Sucesiones

una sucesión es una función $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$ a_n denota el n-ésimo término "$a(n) = a_n$"

$\rightsquigarrow$ $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a_n denota la sucesión

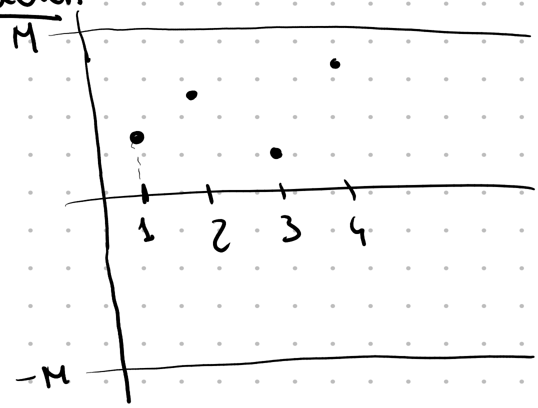
* **monotonía**

a_n es monótona creciente si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

a_n es monótona decreciente si $a_{n+1} \leq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

a_n es estrictamente monótona creciente si $a_n < a_{n+1}$ para todo $n\in\mathbb{N}$

* **acotación**:



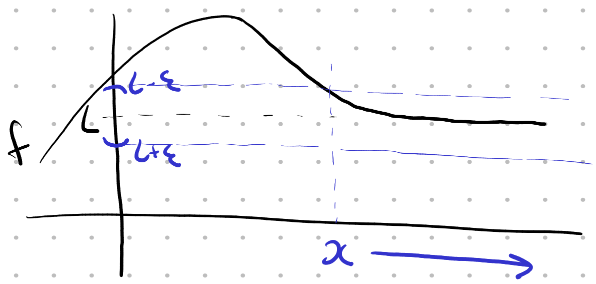
$0 \leq a_n < M$

$-M < a_n < M$

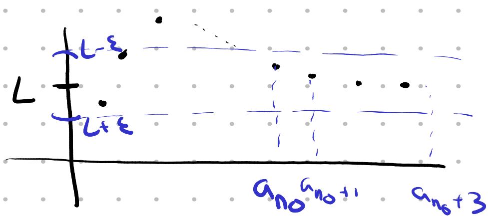
decimos que a_n está acotada si existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$-M \leq a_n \leq M$$

* **convergencia** $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, $\lim a_n = L$



$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$



$\lim a_n = L \iff$ para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$
tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$

$-1 \leq a_n \leq 1$

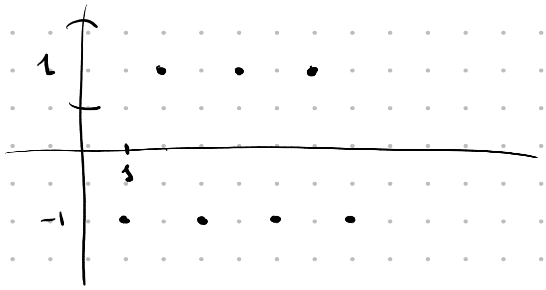
$a_n = (-1)^n$

$a_1 = -1$

$a_2 = 1$

$a_3 = -1$

$a_4 = 1$



$\overbrace{a_n = (-1)^n \text{ está acotada}}$
pero no converge

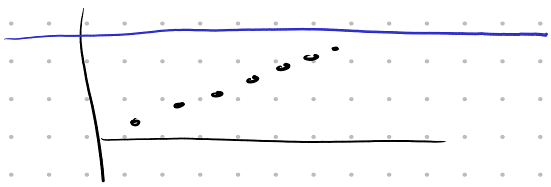
$\lim a_n$ no existe

a_n oscila

<u>resultados</u>

* a_n es convergente $\Rightarrow$ a_n es acotada

* a_n es acotada y monótona creciente $\Rightarrow$ a_n converge



1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde:

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ *b*) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ *c*) $a_n = n + \frac{1}{n}$ *d*) $a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *e*) $a_n = \frac{n^2}{2^n}$

a) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$

* <u>convergencia</u>:

$$\lim a_n = \lim 1 + \underset{\to 0}{\left(\frac{1}{n}\right)} = 1$$

entonces a_n es convergente

$\Rightarrow a_n$ es acotada

* $a_1 = 1 + 1$ $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$ $a_3 = 1 + \frac{1}{3}$ ....

