Subsucesiones

a_n sucesión

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \cdots \quad a_n \quad a_{n+1} \quad \cdots$

n_k sucesión de numeros naturales estrictamente creciente

$n_k : 2, 4, 5, 10, 12 \quad \cdots$

$a_{n_k} : a_2, a_4, a_5, a_{10}, a_{12}$

a_{n_k} subsucesión de a_n

Ejemplos:

$a_n = (-1)^n \qquad a_n : \quad a_1 = -1 \quad \underbrace{a_2 = 1}_{a_2 = 1} \quad a_3 = -1 \quad \underbrace{a_4 = 1}_{a_4 = 1} \quad a_5 = -1$

a_{2n}

→ subsucesión de los pares

$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \quad \leftarrow$ sucesión constante igual a 1

$n \longmapsto 2n \longmapsto a_{2n}$

→ subsucesión de los impares

$a_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1 \quad \leftarrow$ sucesión constante igual a -1

Resultado

$\lim a_n = L \iff$ todas las subsucesiones de a_n convergen a L

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

a) $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ *b)* $a_n = (-1)^n n$ *c)* $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$ *d)* $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$

e) $a_n = n^2\ (1+(-1)^n)$ *f)* $a_n = n^{(-1)^n}$ *g)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

c) $a_n = 3^{\cos(n\pi)}$

a_n es convergente?

$$\boxed{a_1 = 3^{\cos(\pi)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}}$$

$a_2 = 3^{\cos(2\pi)} = 3^1 = 3$

$\boxed{a_3 = 3^{\cos(3\pi)} = 3^{\cos(\pi)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}}$

$a_4 = 3^{\cos(4\pi)} = 3^1 = 3$

$\Rightarrow$ la sucesión a_n alterna

$\Rightarrow$ no converge.

subsucesiones convergentes?

* $a_{2n+1} = 3^{\cos((2n+1)\pi)} = 3^{\cos(\pi)} = \frac{1}{3}$

a_{2n+1} es constante igual a $\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \lim a_{2n+1} = \frac{1}{3}$

$a_1 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; \cdots \; a_{10} \; \underbrace{a_{11} \; a_{13} \; a_{15} \; a_{17} \; \cdots}_{\text{solo terminos con } n \text{ impar}}$

$a_1 \; a_3 \; a_5 \; a_7 \; \cdots$

Si tomamos una subsucesion a_{n_k} tal que n_k es impar a partir de cierto momento (existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que n_k es impar si $k \geq k_0$), obtenemos una subsucesión que es constante igual a $\frac{1}{3}$ a partir de cierto momento y que por lo tanto converge a $\frac{1}{3}$.

* $a_{2n} = 3^{\cos(2n\pi)} = 3$

si a_{n_k} es una subsucesion tal que n_k es par a partir de cierto momento, entonces a_{n_k} converge a 3.

g) $a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$

a_n converge?

$$\boxed{a_1 = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{1+(-1)^1}{2} = -1}$$

$$a_2 = \frac{(-1)^2}{2} + \frac{1+(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{a_3 = \frac{(-1)^3}{3} + \frac{1+(-1)^3}{2} = -\frac{1}{3}}$$

$$a_4 = \frac{(-1)^4}{4} + \frac{1+(-1)^4}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$\boxed{a_5 = \frac{(-1)^5}{5} + \frac{1+(-1)^5}{2} = -\frac{1}{5}}$$

$$* \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} + \underbrace{\frac{1+(-1)^{2n+1}}{2}}_{=0} = -\frac{1}{2n+1}$$

$\lim a_{2n+1} = 0$

cualquier subsucesión a_{n_k} que a partir de cierto momento tome n_k impar converge a 0.

$$* \quad a_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n} + \frac{1+(-1)^{2n}}{2} = \frac{1}{2n} + 1$$

$\lim a_{2n} = 1$

cualquier subsucesión a_{n_k} que a partir de cierto momento tome n_k par converge a 1.

a_{n_k} tal que existe k_0 tal que n_k es par si $k \geq k_0$

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = 1$$

4. (***Primer parcial segundo semestre 2020 turno vespertino***) Sea $a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1}\right) n^\alpha$ con α un real positivo. Entonces:

(A) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

(B) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq 1$.

