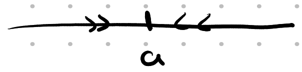
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES - LIMITES

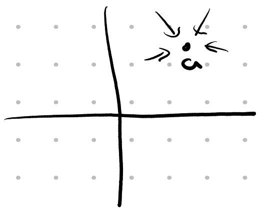
límite en una variable



límite en varias variables

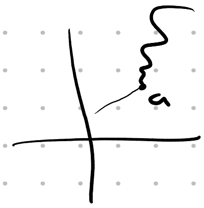
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\lim_{(x,y)\to a} f(x,y)$$



nos podemos acercar a a en infinitas direcciones

→ límite direccional: nos acercamos a a mediante alguna curva particular: recta, parábola, ...



los límites direccionales sirven para:

* probar que el límite no existe
* encontrar un candidato a límite

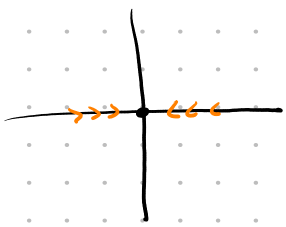
5. Probar que en los siguientes casos NO existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$:

$$(a)\ f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad (b)\ f(x,y) = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \qquad (c)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x+y}, & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

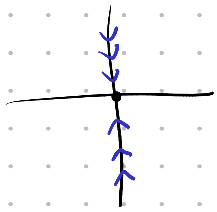
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$

* nos acercamos a $(0,0)$ por la recta $y=0$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

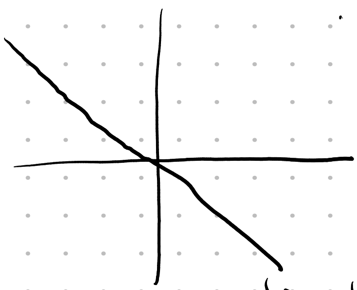
* nos acercamos a $(0,0)$ por la recta $x=0$



$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} -\frac{y^2}{y^2} = -1$$

conclusión: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$



↳ sobre esta recta $f(x,y)=0$

* nos acercamos a $(0,0)$ por la recta $y=mx$ con $m \neq -1$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=mx}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x+mx}$$

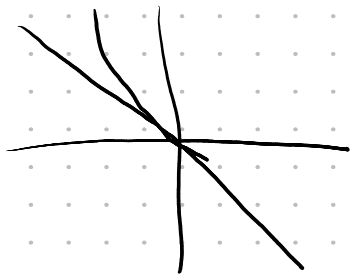
$$= \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m)x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m} x = 0$$

* nos acercamos mediante $y = x^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x+x^2} = 0$$

*



buscamos una dirección que sea una curva que tiene tangente $y=-x$ en $(0,0)$

tomamos $y = x^2 - x$ $\qquad$ $y = ax^2 + bx$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2-x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x, x^2-x)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2-x)}{x+x^2-x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3-x^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(x-1)}{\cancel{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} x-1$$

$$= -1$$

$$\lim_{x\to 0} f(x, ax^2+bx) = \lim_{x\to 0} \frac{x(ax^2+bx)}{x+ax^2+bx}$$

Conclusión: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe

6. a) Probar que si $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ y g es una función acotada en una bola reducida de centro p, entonces $\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$.

b) Calcular los límites de las siguientes funciones para $(x, y) \to (0, 0)$:

$$(a)\ x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \qquad (b)\ \frac{xy^2}{x^2+y^2} \qquad (c)\ \frac{xy^3}{x^2+y^4} = y\frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

$$\lim_{x \to p} \underbrace{f(x)}_{\substack{x \to p \\ \downarrow \\ 0}} \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{acotada en} \\ \text{una bola} \\ \text{reducida} \\ \text{de centro } p}} = 0$$

b)

$$* \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{ACOTADO}} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} = 0$$

$$0 \leq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

$$* \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{y} \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^4}}_{\text{ACOTADO?}} = 0$$

$$\left| \frac{xy^2}{x^2+y^4} \right| < ?$$

(1)

$$\frac{1}{2}(x-y^2)^2 = \frac{1}{2}x^2 - xy^2 + \frac{1}{2}y^4$$

$$\Rightarrow xy^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^4 - \underbrace{\frac{1}{2}(x-y^2)^2}_{>0}$$

$$\Rightarrow xy^2 \leq \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^4$$

$$\Rightarrow xy^2 \leq \frac{1}{2}(x^2+y^4)$$

(2) $$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}(x+y^2)^2 = \frac{1}{2}x^2 + xy^2 + \frac{1}{2}y^4 \\ \Rightarrow xy^2 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^4 + \underbrace{\frac{1}{2}(x+y^2)^2}_{\geq 0} \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^4 \leq xy^2 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}(x^2+y^4) \leq xy^2 \end{array}\right.$$

entonces: $$-\frac{1}{2}(x^2+y^4) \overset{(2)}{\leq} xy^2 \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{2}(x^2+y^4)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{xy^2}{x^2+y^4} \leq \frac{1}{2}$$

