Ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 a coeficientes constantes

Son ecuaciones de la forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = h(x)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

La solución general se obtiene así:

$$y = \underbrace{y_H}_{\substack{\text{solución general}\\ \text{de la homogenea}\\ \text{(va a depender de}\\ \text{dos parámetros)}}} + \overbrace{y_P}^{\text{una solución particular de la no homogénea}}$$

Resolución de la homogénea

$$y'' + ay' + by = 0$$

→ tenemos el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

CASO 1: p tiene dos raíces reales distintas λ_1, λ_2

$$y_H(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

CASO 2: p tiene una raíz real doble λ_1 $\qquad \underbrace{Ae^{\lambda_1 x}} + B\underbrace{xe^{\lambda_1 x}}$

$$y_H(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

CASO 3: p tiene raíces complejas conjugadas $\lambda = \alpha \pm \beta i$

$$y_H(x) = Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$$

Ejercicio 8

a) $y'' + 2y' + 2y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

1 solución general de la homogénea

$$y'' + 2y' + 2y = 0$$

→ polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i$$

raices: $\boxed{\lambda = -1 \pm i}$ $\quad \lambda = -1 + i$

$$\boxed{y_H(x) = Ae^{-x}\cos(x) + Be^{-x}\operatorname{sen}(x)}$$

2 buscamos una solución particular de la no homogénea

$$y'' + 2y' + 2y = \cos(2x) \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} y'' + 2y' + 2y = \underline{x^2 + 1} \\ y_p = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \end{array}$$

vamos a buscar una solución particular de la forma

$$y_p = \alpha\cos(2x) + \beta\operatorname{sen}(2x)$$

$$y_p' = -2\alpha\operatorname{sen}(2x) + 2\beta\cos(2x)$$

$$y_p'' = -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\operatorname{sen}(2x)$$

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow -4\alpha\cos(2x) - 4\beta\operatorname{sen}(2x) + 2(-2\alpha\operatorname{sen}(2x) + 2\beta\cos(2x)) + 2(\alpha\cos(2x) + \beta\operatorname{sen}(2x)) = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \underline{-4\alpha\cos(2x)} \; \underline{-4\beta\operatorname{sen}(2x)} \; \underline{-4\alpha\operatorname{sen}(2x)} + \underline{4\beta\cos(2x)} + \underline{2\alpha\cos(2x)} + \underline{2\beta\operatorname{sen}(2x)} = \cos(2x)$$

$$\Rightarrow \underbrace{(-4\alpha+4\beta+2\alpha)}_{-2\alpha+4\beta}\cos(2x)+\underbrace{(-4\beta-4\alpha+2\beta)}_{-4\alpha-2\beta}\operatorname{sen}(2x)=\cos(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2\alpha+4\beta=1 \rightarrow -4\alpha+8\beta=2 \quad (1) \\ -4\alpha-2\beta=0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2): \ 10\beta=2 \Rightarrow \boxed{\beta=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}}$$

$$(2): \ -4\alpha-2\frac{1}{5}=0$$

$$\Rightarrow -4\alpha=\frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha=-\frac{2}{5\cdot 4}=-\frac{1}{10}}$$

obtenemos esta solución particular:

$$\boxed{y_p(x)=-\frac{1}{10}\cos(2x)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)}$$

(3) solución general de la no homogénea

$$y=y_H+y_P$$

$$=Ae^{-x}\cos(x)+Be^{-x}\operatorname{sen}(x)-\frac{1}{10}\cos(2x)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)$$

(4) despejamos A y B usando las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

$$y(0)=1 \Rightarrow A-\frac{1}{10}=1 \Rightarrow \boxed{A=\frac{11}{10}}$$

$$y=\frac{11}{10}e^{-x}\cos(x)+Be^{-x}\operatorname{sen}(x)-\frac{1}{10}\cos(2x)+\frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)$$

$$y' = -\frac{11}{10}e^{-x}\cos(x) - \frac{11}{10}e^{-x}\operatorname{sen}(x) - Be^{-x}\operatorname{sen}(x) + Be^{-x}\cos(x)$$
$$+ \frac{2}{10}\operatorname{sen}(2x) + \frac{2}{5}\cos(2x)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -\frac{11}{10} + B + \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow B = \frac{11}{10} - \frac{2}{5} = \frac{11}{10} - \frac{4}{10} = \frac{7}{10}$$

entonces:

$$\boxed{y = \frac{11}{10}e^{-x}\cos(x) + \frac{7}{10}e^{-x}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{10}\cos(2x) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2x)}$$

h) $y'' + y = \cos(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

1 solución general de la homogénea

$$y'' + y = 0$$

→ polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

raíces: $\pm i \rightsquigarrow 0 \pm i$

$$y_H(x) = Ae^{0x}\cos(x) + Be^{0x}\operatorname{sen}(x)$$

$$\boxed{y_H(x) = A\cos(x) + B\operatorname{sen}(x)}$$

caso raíz real doble λ_1

$$y_H(x) = Ae^{\lambda_1 x} + Bxe^{\lambda_1 x}$$

2 buscamos una solución particular de la no homogénea

$$y'' + y = \cos(x)$$

vamos a buscar una solución particular de la forma

$$y_p = \alpha x\cos(x) + \beta x\operatorname{sen}(x)$$

$$y_p' = \alpha\cos(x) - \alpha x\operatorname{sen}(x) + \beta\operatorname{sen}(x) + \beta x\cos(x)$$

$$y_p'' = -\alpha\,\text{sen}(x) - \alpha\,\text{sen}(x) - \alpha x \cos(x) + \beta\cos(x) + \beta\cos(x) - \beta x\,\text{sen}(x)$$
$$= -2\alpha\,\text{sen}(x) - \alpha x\cos(x) + 2\beta\cos(x) - \beta x\,\text{sen}(x)$$

$$y_p'' + y_p = \cos(x)$$

$$\Rightarrow -2\alpha\,\text{sen}(x) - \cancel{\alpha x\cos(x)} + 2\beta\cos(x) - \cancel{\beta x\,\text{sen}(x)} + \cancel{\alpha x\cos(x)} + \cancel{\beta x\,\text{sen}(x)} = \cos(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\beta = 1 \Rightarrow \beta = 1/2 \\ -2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \end{cases}$$

entonces $\boxed{y_p = \frac{1}{2} x\,\text{sen}(x)}$

③ solución general de la no homogénea

$$y = y_H + y_p = A\cos(x) + B\,\text{sen}(x) + \frac{1}{2} x\,\text{sen}(x)$$

④ despejamos A y B usando las condiciones inicial