3. (***Primer parcial segundo semestre 2022***) Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial

$$\frac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1 + y^2(x))$$

que cumple $y(0) = 0$. Entonces: $y(\sqrt{2}) = ??$

$$\begin{cases} \dfrac{y'(x)\,e^{x^2}}{x} = -2(1+y^2(x)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

* vamos a resolver $\dfrac{y'(x)e^{x^2}}{x} = -2(1+y^2(x))$

→ separamos las variables

$$\frac{y'}{1+y^2} = \frac{-2x}{e^{x^2}} = -2x\,e^{-x^2}$$

→ integramos con respecto a x

$$\int \frac{y'}{1+y^2}\,dx = \int -2x\,e^{-x^2}\,dx$$

du

$$\left.\begin{aligned} u &= y(x) \\ du &= y'dx \end{aligned}\right] \text{cambio de variable}$$

$$\underbrace{\int \frac{1}{1+u^2}\,du}_{=\arctan(u)} = \int -2x\,e^{-x^2}\,dx$$

$$\int -2x e^{-x^2}\,dx = \int e^z\,dz = e^z = e^{-x^2} + C$$

$$z = -x^2$$
$$dz = -2x\,dx$$

entonces:

$$\arctan(u) = e^{-x^2} + C$$

$$\Rightarrow \arctan(y) = e^{-x^2} + C \Rightarrow \underbrace{\tan(\arctan(y))}_{y} = \tan(e^{-x^2} + C)$$

$\rightarrow$ despejamos y

$$\arctan(y) = e^{-x^2} + C$$

$$\Rightarrow \quad y = \tan(e^{-x^2} + C)$$

* ahora usamos la condición inicial para despejar C

$$y(0) = 0 \Rightarrow \tan(e^0 + C) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(1 + C) = 0 \qquad \tan(1+C) = \frac{\text{sen}(1+C)}{\cos(1+C)}$$

$$\Rightarrow 1 + C = 0$$

$$\Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \tan(e^{-x^2} - 1)}$$

Entonces $y(\sqrt{2}) = \tan(e^{-2} - 1)$

Ecuaciones diferenciales lineales de orden 1

Son ecuaciones de la forma

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x)$$

donde $a(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas

* si $\underline{b(x) = 0}$: $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

  decimos que la ecuación es homogénea

  $\rightarrow$ el conjunto de soluciones es un subespacio vectorial de dimensión 1 del espacio vectorial de funciones

* si $b(x) \neq 0$: decimos que la ecuación es no homogénea

→ la solución general de la no homogénea se obtiene de esta forma

$$y = \underbrace{y_H}_{\text{solución general de la homogénea}} + \overbrace{y_P}^{\text{una solución particular de la no homogénea}}$$

Pasos para resolver

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)\,y(x) = b(x) \\ \text{alguna condición inicial (por ejemplo: } y(0) = 1) \end{cases}$$

① resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = 0$$

→ es una ecuación de variables separables

y_H = solución general de la homogenea

② buscamos una solución particular de la no homogénea

→ por el método de variación de constantes

y_P = solución particular de la no homogenea

③ solución general de la no homogénea

$$y = y_H + y_P$$

④ usar la condición inicial para despejar el parámetro que viene de y_H

Ejercicio 3

Resolver
$$\begin{cases} y' + y\cos(x) = \cos(x)\,\mathrm{sen}(x) \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

① resolver la ecuación homogénea asociada

$$y' + y\cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow y' = -y\cos(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = -\cos(x)$$ ← suponemos $y \neq 0$