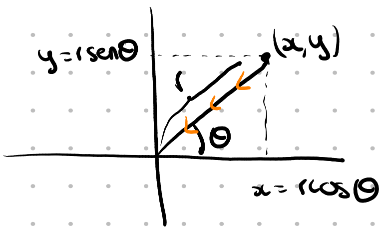
$$\Rightarrow \quad \left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Limites usando coordenadas polares

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, nos interesa $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

consideramos el cambio de variable

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



obtenemos

$$g_\theta(r) = g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

¿ relación entre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y $\underbrace{\lim\limits_{r\to 0^+} g_\theta(r)}_{\text{son límites direccionales}}$?

* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \implies \lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = L$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$

* $\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = L$ para todo $\theta \in [0, 2\pi) \not\Longrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L$

ejemplos:

① $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

cambio a polares: $x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$g_\theta(r) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta}}$$

$$= \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{=1}}}$$

$$= \frac{r\cos\theta}{r}$$

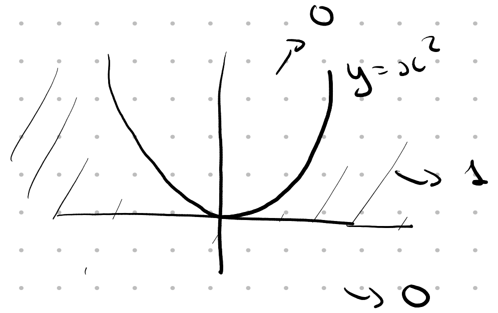
$$= \cos\theta$$

$$\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = \lim_{r\to 0^+} \cos\theta = \cos\theta$$

depende de θ
es decir depende
de como nos
acercamos a $(0,0)$

Conclusión: el límite no existe

② $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ con $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$



pasamos a polares:

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

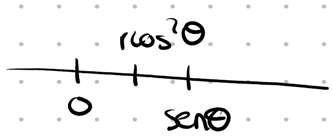
$$0 < y < x^2 \to 0 < r\,\text{sen}\,\theta < r^2\cos^2\theta$$
$$\to 0 < \text{sen}\,\theta < r\cos^2\theta$$

$$g_\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \text{sen}\,\theta < r\cos^2\theta \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = 0$$

fijamos $\theta \in [0, 2\pi)$

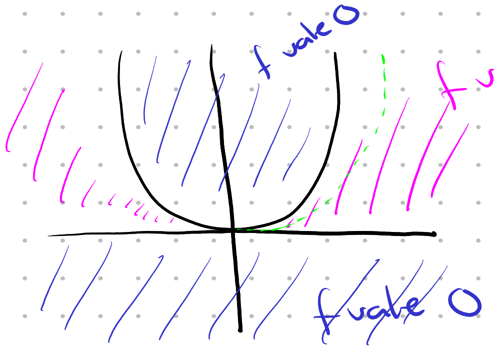
$$\underbrace{\text{sen}\,\theta}_{\substack{\uparrow \\ \text{fijo}}} < \underbrace{r\cos^2\theta}_{\to 0}$$



existe R tal que $r \in (0, R)$ tenemos $r\cos^2\theta < \text{sen}\,\theta$

entonces para todo $r \in (0, R)$ $g_\theta(r) = 0$

entonces $\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = 0$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$



$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \boxed{0 < y < x^2} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Si tomamos $y = \frac{1}{2}x^2$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=\frac{1}{2}x^2}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \underbrace{f(x, \tfrac{1}{2}x^2)}_{0<\frac{1}{2}x^2<x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Conclusión: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe

CASO PARTICULAR

$$\left.\begin{array}{l} g_\theta(r) = g(r,\theta) = h(r)k(\theta) \text{ con} \\ \quad \bullet\ h:(0,R] \to \mathbb{R} \text{ tal que } \lim_{r\to 0^+} h(r) = 0 \\ \quad \bullet\ k:[0,2\pi] \to \mathbb{R} \text{ acotada} \end{array}\right] \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

ejemplo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$x = r\cos\theta$

$y = r\,\text{sen}\,\theta$

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\,\text{sen}\,\theta) = \frac{\cancel{r^2}\cos^2\theta\, r\,\text{sen}\theta}{\cancel{r^2}\cos^2\theta + \cancel{r^2}\,\text{sen}^2\theta}$$

$$= \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{r}\ \underbrace{\cos^2\theta\,\text{sen}\theta}_{\text{ACOTADA}}$$

entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$