3. Encontrar los límites de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

a) $a_n = \frac{\cos(n)}{n}$ b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ c) $a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}}$ d) $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

e) $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n)$ f) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ g) $a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$

b) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim \underbrace{\sqrt{n+1}}_{\sqrt{n}} - \sqrt{n}$$

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \lim \cancel{x^2} + 1 - \cancel{x^2} = 1$$
$$g(x) = x^2$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{x^2 - x^2}_{\to 0} = 0 \quad X$$

$$\lim a_n = \lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$= 0$$

d) $a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n}$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$

si $\alpha = 3$ y $\beta = 2$

$$\lim \sqrt[n]{3^n + 2^n}$$

$$= \lim \sqrt[n]{3^n\left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)} = \lim \underbrace{\sqrt[n]{3^n\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}}_{\sqrt[n]{3^n}\sqrt[n]{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \to 0}$$

$$= \lim \sqrt[n]{2^n\left(\frac{3^n}{2^n} + 1\right)} = \lim \underbrace{\sqrt[n]{2^n\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1\right)}}_{\sqrt[n]{2^n}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n + 1}}$$

$$\sqrt[n]{2^n}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1} \sim \sqrt[n]{2^n}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{2}\right)^n} = \cancel{\sqrt[n]{2^n}}\,\frac{\sqrt[n]{3^n}}{\cancel{\sqrt[n]{2^n}}} = 3$$

<u>caso 1</u>: $\alpha > \beta$

$$\lim \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n} = \lim \sqrt[n]{\alpha^n\left(1+\frac{\beta^n}{\alpha^n}\right)}$$

$$= \lim \sqrt[n]{\alpha^n\left(1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right)}$$

$$= \lim \sqrt[n]{\alpha^n}\sqrt[n]{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}$$

$$= \lim \alpha\sqrt[n]{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \to 0$$

como $\alpha > \beta$, tenemos $\frac{\beta}{\alpha} < 1$

y por lo tanto $\lim \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$

$$= \alpha$$

<u>caso 2</u>: $\beta > \alpha$

$$\lim \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n} = \beta$$

<u>caso 3</u>: $\alpha = \beta$

$$\lim \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n} = \lim \sqrt[n]{2\alpha^n} = \lim \sqrt[n]{(2^{1/n}\alpha)^n} = 2^{1/n}\alpha$$

$$= \lim \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{\alpha^n}$$

$$= \lim 2^{1/n}\alpha$$

$$= \alpha$$

conclusión $\lim \sqrt[n]{\alpha^n+\beta^n} = \max\{\alpha,\beta\}$

2. Sean a_n y b_n sucesiones tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y b_n es acotada. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

a_n sucesión con $\lim a_n = 0$

b_n sucesión acotada

queremos demostrar que $\lim a_n b_n = 0$

Hipótesis:

* $\lim a_n = 0$

dado ε' existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tq $\overbrace{|a_n - 0| < \varepsilon'}^{|a_n| < \varepsilon'}$ para todo $n \geq n_1$

* b_n acotada

existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| < M$

$-M < b_n < M$

queremos probar $\lim a_n b_n = 0$

dado $\varepsilon > 0$ tenemos que ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\underbrace{|a_n b_n - 0|}_{|a_n b_n|} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$

Sea $\varepsilon > 0$

$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < \underbrace{|a_n|}_{< \varepsilon/M} M < \varepsilon$

como $\lim a_n = 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$|a_n| < \varepsilon/M$ para todo $n \geq n_0$

entonces si $n \geq n_0$ tenemos

$|a_n b_n| = |a_n||b_n| < |a_n| M < \frac{\varepsilon}{M} M = \varepsilon$

2. Sean a_n y b_n dos sucesiones reales convergentes tal que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A$ y $\lim_{n\to+\infty} b_n = B$.

a) Probar que la sucesión $c_n = a_n + b_n$ es convergente y $\lim_{n\to+\infty} c_n = A + B$

b) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, probar que la sucesión $\tilde{a}_n = \lambda a_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

c) Probar que la sucesión $d_n = a_n b_n$ converge y $\lim_{n\to+\infty} d_n = AB$

d) Sea e_n una sucesión acotada y suponga que $A = 0$, probar que $\lim_{n\to+\infty} e_n a_n = 0$

c) $\lim a_n = A$

$\lim b_n = B$

sea $d_n = a_n b_n$

queremos ver que $\lim d_n = AB$

Hipótesis:

* $\lim a_n = A$

dado $\varepsilon' > 0$ existe n_1 tal que $|a_n - A| < \varepsilon'$ para todo $n \geq n_1$

* $\lim b_n = B$

dado $\varepsilon'' > 0$ existe n_2 tal que $|b_n - B| < \varepsilon''$ para todo $n \geq n_2$

queremos probar que $\lim a_n b_n = AB$

Sea $\varepsilon > 0$

buscamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n b_n - AB| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB|$$

$$= |(a_n - A) b_n + A(b_n - B)|$$

$$< |(a_n - A) b_n| + |A(b_n - B)|$$

$$= \underbrace{|a_n - A||b_n|}_{< \varepsilon/2} + \underbrace{|A||b_n - B|}_{< \varepsilon/2} < \varepsilon$$

* queremos $|A||b_n - B| < \varepsilon/2$

para esto nos sirve $|b_n - B| < \varepsilon/2|A|$

como $\lim b_n = B$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ para todo $n \geq n_2$

* queremos $|a_n - A||b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$

como b_n es una sucesión convergente, b_n es acotada $\Rightarrow$ existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|b_n| < M$

entonces:

$$|a_n - A||b_n| < |a_n - A|M < \varepsilon/2$$

queremos $|a_n - A| < \varepsilon/2M$

como $\lim a_n = A$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - A| < \varepsilon/2M$ para todo $n \geq n_1$

Ahora tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

Si $n \geq n_0$:

$|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$ si $n \geq 100$

$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M}$ si $n \geq 1000$

$n_0 = 1000$

$$|a_n b_n - AB| < |a_n - A||b_n| + |A||b_n - B|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2M} M + |A| \frac{\varepsilon}{2|A|}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

entonces $\lim a_n b_n = AB$

$a_1 = 3$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 3$
$a_5 = 2$
$a_6 = 1$
$a_7 = 0$

estrictamente
monótona
decreciente
a partir
de $n=3$

$a_1 = 3$
$a_2 = 2$
$a_3 = 4$
$a_4 = 4$
$a_5 = 3$
$a_6 = 3$
$a_7 = 2$
$a_8 = 2$
$\vdots$

monótona
decreciente
a partir de
$n=3$
pero no estricta