$y(x) = 0$ es solución de la homogenea

→ integramos con respecto a x

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = \int -\cos(x)\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} u = y(x) \\ du = y'\,dx \end{array}\right\}$$ cambio de variable

$$\int \frac{1}{u}\,du = \int -\cos(x)\,dx$$

$(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$

$$\ln(|u|) = -\operatorname{sen}(x) + C$$

$$\Rightarrow \ln(|y|) = -\operatorname{sen}(x) + C$$

$$\Rightarrow |y| = e^{-\operatorname{sen}(x) + C}$$

$$\Rightarrow |y| = e^{C} e^{-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\pm e^{C}}_{\in \mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{-\operatorname{sen}(x)}$$

$$\Rightarrow y = k e^{-\operatorname{sen}(x)} \text{ con } k \neq 0$$

además tenemos la solución $y(x) = 0$

$$\boxed{y_H = k e^{-\operatorname{sen}(x)} \quad \text{con } k \in \mathbb{R}}$$

constante

② buscamos <u>una</u> solución particular de la no homogénea
vamos a aplicar el método de variación de constantes
es decir vamos a buscar una solución de la forma

$$y_p = k(x)\, e^{-sen(x)}$$

$$y_p' = k'(x)\, e^{-sen(x)} - k(x)\, e^{-sen(x)} \cos(x)$$

$$y_p' + y_p \cos(x) = \cos(x)\, sen(x)$$

$$\Rightarrow k'(x) e^{-sen(x)} \cancel{- k(x)\, e^{-sen(x)} \cos(x)} \cancel{+ k(x) e^{-sen(x)} \cos(x)} = \cos(x)\, sen(x)$$

$$\Rightarrow k'(x)\, e^{-sen(x)} = \cos(x)\, sen(x)$$

$$\Rightarrow k'(x) = \frac{\cos(x)\, sen(x)}{e^{-sen(x)}} = e^{sen(x)} \cos(x)\, sen(x)$$

$$\Rightarrow k(x) = \int e^{sen(x)} \underline{\cos(x)}\, sen(x)\, \underline{dx}$$

cambio de variable: $z = sen(x)$

$dz = \cos(x)\, dx$

$$= \int e^z z \, dz$$

$$f(z) = z \rightsquigarrow f'(z) = 1$$

$$g'(z) = e^z \rightsquigarrow g(z) = e^z$$

$$= z e^z - \int e^z dz$$

$$= z e^z - e^z$$

$$= sen(x) e^{sen(x)} - e^{sen(x)}$$

$$\boxed{k(x) = e^{sen(x)} (sen(x) - 1)}$$

entonces: $y_p = k(x)\, e^{-sen(x)}$

$$= e^{sen(x)} (sen(x) - 1)\, e^{-sen(x)}$$

$$= sen(x) - 1$$

(3) solución general de la no homogénea

$$y = y_H + y_p$$

$$\boxed{y = ke^{-sen(x)} + sen(x) - 1}$$

(4) usamos la condición inicial para despejar la constante

$y(0) = 3$

$\Rightarrow ke^{-sen(0)} + sen(0) - 1 = 3$

$\Rightarrow k - 1 = 3$

$\Rightarrow k = 4$

entonces la solución de la ecuación diferencial que verifica la condición inicial es:

$$\boxed{y(x) = 4e^{-sen(x)} + sen(x) - 1}$$

2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales mediante el cambio de variables $u(x) = y(x)/x$, de forma de llevarlas a ecuaciones de variables separadas del tipo $u' = A(u)B(x)$:

   a) $x^2y' + y(y - x) = 0$

   b) $(x + y)y' = x - y$

b) $(x+y)y' = x-y$

cambio de variable : $u(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

$\rightarrow y(x) = u(x)\,x$

$\rightarrow y'(x) = u'(x)\,x + u(x)$

reemplazamos en la ecuación

$$(x + ux)(u'x + u) = x - ux$$

$$x^2u' + xu + x^2uu' + xu^2 = x - ux$$

$$x^2u'(1+u) = x - ux - xu - xu^2$$

$$x^2u'(1+u) = x - 2ux - xu^2$$

$$x^2u'(1+u) = x(1-2u-u^2)$$

$$\frac{u'(1+u)}{1-2u-u^2} = \frac{x}{x^2}$$

$$\frac{(1+u)}{1-2u-u^2}\,u' = \frac{1}{x}$$ $\leftarrow$ es una ecuación de variables separables