$1 \leq a_n \leq 2$

* veamos que a_n es monótona decreciente estricta

$$a_{n+1} \overset{?}{<} a_n \iff 1 + \frac{1}{n+1} \overset{?}{<} 1 + \frac{1}{n}$$

$$\iff \frac{1}{n+1} \overset{?}{<} \frac{1}{n}$$

$$\iff \frac{1}{\frac{1}{n+1}} \overset{?}{>} \frac{1}{1/n}$$

$$\iff n+1 > n$$

entonces $a_{n+1} < a_n$ y a_n es estrictamente monótona decreciente.

a) $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad a_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad a_3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

veamos que a_n es monótona creciente estricta

forma 1

$$a_{n+1} \overset{?}{>} a_n \iff \frac{n+1}{\sqrt{(n+1)^2+1}} \overset{?}{>} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\iff (n+1)\sqrt{n^2+1} \overset{?}{>} n\underbrace{\sqrt{(n+1)^2+1}}_{= n^2+2n+2}$$

$$\iff (n+1)^2 (n^2+1) \overset{?}{>} n^2(n^2+2n+2)$$

$$\iff (n^2+2n+1)(n^2+1) \overset{?}{>} n^2(n^2+2n+2)$$

$$\iff \cancel{n^4} + \cancel{n^2} + \cancel{2n^3} + 2n + \cancel{n^2} + 1 \overset{?}{>} \cancel{n^4} + \cancel{2n^3} + \cancel{2n^2}$$

$\iff 2n+1 > 0$ y esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$

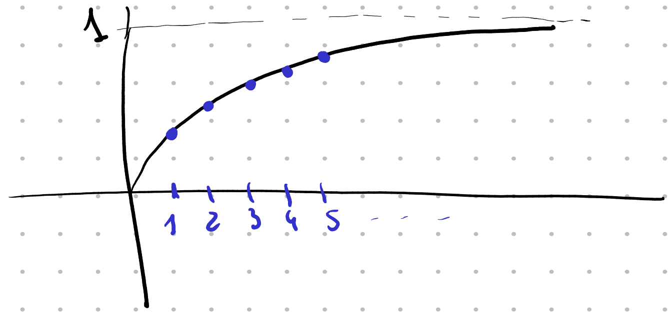
$\iff n > -\frac{1}{2}$ ✓

entonces $a_{n+1} > a_n$ y a_n es estrictamente monótona creciente.

forma 2: $a_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

si definimos $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

si probamos que f es creciente



entonces para probar que a_n es estrictamente monótona creciente podemos probar que $f'(x) > 0$.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} \quad > 0$$

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

$$\iff \sqrt{x^2+1} > \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\iff \cancel{x^2}+1 > \cancel{x^2}$$

$$\iff 1 > 0$$

entonces $f'(x) > 0$ para todo x

$\Rightarrow$ f es creciente estricta

$\Rightarrow a_n$ es creciente estricta

$$\lim a_n = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim \frac{n}{\sqrt{n^2}} = 1$$

$$= \lim \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}$$

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}}}$$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}} = 1$$

* <u>acotación</u> : $0 < a_n \leq 1$

$\rightarrow a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} > 0$

$\rightarrow a_n$ es estrictamente monótona creciente

$\rightarrow \lim a_n = 1$

$\Rightarrow a_n \leq 1$

6. Hallar $a \in \mathbb{R}$ para que $y(x) = e^x$ sea una solución de la ecuación diferencial $\boxed{y'' + ay' - 2y = 0}$. Hallar la solución general de dicha ecuación. Hallar la solución de la ecuación con datos iniciales $y(0) = y'(0) = 1$.

$$y'' + ay' - 2y = 0$$

queremos a tal que e^x sea solución

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda - 2$$

si λ_1 y λ_2 son raíces reales distintas

$$y_H = \underline{Ae^{\overset{=1}{\lambda_1} x}} + Be^{\lambda_2 x} \qquad \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$$

si λ_1 es raíz real doble

$$y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$$

$=1$

si $\lambda = \alpha \pm \beta i$ es raiz compleja

$$y_H = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

en conclusión para que e^x sea solución se tiene que cumplir que 1 sea raiz del polinomio característico

$$p(1) = 0 \iff 1 + a - 2 = 0$$
$$\iff a = 1$$