$$z_k^8 = 2^8$$

$$\sqrt[8]{z_k^8} = \sqrt[8]{2^8}$$

$$x^2 = 1$$

$$\sqrt[2]{x^2} = \sqrt{1} \begin{cases} \nearrow 1 \\ \searrow -1 \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales

→ una ecuación donde la incógnita es una función $y(x)$

→ aparecen las derivadas de y: $y', y'', y''', \dots$

ejemplo:

* $y'(x) = y(x)$

$$\Rightarrow y(x) = Ce^x \quad \text{con } C \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{infinitas soluciones}$$

* $\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\begin{matrix} \leftrightarrow y(x) = Ce^x \\ \rightarrow \underset{\overset{\parallel}{2}}{y(0)} = Ce^0 = C \end{matrix}$

$$\Rightarrow \boxed{C = 2}$$

$$\Rightarrow y(x) = 2e^x \quad \leftarrow \text{solución única}$$

vamos a estudiar tres tipos:

* variables separables
* lineales de orden 1
* lineales de orden 2

Ecuaciones de variables separables

son las ecuaciones diferenciales que se pueden escribir de esta forma

$$\underbrace{\{\quad\}}_{\text{depende de } y} \cdot y' = \underbrace{\{\quad\}}_{\text{depende de } x}$$

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:

a) $y' = y^2 - 1$ $\longrightarrow$ $y'(x) = y(x)^2 - 1$

b) $(1 + y^2)yy' + (1 + y^2) = 0$

c) $xe^{2y}y' - (1 + e^{2y}) = 0$

a) $y' = y^2 - 1 \rightsquigarrow \{\quad\} \cdot y' =$

① separamos las variables:

$$\frac{y'}{y^2-1} = \frac{y^2-1}{y^2-1}$$

$\longleftarrow$ estamos suponiendo $y(x)^2 - 1 \neq 0$

$y(x)^2 \neq 1$

$\Rightarrow y(x) \neq 1 \;,\; y(x) \neq -1$

$$\frac{y'}{y^2-1} = 1$$

$$\boxed{\frac{y'(x)}{y(x)^2-1} = 1}$$

$*$ $y(x) = 1$ es solución? si

$y'(x) = 0$

$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{y'} = \underbrace{y^2 - 1}_{=0}$

② integramos con respecto a x

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)^2-1}\,dx = \int 1\,dx$$

$*$ $y(x) = -1$ es solución? si

$y' = 0$ $\quad \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{y'} = \underbrace{y^2 - 1}_{=0}$

③ cambio de variable: $u = y(x) \rightarrow du = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \int 1\,dx$$

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \int \frac{1}{(u+1)(u-1)}\,du = \int \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}\,du$$

buscamos A y B:

$$\frac{1}{(u+1)(u-1)} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1}$$

$$= \frac{A(u-1)+B(u+1)}{(u+1)(u-1)}$$

$$= \frac{Au - A + Bu + B}{(u+1)(u-1)}$$

$$= \frac{(A+B)u - A + B}{(u+1)(u-1)}$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)u - A + B \rightarrow 0 \cdot u + 1 = (A+B)u + (-A+B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B = 0 & (1) \\ -A+B = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1)+(2): \quad 2B = 1 \Rightarrow \boxed{B = 1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = -1/2}$$

Entonces:

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \int \frac{-1/2}{u+1} + \frac{1/2}{u-1}\,du$$

$$= \int \frac{-1/2}{u+1}\,du + \int \frac{1/2}{u-1}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u+1}\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1}\,du$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{2}\ln|u-1|$$

$$\int \frac{1}{u+1}\,du = \int \frac{1}{w}\,dw = \ln|w| = \ln|u+1|$$

$w = u+1$

$dw = du$

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = -\frac{1}{2}\ln|u+1| + \frac{1}{2}\ln|u-1|$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\ln|u+1| + \ln|u-1|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| - \ln|u+1|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|$$

entonces:

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \int 1\,dx$$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| = x + C$$

deshacemos el cambio de variable $u = y(x)$

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = x + C$$

④ despejamos y

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = x + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = 2x + 2C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = e^{2x+2C}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = e^{2C}e^{2x}$$

$$\frac{y(x)-1}{y(x)+1} = e^{2C}e^{2x}$$

$$\frac{y(x)-1}{y(x)+1} = -e^{2C}e^{2x}$$

constante

numero real cualquiera

$$\Rightarrow \frac{y(x)-1}{y(x)+1} = \pm \underbrace{e^{2C}}_{\text{real positivo no nulo cualquiera}} e^{2x}$$

$\pm e^{2c}$ es un numero real cualquiera no nulo

$$\Rightarrow \frac{y(x)-1}{y(x)+1} = k e^{2x} \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow y(x) - 1 = k e^{2x} \left(y(x) + 1 \right)$$

$$\Rightarrow y(x) - 1 = k e^{2x} y(x) + k e^{2x}$$

$$\Rightarrow y(x) - k e^{2x} y(x) = k e^{2x} + 1$$

$$\Rightarrow y(x) \left(1 - k e^{2x} \right) = k e^{2x} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{k e^{2x} + 1}{1 - k e^{2x}} \qquad k \neq 0}$$

y además hay dos soluciones constantes

c) $x e^{2y} y' - (1 + e^{2y}) = 0$

$$\underbrace{\square}_{\text{depende de } y} \cdot y' = \underbrace{\square}_{\text{depende de } x}$$

① separamos las variables:

$$x e^{2y} y' - (1 + e^{2y}) = 0$$

$$\Rightarrow x e^{2y} y' = 1 + e^{2y}$$

$$\Rightarrow e^{2y} y' = \frac{1 + e^{2y}}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{2y}}{1 + e^{2y}} y' = \frac{1}{x}$$

② integramos con respecto a x

$$\int \frac{e^{2y}}{1 + e^{2y}} y' \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx$$

③ cambio de variable $u = y$, $du = y' dx$

$$\int \frac{e^{2u}}{1+e^{2u}}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{e^{2u}}{1+e^{2u}}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}\, du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z}\, dz$$

$z = 1+e^{2u}$

$dz = 2e^{2u}\, du$

$$= \frac{1}{2}\ln|z| + \text{constante}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|1+e^{2u}| + \text{constante}$$

entonces:

$$\int \frac{e^{2u}}{1+e^{2u}}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$\frac{1}{2}\ln|1+e^{2u}| = \ln|x| + C$$

deshacemos el cambio de variable $u = y(x)$

$$\frac{1}{2}\ln|1+e^{2y(x)}| = \ln|x| + C$$

④ despejamos $y(x)$

$$\frac{1}{2}\ln|1+e^{2y(x)}| = \ln|x| + C$$

$\alpha \ln(x) = \ln(x^{\alpha})$

$$\Rightarrow \ln|\overbrace{1+e^{2y(x)}}^{>0}| = 2\ln|x| + 2C$$

$$\Rightarrow \ln(1+e^{2y(x)}) = \ln|x|^2 + 2C$$

$$\Rightarrow \ln(1+e^{2y(x)}) = \ln(x^2) + 2C$$

$$\Rightarrow 1+e^{2y(x)} = e^{\ln(x^2)+2C}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2y(x)} = e^{2C} e^{\ln(x^2)}$$

$$\Rightarrow 1 + e^{2y(x)} = e^{2C} x^2$$

$$\Rightarrow e^{2y(x)} = e^{2C} x^2 - 1$$

$$\Rightarrow 2y(x) = \ln(e^{2C} x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{2C} x^2 - 1)}$$