para la computadora o diseñe una hoja de cálculo para llevar a cabo la integración. Usted alimentará con x_0 , v_0 , t_0 , Δt , y N . He aquí un ejemplo a tratar.

Una persona, comenzando desde el reposo, empuja una caja a lo largo de un piso rugoso con una fuerza dada por $F = 200e^{-0.15t}$, donde F está en newton y t en segundos. La fuerza disminuye exponencialmente porque la persona se cansa. En tanto que la caja se mueve, una fuerza de fricción constante de 80 N se opone al movimiento. (a) ¿Cuánto tarda, después de haber arrancado, en detenerse la caja? (b) ¿A qué distancia llega? Obtenga una precisión de 2 cifras significativas.

Para propósitos de integración divida el tiempo entre $t = 0$ y $t = 15$ s en 1500 intervalos de 0.01 s de duración cada uno. No es necesario exhibir o imprimir la coordenada y la velocidad al final de cada intervalo. En la primera corrida, exhiba los resultados al final de cada 100 intervalos. En corridas posteriores quizá desee usted exhibir los resultados para intervalos más pequeños dentro de un margen limitado. Una vez que se ha generado la tabla de resultados, busque los dos valores de la velocidad que encierran a $v_c = 0$. Si los valores de x son iguales a 2 cifras significativas, habrá usted terminado. Si no lo son, repita el cálculo con un intervalo de exhibición menor, o quizá con un intervalo de integración menor.

69. Una pelota de 150 g se lanza directamente hacia arriba desde el borde de un acantilado a una velocidad inicial de 25 m/s. En el trayecto hacia abajo no toca el borde del

acantilado y continúa cayendo al terreno que se encuentra 300 m más abajo. Además de estar sujeta a la fuerza de la gravedad, lo está a una fuerza de resistencia del aire dada por $F_D = -0.0150v$, donde F_D está en newton y v está en m/s. (a) ¿Cuánto tiempo está la pelota en el aire? (b) ¿Cuál es su velocidad justamente antes de que alcance el terreno? (c) ¿Cuál es la razón de esta velocidad y su velocidad terminal?

Use un programa de computación o una hoja de cálculo para integrar la segunda ley de Newton (para sugerencias, véase la sección 6-6 y el problema anterior). Use un intervalo de integración de 0.001 s y exhiba la coordenada y la velocidad para cada 0.1 s desde $t = 0$ hasta $t = 12$ s. Esto daría una precisión de 2 cifras significativas.

70. Un proyectil de 2.5 kg se dispara desde el suelo a una velocidad inicial de 150 m/s, y un ángulo de 40° sobre la horizontal. Además de la fuerza de la gravedad está sujeto a una fuerza de resistencia del aire $F_D = -0.30v$, donde F_D está en newton y v en m/s. Integre numéricamente la segunda ley de Newton desde $t = 0$ (el momento del disparo) hasta $t = 20$ s. Tome un intervalo de integración de 0.001 s pero muestre resultados para cada 0.5 s. Deberá considerar tanto las coordenadas x y y como las componentes de la velocidad. Use $a_x = -(b/m)v_x$ y $a_y = -g - (b/m)v_y$, donde b es el coeficiente de arrastre. Vea los proyectos de computación anteriores. (a) Trace la trayectoria y contra x desde el disparo hasta el tiempo en que el proyectil cae al suelo. Nótese que la trayectoria no es simétrica con respecto al punto más alto como lo sería si la resistencia del aire no existiera. Use la gráfica o lista de valores para calcular: (b) el tiempo en que el proyectil alcanza el punto más alto de su trayectoria y las coordenadas de ese punto; (c) el tiempo en que aterriza, su alcance, y su velocidad justo antes de aterrizar. (d) Compare estas cantidades con los valores que tendría si no hubiese una resistencia del aire. ¿Cómo influye la resistencia del aire en la altura del punto más alto? ¿Cómo influye en el alcance? ¿Cómo influye en la velocidad del momento del impacto?
71. La resistencia del aire puede influir significativamente en el ángulo de disparo para el cual un proyectil tenga el alcance máximo. Para ver esta influencia considere un proyectil de 2.5 kg disparado desde el suelo con una velocidad inicial de 150 m/s y suponga que la fuerza del aire está dada por $F_D = -0.30v$, donde F_D está en newton y v está en m/s. Para cada uno de los ángulos de disparo 25° , 30° , 35° , y 40° , integre numéricamente la segunda ley de Newton con un intervalo de integración de 0.001 s. Muestre los resultados para cada 0.5 s desde $t = 0$ (el momento del disparo) hasta $t = 25$ s. Véanse los proyectos de computación anteriores. Use los resultados para calcular el alcance. ¿Para cuál de estos ángulos de disparo es más grande el alcance?
72. La velocidad de un proyectil sujeto a la resistencia del aire se acerca a su velocidad terminal. Suponga que la fuerza neta está dada por $-mg\mathbf{j} - bv$, donde b es el coeficiente de arrastre y se elige que el eje y sea positivo en dirección hacia arriba. A la velocidad terminal v_T la fuerza neta se anula, de modo que $v_T = -(mg/b)\mathbf{j}$. Nótese que no tiene una

