5. Hallar todos los valores reales de la constante a para que las ecuaciones $y'' + ay' - 2y = 0$ e $y'' - 2y' + ay = 0$ tengan soluciones en común además de $y(x) \equiv 0$. Resolver las ecuaciones obtenidas.

$$\begin{cases} y'' + ay' - 2y = 0 \\ y'' - 2y' + ay = 0 \end{cases}$$

* si $a = -2$ las dos ecuaciones resultan ser la misma

* si $a \neq -2$

sea y_c una solución de ambas ecuaciones

$$\Rightarrow \begin{cases} y_c'' + ay_c' - 2y_c = 0 \\ y_c'' - 2y_c' + ay_c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{y_c''} + ay_c' - 2y_c = \cancel{y_c''} - 2y_c' + ay_c$$

$$\Rightarrow ay_c' - 2y_c = -2y_c' + ay_c$$

$$\Rightarrow ay_c' + 2y_c' = ay_c + 2y_c$$

$$\Rightarrow (a+2)y_c' = (a+2)y_c$$

dividimos entre $a+2$ porque $a \neq -2 \Rightarrow a+2 \neq 0$

$$\Rightarrow y_c' = y_c$$

$$\Rightarrow y_c = ke^x \quad \text{con } k \in \mathbb{R}$$

si las dos ecuaciones tiene una solución en común, esta solución tiene que ser de la forma

$$\boxed{y_c = ke^x}$$

Para que $y=ke^x$ sea solución de $y''+ay'-2y=0$ se tiene que cumplir que 1 es raíz del polinomio característico.

$$p(\lambda)=\lambda^2+a\lambda-2$$

$$p(1)=0 \Rightarrow 1+a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Si $a=1$, la segunda ecuación resulta ser $y''-2y'+y=0$ y su polinomio característico es

$$q(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2 \rightsquigarrow 1 \text{ es raíz}$$

entonces $y=ke^x$ es solución.

Ejercicio 8

$y''+4y'+3y=3e^x+x+\cos(x)$

e) $y''+4y'+3y=\overbrace{3e^x}^{\text{exponencial}}+\overbrace{x}^{\text{polinomio de grado 1}}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0.$

$y_p=\alpha e^x+\beta x+\gamma+\eta\cos(x)+\mu\,\text{sen}(x)$

Vamos a buscar una solución particular de la forma

$$y_p=\alpha e^x+\beta x+\gamma$$

$$y_p'=\alpha e^x+\beta$$

$$y_p''=\alpha e^x$$

$$y_p''+4y_p'+3y_p=3e^x+x$$

$$\Rightarrow \alpha e^x+4(\alpha e^x+\beta)+3(\alpha e^x+\beta x+\gamma)=3e^x+x$$

$$\Rightarrow \alpha e^x+4\alpha e^x+4\beta+3\alpha e^x+3\beta x+3\gamma=3e^x+x$$

$$\Rightarrow \underbrace{8\alpha e^x}+\underbrace{3\beta x}+4\beta+3\gamma=\underbrace{3e^x}+\underbrace{x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8\alpha = 3 & \Rightarrow \boxed{\alpha = 3/8} \\ 3\beta = 1 & \Rightarrow \boxed{\beta = 1/3} \\ 4\beta + 3\gamma = 0 & \Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{3} + 3\gamma = 0 \Rightarrow 3\gamma = -\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{\gamma = -\frac{4}{9}} \end{cases}$$

entonces:

$$y_p(x) = \frac{3}{8}e^x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$$

$$y'' + y' - 2y = e^x$$

① solución general de la homogénea

$$p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2$$

raíces: $\lambda = \dfrac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$ $\nearrow \lambda_1 = 1$, $\searrow \lambda_2 = -2$

$$y_H = \underbrace{Ae^x}_{} + Be^{-2x} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

Ae^x es solución de la homogénea $y'' + y' - 2y = 0$

② una solución particular de la no homogénea

$$y'' + y' - 2y = \underbrace{e^x}_{}$$

λ_1 raíz real doble de polinomio característico

$$y_H = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$$

$$y_p = \alpha x e^x$$

$$y_p' = \alpha e^x + \alpha x e^x$$

$$y_p'' = \alpha e^x + \alpha e^x + \alpha x e^x$$

$$y_p'' + y_p' - 2y_p = e^x$$

$$\Rightarrow \alpha e^x + \alpha e^x + \underbrace{\alpha \cancel{x} e^x}_{} + \alpha e^x + \underbrace{\alpha \cancel{x} e^x}_{} - \underbrace{2\alpha \cancel{x} e^x}_{} = e^x$$

$\Rightarrow 3\alpha e^{x} = e^{x}$

$\Rightarrow 3\alpha = 1$

$\Rightarrow \alpha = 1/3$

solución particular: $y = \frac{1}{3} x e^{x}$