(C) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito para todo α.

(D) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es finito para ningún α.

(E) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

α real positivo

$$a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1}\right) n^\alpha$$

$$\lim a_n = \lim \left(e^{\overbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}^{\to 0}-1}\right) \overbrace{n^\alpha}^{\to\infty}$$

$\to \frac{1}{e}$

$= \infty$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= 0$$

Otro ejercicio

$$\lim \left(e^{\overbrace{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}^{\to 0}}-1\right) \overbrace{n^\alpha}^{\to\infty} =$$

$e^{\ldots} \to 1$

$\to 0$

$0 \cdot \infty$

$$a_n = \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1\right) n^\alpha$$

que tiene que verificar α para que $\lim a_n$ sea finito

Taylor de e^x en 0: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots$

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

$$\boxed{e^x \sim 1 + x \quad \text{cuando } x \to 0}$$

$$\lim \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$$

entonces $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \sim 1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \left(e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}-1\right) n^\alpha = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1\right) n^\alpha$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) n^\alpha$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\, n^{\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1\cancel{-n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\, n^{\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\, n^{\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}\, n^{\alpha}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}}\, n^{\alpha}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\alpha}}{n^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{n\to\infty} n^{\alpha-1/2}}_{\text{es finito cuando } \alpha \leq \frac{1}{2}}$$

<u>caso 1</u> : $\alpha - 1/2 < 0$

$$\lim n^{\alpha-1/2} = \lim \frac{1}{n^{-(\alpha-1/2)}} = 0$$

$-(\alpha-1/2) > 0$

<u>caso 2</u>: $\alpha - 1/2 = 0$

$$\lim n^{\alpha-1/2} = \lim n^{0} = 1$$

<u>caso 3</u>: $\alpha - 1/2 > 0$

$$\lim n^{\alpha-1/2} = \infty$$

6. (***Examen diciembre 2019***) Se considera la sucesión $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + 1/1$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1+1/1}, \dots$ definida por inducción mediante la regla $x_{n+1} = 1 + 1/x_n$. Indicar la opción correcta:

(A) La sucesión es monótona y está acotada.

(B) La sucesión no es monótona pero está acotada.

(C) La sucesión no está acotada pero es monótona.

(D) La sucesión no es monótona ni acotada.

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = 1 + 1/x_n \end{cases}$$

x_n monótona? $\underbrace{x_n \text{ acotada}}$?

$x_0 = 1$ $\qquad |x_n| \leq M \rightsquigarrow -M < x_n < M$

$$x_1 = x_{0+1} = 1 + \frac{1}{x_0} = 1 + \boxed{\frac{1}{1}} = 2$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \approx 1{,}5$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{3/2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}66$$

$$\boxed{x_4 = 1 + \frac{1}{5/3} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \approx 1{,}6}$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{8/5} = 1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \approx 1{,}625$$

$$x_6 = 1 + \frac{8}{13}$$

$\Rightarrow x_n$ no es monótona

$$\frac{1}{x_n} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + \frac{1}{x_n} \leq 2$$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}^{\leq 1} \leq 2$$

$\Rightarrow x_n$ es acotada: $\quad 1 \leq x_n \leq 2$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ($\lim_{n\to+\infty} a_n = L$), es decir que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de $\varepsilon > 0$) tal que $\forall\ n \geq n_0,\ |a_n - L| < \varepsilon$. Determinar en cada caso el primer valor de n_0 que corresponde a los siguientes valores de ε: 1; 0,1; 0,01.

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$ $\quad$ *b)* $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\quad$ *c)* $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ $\quad$ *d)* $a_n = \dfrac{1}{n!}$ $\quad$ *e)* $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$

e) $a_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$

$\lim a_n = 0$

buscamos n_0 tal que $|a_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$

$$\frac{2n}{n^3+1} < \frac{1}{100}$$

$$n^3+1 > n^3 \quad = \quad \frac{2n}{n^3+1} < \frac{2n}{n^3} \overset{?}{<} \frac{1}{100}$$