componente horizontal. El proyectil cae finalmente directo hacia abajo.

Para "observar" a un proyectil que se acerca a su velocidad terminal puede usarse un programa de computadora o una hoja de cálculo. Considere un proyectil de 2.5 kg disparado a una velocidad inicial de 150 m/s, a un ángulo de 40° sobre la horizontal. Sea $b = 0.50$ kg/s el coeficiente de arrastre. Integre numéricamente la segunda ley de Newton y muestre los resultados para cada 0.5 s desde $t = 0$ (el momento del disparo) hasta el tiempo en que la componente y de la velocidad sea un 90% de v_T . Trace $v_x(t)$ y $v_y(t)$ en la misma gráfica. Nótese que v_x tiende a 0 cuando v_y se aproxima a v_T .

73. Cuando el efecto del aire sobre un proyectil se toma en cuenta, las coordenadas están dadas por

$$x(t) = (v_{0x}/b)(1 - e^{-bt})$$

$$y(t) = (1/b^2)(g + bv_{0y})(1 - e^{-bt}) - (g/b)t,$$

donde se elige que la dirección de y positiva sea hacia arriba y el origen sea el punto de disparo. El coeficiente de arrastre b nos habla de la fuerza de interacción entre el aire y el proyectil. Diferencie las expresiones de las coordenadas para demostrar que las componentes de la velocidad están dadas por $v_x = v_{0x}e^{-bt}$ y $v_y = (1/b)(g + bv_{0y})e^{-bt} - g/b$ y que las componentes de la aceleración están dadas por $a_x = -bv_{0x}e^{-bt}$ y $a_y = -(g + bv_{0y})e^{-bt}$. Escriba un programa de computación o una hoja de cálculo para calcular las coordenadas, las componentes de la velocidad, y las componentes

de la aceleración al final de cada intervalo de tiempo de duración Δt desde el tiempo t_1 hasta el tiempo t_2 .

Use ahora el programa para investigar la influencia del aire sobre un proyectil disparado desde el suelo con una velocidad inicial de 50 m/s, y un ángulo de elevación de 25° sobre la horizontal. (a) Sea $b = 0.10$ s $^{-1}$ y use el programa para hallar las coordenadas del punto más elevado, la velocidad, y la aceleración cuando el proyectil está allí. Comience usando el programa para evaluar las coordenadas, la velocidad, y la aceleración al final de cada 0.1 s desde $t = 0$ hasta $t = 4.5$ s. Para obtener una precisión de 2 cifras significativas puede hacerse más corto el intervalo en las series posteriores. Una vez que se haya obtenido una respuesta nótese que el punto más elevado se alcanza en menos tiempo que en ausencia de resistencia del aire, que el punto más elevado es más bajo y más cercano al punto de disparo, y que la velocidad es menor. (b) Para ver si la tendencia continúa, repita el cálculo con $b = 0.20$ s $^{-1}$. (c) ¿Cómo es afectado por el aire el alcance del proyectil? Sea $b = 0.10$ s $^{-1}$ y use el programa para hallar el alcance (el valor de x cuando $y = 0$). Repita con $b = 0.20$ s $^{-1}$. (d) ¿Cómo afecta el aire a la velocidad, justo antes del aterrizaje? Use el programa con $b = 0.10$ s $^{-1}$, luego con 0.20 s $^{-1}$. Recuérdese que, en ausencia de arrastre, cada componente de la velocidad tiene el mismo valor que en el momento del disparo. (e) Nótese que las ecuaciones predicen que $a_x = -bv_x$ y $a_y = -g - bv_y$. Use estas relaciones para explicar por qué $a_y = -g$ en el punto más elevado; por qué a_x no es cero en ningún momento, y por qué a_x disminuye de magnitud, justo antes del aterrizaje, si b aumenta.